FYZIKÁLNY KOREŠPONDENČNÝ SEMINÁR

A-kategória (starší)
školský rok 2000/2001

vzorové riešenia 3. série

FKS, KZDF MFF UK
Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

fks@center.fmph.uniba.sk
www.ddp.fmph.uniba.sk/fks

A-3.1 Hviezdička (opravoval Matúš)

Začnime netradične, správnou odpoveďou. Na oblohe sme počas oslavy narodenín nevideli žiadnu hviezdu, ale planétu a tou planétou bol Jupiter. Že ako to zistíme?

Východ o dve hodiny neskôr znamená zdanlivý posun na oblohe o $(2/24)*360^{o}=30^{o}$. Pri minimálnej pozorovanej vzdialenosti hviezd by však toto znamenalo príliš veľkú potrebnú rýchlosť pohybu v priestore, veď pozrite:

$$\omega = \frac{v}{R} \Rightarrow v = \omega R = \frac{30}{360} 2\pi \cdot 4{,}2.$$

Tu sme dosadili uhlovú rýchlosť v radiánoch za rok a vzdialenosť rovnú vzdialenosti najbližšej hviezdy (Proxima Centauri) v svetelných rokoch. Výsledná rýchlosť teda bude mať jednotku svetelný rok za rok (vtipná kombinácia, že?). Táto hodnota však po prepočítaní na kilometre za sekundu prevyšuje bežné rýchlosti pohybu hviezd (rádovo desiatky až stovky kilometrov za sekundu) a navyše atakuje rýchlosť svetla. No a to je, uznajte, veľa. Zistili sme teda, že pozorovaný objekt musí byť výrazne bližšie než hviezdy.

Pozrime sa teda po slnečnej sústave. Družice obiehajúce okolo Zeme vylúčime hneď, ich pohyb je aj pri krátkom pohľade evidentný, nebolo by možné považovať ich za hviezdu. Kométu by bolo iba veľmi ťažko možné pozorovať aj po roku voľným okom. Veď aj kométa Hale-Bopp, teda jedna z najväčších pozorovaných v tomto storočí nebola viditeľná voľným okom dlhšie ako pár mesiacov. A navyše naše zadanie nehovorilo nič o viditeľnom chvoste kométy, bez ktorého by sa tá zrejme nezaobišla. Ako je to ale s planétami?

Už sme si povedali, že zdanlivý ročný posun telesa na oblohe je 30^{o}. Z toho vyplýva, že po dvanástich rokoch by sme ju uvideli opäť na tom istom mieste na oblohe, opäť by vychádzala o desiatej hodine večer. No a s ktorou planétou sa Zem dostáva do rovnakej polohy po dvanástich rokoch? No predsa s tou, ktorej doba obehu je dvanásť rokov! To preto, lebo Zem sa vždy po roku (a teda aj po dvanástich) dostane na to isté meisto v priestore a rovanko sa teda musí aj hľadaná planéta, aby bola ich vzájomná poloha nezmenená. Skúste si nakresliť pár obrázkov a uvidíte, že je to tak. Má nejaká planéta dobu obehu spomínaných dvanásť rokov? Jupiter obehne Slnko raz za približne 11,9 roka. Toto je hodnota, myslím, dostatočne blízka potrebnej a môžeme teda čestne prehlásiť, že počas narodeninovej oslavy vychádzal Jupiter.

Venujme sa ešte chvíľu chybám, ktorých ste sa dopustili. Mnohí z vás získali použitím trojčlenky (jej zdôvodnenie pritom vôbec neuviedli!) takú vzdialenosť planéty od Slnka, ktorej zodpovedá vzdialenosť Uránu. Toto samozrejme nemôže byť dobre, veď Urán nie je možné vidieť voľným okom! Nabudúce sa teda skúste nad výsledkom lepšie zamyslieť, či má šancu byť správnou odpoveďou, či je predstaviteľný.

Viacero riešení sa zakladalo na podobnosti s meraním rýchlosti svetla Römerom, ktorý tak urobil na základe premenlivej periódy zákrytov Jupiterových mesiačikov. Tie sa vždy, keď bol Jupiter od Zeme ďalej, oneskorovali v dôsledku konečnej rýchlosti svetla. Vaša idea bola, že keď svetlo dve hodiny mešká, je potrebné nájsť planétu, z ktorej svetlo cestuje na Zem dve hodiny. To však nemôže byť správne. Dvojhodinové meškanie musí byť spôsobené zmenou vzdialenosti planéty od Zeme o dve svetelné hodiny. No a toto pri nezmenej polohe Zeme (po roku sa dostane na to isté miesto v priestore) nie je za rok možné, žiadna planéta sa o toľko neposunie. Ale to si už môžete spočítať na domácu úlohu...

A-3.2 Záclona (opravoval Nagi)

Najprv by som chcel upozorniť zopár expertov, aby si poriadne premysleli, čo idú riešiť a pozreli si obrázok (ktorý občas máva aj informačnú hodnotu). Záves je totiž úplne prehnutý a padá len priamo nadol. Poďme teda riešiť.

Čo spôsobuje silu pôsobiacu na „garnižu“? To, že je na nej vôbec nejaký záves zavesený. A to, že záves padajúci nadol sa hýbe a musí ho niečo zastaviť, teda meniť mu hybnosť – pôsobiť silou.

Každý kúsok závesu bude padať voľným pádom, až kým sa nezastaví (čo bude takmer okamžite, ako sa dostane do bodu *x* pod pôvodným bodom prehnutia, ak bol pôvodne v bode *x* nad ním). Čas pádu kúska z výšky *x* je $t_x = \sqrt{\frac{2(2x)}{g}}$. Teda v čase *t* visí na tyči záves s hmotnosťou $m(t) = \left(\frac{L}{2} + x\right)\frac{M}{L} = \left(\frac{L}{2} + \frac{gt^2}{4}\right)\frac{M}{L}$. Z toho vypočítame tiažovú silu

$$F_g = mg = \frac{Mg}{2} + \frac{M}{4L} g^2 t^2 .$$

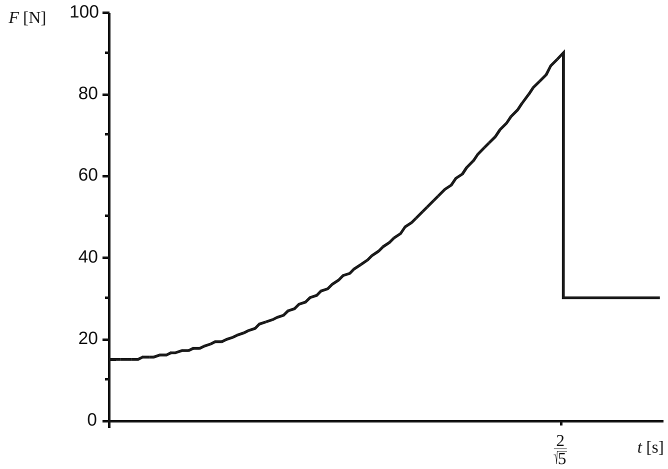
Záves padá voľným pádom a tým pádom zrýchľuje. Niektorí z vás si mysleli, že sa to prejaví trhnutím na konci pádu. Ale keď si to lepšie premyslíte, uvedomíte si, že sa to prejavuje miniatúrnymi trhnutiami v každom momente. Predstavte si záves zložený z vodorovných tenučkých lamel. O každej z nich sa teraz môžme baviť nezávisle. Taký malý vodorovný kúsok závesu teraz padá a musí zastať. Keď ho garniža (vlastne záves nad ním, ale to spôsobuje automaticky aj silu pôsobiacu na garnižu) zastavuje, pôsobí silou $F_p = \frac{\Delta p}{\Delta t}$. Aká je hybnosť práve dopadajúceho kúska Δx? Má rýchlosť $v = gt$. Teda hybnosť $\Delta p = \frac{\Delta x}{L} Mv = \frac{\Delta x}{L} Mgt$. A tento kúsok Δx sa zastaví za čas $\Delta t = \frac{2\Delta x}{v} = \frac{2\Delta x}{gt}$. To je kvôli tomu, že záves je prehnutý, a teda dráha, ktorú musí kúsok pôvodne Δx nad bodom prehnutia prejsť, aby sa dostal do svojej konečnej polohy je $2\Delta x$! Tu si to nikto z tých, čo inak uvažovali všetko správne neuvedomil. Po dosadení za Δt a Δp do vzťahu pre silu z toho potom dostaneme

$$F_p = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{\frac{\Delta x}{L} Mgt}{\frac{2\Delta x}{gt}} = \frac{M}{2L} g^2 t^2 .$$

No a teraz nám už len stačí obe sily spočítať a máme výsledok (pre čas $0 \le t \le \sqrt{2(2L)} / \sqrt{g}$)

$$F = F_g + F_p = \frac{Mg}{2} + \frac{M}{4L} g^2 t^2 + \frac{M}{2L} g^2 t^2 = \frac{Mg}{2}\left(1 + \frac{3}{2}\frac{gt^2}{L}\right) \approx 15\left(1 + 7{,}5\,t^2\right)\mathrm{N},$$

ak zadávame čas v sekundách. Sila je maximálna v čase $t \approx 2/\sqrt{5}$ a je rovná zhruba $15 \times 6 \approx 90\,\mathrm{N}$, lebo vtedy práve dopadá spodná časť závesu, ktorá má najväčšiu hybnosť. Potom sa skokom zmenší na hodnotu Mg teda zhruba 30N, pretože sa už ďalej nič nebude hýbať. Graf tejto závislosti vyzerá takto:

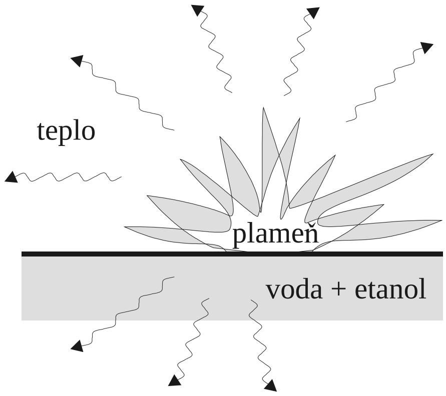


No a nakoniec malá poznámka. Jediní dvaja, ktorí to mali celé dobre to od seba odpísali, čo sa prejavilo na bodovom hodnotení. Nerobte to ani Vy, lebo obanujete!

A–3.3 Ohnivá voda (opravoval Cyril Adamuščín)

Milé deti! Ak ste si dobre všimli, tento príklad nebol myslený ako experiment, ale nemal som vám to za zlé. Je veľmi pekné, ak si vypočítané hodnoty porovnáte s nameranými. Horšie je, ak sa nezhodujú. Potom musíte hľadať dôvody, prečo to nevyšlo a to Vám veľmi nešlo a pritom dôvod bol vcelku jednoduchý.

Ale poďme na vec. Z tabuliek vieme, že výhrevnosť etanolu je H=26800 kJ.kg^{-1}. To je energia, ktorú získame, keď horením v kyslíkovej atmosfére (teda napr. pozemskej) spálime 1 kg etanolu. Teda sú už od nej odrátané straty, ktoré vzniknú ohrievaním etanolu na teplotu horenia a odparovaním samotného etanolu. Aby nám zmes vody a etanolu horela musí táto energia stačiť na zohriatie vody a jej odparenie. Pričom teplota na ktorú potrebujeme vodu zohriať je 100 $^{\mathrm{o}}$C a ohrievanie vzniknutej vodnej pary vzhľadom na jej malú tepelnú vodivosť a menšiu mernú tepelnú kapacitu zanedbáme. A navyše musíme uvážiť, že horenie (kvôli prístupu kyslíka) môže prebiehať len na povrchu kvapaliny, z čoho vylýva, že nie všetka energia vzniknutá horením etanolu sa spotrebuje na ohrievanie vody, ale jej podstatná časť odíde do okolia, čo pekne znázorňuje obrázok:



Hrubý odhad nám povie, že tak polovica energie uletí do vzduchu a nezúčastní sa na ohreve zmesi. Avšak pri bližšom pohľade vidno, že veľa tepla sa stratí prúdením smerom hore (lebo oheň horí smerom hore☺), teda straty sú asi väčšie ako 50%. Ďalej už jednoducho podľa princípu opísaného vyššie (v podstate zákon zachovania energie) možno zapísať rovnice:

Energia uvoľnená pri horení etanolu:

$$Q_E = m_E.H\ ,$$

kde m_E je hmotnosť etanolu v zmesi.

Energia potrebná na zohriatie a odparenie vody:

$$Q_V = m_V.l_v + m_v.(T_1 - T_{\text{var}}).c_v\ ,$$

kde m_v je hmotnosť vody v zmesi, c_v je merná tepelná kapacita vody, c_p merná tepelná kapacita pary, l_v merné teplo odparovania vody, T_1 (20 ^{o}C) je pôvodná teplota zmesi a T_{var} je teplota varu vody (100 ^{o}C).

Ak vezmeme do úvahy, že Q_E sa s účinnosťou η spotrebuje na ohriatie vody, platí:

$$\eta.m_E.H = m_V.(l_V + (T_1 - T_{\text{var}}).c_v)\ .$$

Teda hmotnostný podiel je:

$$p = \frac{m_E}{m_E + m_V} = \frac{l_V + (T_1 - T_{\text{var}}).c_v}{l_V + (T_1 - T_{\text{var}}).c_v + \eta.H}$$

Po dosadení tabuľkových hodnôt a $\eta \approx 0{,}3$ dostávame:

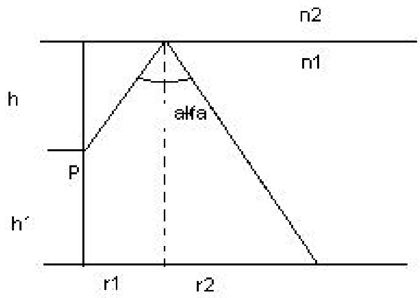
$$p \approx 30\%\ ,$$

čo je vcelku rozumný výsledok a je v zhode s experimentom. Samozrejme treba poznamenať, že tento pomer sráášne závisí od teploty, pretože pri vyšších teplotách (ako 20 ^{o}C) sa dosť prejavuje prchavosť etanolu (preto vonia a ožrani páchnu), teda nie je potrebné, aby sa odparovala aj voda prítomná v zmesi. No a tak ... Čaves.

A-3.4 Podvodník (opravovala Kika)

Milí podvodníci. Skúsme sa najprv pozrieť na to, čo by videl potápač, keby bola hladina mora úplne kľudná, bez jedinej vlnky. Svetlo sa pri prechode z jedného prostredia do druhého láme podľa vzťahu: $\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{n_2}{n_1}$. Uhol totálneho odrazu pri prechode lúča z opticky hustejšieho prostredia (voda) do redšieho (vzduch) bude : $\sin\alpha = \frac{n_2}{n_1}\sin\beta = \frac{1}{4/3}\sin 90° = \frac{3}{4}$.

Potápač bude v dôsledku totálneho odrazu vidieť dno – čo v prípade, ak je more dosť hlboké znamená tmu. Môžeme si nakresliť, ako to asi bude vyzerať.



$$r_1 = h \cdot tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}h = \frac{1/n}{\sqrt{1-(1/n)^2}}h = \frac{h}{\sqrt{n^2-1}} = 11{,}34 \ metra$$

Takže ak sa potápač pozrie nad seba, bude vidieť svetlý kruh s polomerom 11,34 m.

Ešte treba poriešiť vlnky. Budeme uvažovať, že budú len veľmi málo zvlnené a teda nebudeme musieť počítať s totálnym odrazom v našom svetlom kruhu. Vypuklá časť vlnky nám bude lúče spájať (teda bude fungovať ako spojná šošovka), dutá rozptyľovať (rozptylka). V dôsledku toho potápač bude vo svetlom kruhu sledovať svetlejšie a tmavšie pásy, ktoré sa budú pohybovať jedným smerom.