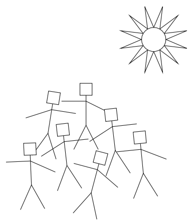
FYZIKÁLNY KOREŠPONDENČNÝ SEMINÁR

vzorové riešenia 2. série
A-kategória (starší)
16.ročník
letný semester
školský rok 2000/2001

FKS, KZDF FMFI UK
Mlynská dolina
842 48 Bratislava
`fks@center.fmph.uniba.sk`
`www.fks.sk`

Všetci dobre počúvajte!



Oznamujeme Vám, že sa blíži leto (síce to tak zatiaľ nevyzerá, ale dlhodobými pozorovaniami a nespočetnými skúmaniami sa zistilo, že je to naozaj tak). Slnko začne svietiť, voda nás bude lákať, vtáčiky začnú spievať, asfalt sa bude topiť...

Dobre to bude potom, ale čo teraz? Nezúfajte, sme tu my a sme pripravení! A teda dosť bolo kockovatenia - je načase zažiť nezažiteľné, vidieť neviditeľné a spoznať nespoznateľné! Jednoducho ide sa na výlet.

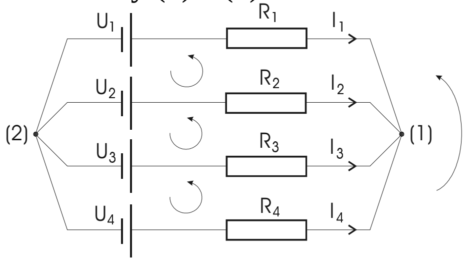
Zraz bude **12.5.2001** o **9:40** (najneskôr 9:50) na **Hlavnej stanici v Bratislave**. Kam pôjdeme? Neprezradíme všetko, ale pevná obuv je nutná. A bude tam skvele!

A-2.1 Ľahký príklad (opravoval Stano)

V schéme na obrázku určite prúdy prechádzajúce jednotlivými odpormi. Napäťové zdroje sú ideálne.

Ako už názov napovedá ide o ľahký príklad. Ľahký je preto, lebo pri jeho riešení netreba nejako špeciálne uvažovať, ale len mechanicky počítať.

Väčšinu z vás napadlo použiť prvé dva Kirchhoffove zákony. Možno už také jasné nebolo, že v obvode sú vlastne len dva uzly (1) a (2).



Tu použijeme prvý zákon (pripomínam, že prúdy, ktoré do uzla vstupujú, by mali mať všetky opačné znamienko, ako tie čo z neho vystupujú). Pri používaní druhého zákona si treba dať pozor na správne určenie znamienka jednotlivých členov. Do obrázka si nakreslíme prúdy s ľubovoľným smerom a k zdrojom si nakreslíme šípky od záporného pólu ku kladnému (môžeme aj opačne, ale potom treba dať pozor, na ktorú stranu rovnice napíšeme príslušné elektromotorické napätia). Potom postupujeme smerom, ktorý sme si určili, po jednotlivých slučkách obvodu (ich počet závisí na tom koľko máme neznámych, teda v našom prípade potrebujeme 4 rovnice, lebo máme 4 neznáme), pričom ak odporom preteká prúd opačným smerom ako postupujeme, píšeme záporné znamienko.

Tak isto postupujeme aj pri napätiach, len teraz berieme do úvahy šípky, ktoré sme si k nim nakreslili. Nakoniec dostaneme

$$I_1 + I_2 + I_3 + I_4 = 0$$

$$\text{slučka A: } U_2 - U_1 = R_2 I_2 - R_1 I_1$$

$$\text{slučka B: } U_3 - U_2 = R_3 I_3 - R_2 I_2$$

$$\text{slučka C: } U_4 - U_3 = R_4 I_4 - R_3 I_3$$

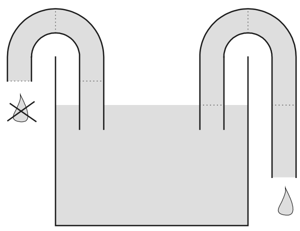
Po vyriešení tejto sústavy dostaneme $I_1 = -\frac{23}{25}$, $I_2 = \frac{1}{25}$, $I_3 = \frac{9}{25}$ a $I_4 = \frac{13}{25}$, kde znamienko mínus znamená, že prúd tečie opačným smerom ako je znázornený na obrázku.

Existuje, ešte jeden spôsob riešenia, ktorý spočíva v riešení štyroch obvodov, pričom každý z nich má zapojený len jeden zdroj (pravdaže každý iný). Po ich vyriešení spočítame všetky prúdy, ktoré nám vyšli pre tú danú vetvu a tým dostaneme výsledok nášho pôvodného obvodu.

A-2.2 Polievka a rezance (opravoval FoX)

Možno si už niekto z vás všimol, že keď si naberiete z polievky s rezancami plnú lyžicu a nejaký ten rezanec vám prevísa cez jej okraj, polievka po ňom vytečie a za chvíľku máte len lyžicu plnú rezancov, bez polievky. Ako je to možné, keď rezance nie sú duté (nie je v nich dierka)?

Ako ste si mnohí všimli, príklady zo života sa riešia oveľa lepšie, keď si spravíte jednoduchý pokus. Neviem prečo niektorí z vás rozoberajú problematiku, a pritom asi ani nevedia čo sú to rezance, ani ako sa jedia. Prvá výstraha: „Robte praktické pokusy!“



Iste všetci poznáte pokus s hadicou a sudom plným vody. Jeden koniec hadice ponoríme do suda a druhý je vonku, pričom je nižšie ako hladina vody v sude. Potom trochu „cucneme“ a voda začne vytekať až kým hladina neklesne na úroveň druhého konca hadice. V prípade, že je druhý koniec vyššie ako hladina, tak to nefunguje. Tiež by nebolo zlé si vyskúšať zobrať pohár plný vody a ponoriť do neho „chlpatý“ špagát, ktorý končí položený na stole. Obrus na stole začne vlhnúť a voda z pohára ubúdať.

Keď vyberieme lyžičku z polievky, tak rezance v nej sú celé mokré – potiahnuté polievkovým filmom (pred chvíľou boli v polievke). Lyžička je plytká, plná polievky a rezance prevísajú hlbšie ako je dno lyžičky. Voda z povrchu prevísajúcich častí rezancov je gravitáciou sťahovaná späť do taniera. Keďže na povrchu rezancov je súvislý film polievky, mal by sa pôsobením gravitácie pretrhnúť. Ale súdržnosť molekúl polievky je veľká a preto sa v kritickom mieste (najvyšší bod rezanca - ohyb na lyžičkovej hrane) film nepretrhne, ale je dopĺňaný polievkou z lyžičky. Pri použití naberačky a dlhých rezancov a nízkej hladine polievky v naberačke už pokus nefunguje, pretože vodný film sa neudrží na celom povrchu rezanca – gravitačná sila pôsobí na obidvoch koncoch a hmoty kvapaliny sú ťahané do taniera a do naberačky.

Neboli zlé ani úvahy o mokrom uvarenom rezanci popretkávanom úzkymi štrbinami, kde voda preteká vo vnútri. Alebo súbor rezancov, ktorý svojim obalom vytvorím rúrku. Tá uľahčí tečenie vody, ktoré je v prípade filmu ťažké v dôsledku viskozity. Kapiláry vytvorené viacerými rezancami sú širšie a taký veľký odpor tečeniu sa nekladie.

A-2.3 Paintball (opravovala Zuzi)

V hre paintball sa používajú zbrane na stlačený CO_2, ktoré vystreľujú guličky z mäkkého plastu naplnené mazľavou tekutinou. Náplň CO_2 je natlakovaná v zásobnej nádobe pod tlakom 50 atmosfér. Hlaveň má dĺžku 30 cm a priemer 2 cm. Gulička váži 10 gramov a komora, z ktorej sa plyn uvoľňuje pri každom výstrele má objem 10 cm^3. Zrátajte, akou rýchlosťou opúšťa náboj hlaveň.

Ahojte! Dúfam, že počas veľkonočných sviatkov ste si neublížili viac, ako niektorí moji priatelia na paintballe a že ste v dobrej nálade pripravení prečítať si čo-to aj o tom, ako to všetko je... Začnime teda po poriadku. Myslím, že táto úloha sa mnohým z vás javila ako veľmi triviálna, napriek tomu si ale dovoľujem tvrdiť, že hlbšie sa nad tým zamyslel len málokto z vás. Ako ste si iste všetci uvedomili, gulička potrebuje získať energiu, ktorú jej, samozrejme, odovzdá CO_2, až doposiaľ uväznený v komore. Otázka však znie, aký dej môže-me uvažovať pri jeho rozpínaní. Mnohí z vás veľmi rozumne argumentovali, prečo by to mal byť adiabatický dej. Prečo? Všetko sa to deje veľmi rýchlo a plyn si nestíha vymieňať teplo s okolím. S tým zatiaľ celkom súhlasím, poďme si teda spočítať, ako to v tomto prípade vlastne vyzerá.

Plyn pri adiabatickej expanzii vykoná prácu

$$W = -\frac{m}{M_m}.c_V.(T_2 - T_1) \tag{1}$$

Po uvážení rovnice adiabaty $p_1V_1^{\kappa} = p_2V_2^{\kappa}$, resp. $T_1V_1^{\kappa-1} = T_2V_2^{\kappa-1}$ (po využití stavovej rovnice ideálneho plynu) a vzťahu pre Poissonovu konštantu $\kappa = c_p / c_v = (c_v + R)/c_v$, z čoho máme $c_V = R/(\kappa - 1)$, kde R je plynová konštanta a následnom dosadení do (1) dostávame:

$$W = \frac{m}{M_m} R.T_1 \frac{1 - \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\kappa-1}}{\kappa - 1}.$$

Ďalej keďže $\frac{m}{M_m}.R.T_1 = p_1.V_1$, máme výsledný vzťah pre prácu vykonanú plynom

$$W = \frac{p_1.V_1}{\kappa - 1}\left(1 - \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{\kappa-1}\right), \tag{2}$$

kde V_2 je súčet objemov komory a hlavne a κ je pre CO_2 1,3. (Celý tento problém sa dal veľmi elegantne vyriešiť pomocou integrálu $W = \int_{V_1}^{V_2} p.dV = \int_{V_1}^{V_2} p_1.V_1^{\kappa}.V^{-\kappa}.dV$) Táto energia sa okrem toho, že sa spotrebuje na kinetickú energiu guličky, spotrebuje aj na to, že gulička musí z hlavne vytláčať vzduch, ktorý v nej je. Čiže od W musíme odčítať výraz $p_a.\Delta V$, kde p_a je atmosferický tlak a ΔV je v našom prípade objem hlavne. Potom už len rozdiel týchto energií položíme rovný $mv^2/2$, z čoho pre rýchlosť po dosadení zadaných veličín dostávame hodnotu približne 123m.s^{-1}.

Tento problém sa dal veľmi sympaticky riešiť aj s využitím toho, že poznáme silu a vzťah medzi silou a energiou. Keď totiž silu zapíšeme ako

$$F = p.S = S.\left[p_1.\frac{V_1^{\kappa}}{(V_1 + S.x)^{\kappa}} - p_a\right] \tag{3}$$

a preintegrujeme ju cez x od 0 po dĺžku hlavne, dostaneme energiu odovzdanú guličke.

Je tu však jeden závažný argument, ktorý stojí proti použitiu adiabatickej závislosti. Keď totiž počítame s tým, že na začiatku je teplota v komore okolo 20°C, a spočítame si výslednú teplotu CO_2 po expanzii, dostávame hodnotu -128°C, čo je veľmi máličko, a realite to určite nezodpovedá. Poďme sa teda pozrieť na to, prečo by to adiabatický dej byť nemal. Treba si uvedomiť, že hlaveň našej zbrane je kovová, a teda môže dostatočne dobre viesť teplo. To ale znamená, že aj pri dosť rýchlej expanzii by CO_2 mohlo stíhať prijímať teplo z okolia a udržovať tak svoju teplotu na zhruba konštantnej hodnote.

V istom priblížení by sme teda mohli uvažovať o izotermickej reakcii. Podobne ako v prípade adiabaty teda môžeme spočítať prácu, ktorú vykoná plyn pri expanzii. Tentokrát treba riešiť integrál $W = \int_{V_1}^{V_2} p_1.V_1.V^{-1} dV = p_1.V_1.\ln\frac{V_2}{V_1}$. Opäť treba uvážiť, že okrem rozbiehania guličky musíme aj vytlačiť vzduch z hlavne a po zrátaní rýchlosti dostávame hodnotu približne 148 $m.s^{-1}$. Pravda bude zrejme niekde medzi tým, osobne si ale myslím, že bližšie k izotermickému deju.

Iste, nie každý z vás vedel riešiť integrály, a tak sa možno úlohy zľakol. Ako sme však mali možnosť vidieť, tento príklad sa dal riešiť aj bez ich použitia. A pokiaľ ste to naozaj pokladali za nevyhnutné, tomuto spôsobu sa dalo vyhnúť aj vyrátaním akejsi strednej sily, alebo zrýchlenia. V tomto mieste mi nedá, aby som nepochválila Kuba Závodného, ktorý si dal tú prácu a vyrátal zrýchlenie v každom milimetri hlavne. Využijeme, že $F = p.S$, pričom pri izotermickom deji $p.V = konšt.$, čiže $F = p_1.V_1.S.V^{-1} - p_a.S = m.a$, pričom za V dosadíme výraz $V_1 + S.x$. Potom si zrátame priemerné zrýchlenie a aproximujeme pohyb guličky ako rovnomerne zrýchlený, takže výslednú rýchlosť ľahko vyjadríme ako $\sqrt{2.l.a}$, kde l je dĺžka hlavne. Tento spôsob však dá veľmi malú hodnotu rýchlosti. Je to spôsobené tým, že v prvej povedzme tretine dráhy odovzdá plyn väčšinu energie, a potom už guličku príliš nezrýchľuje. Malé hodnoty zrýchlení na dlhom úseku tak spôsobia celkovo nízku hodnotu priemeru, napriek tomu, že loptička tieto zrýchlenia získané na krátkom úseku na začiatku úspešne využíva. (Dôkazom je, že rýchlosť loptičky v prvej tretine veľmi ľahko zrátame (ak vypočítame vyššie uvedený integrál), a už vtedy má loptička rýchlosť 117 $m.s^{-1}$). Myslím si, že v tomto smere je schodnejšia cesta zrátať si silu v určitých úsekoch (povedzme v každej štvrtine dráhy), a potom urobiť priemer z krajných hodnôt sily na danom úseku.

Pri týchto výpočtoch sa veľmi rýchlo ukáže, že zatiaľ čo v prvej štvrtine dráhy sa pôsobiaca sila zmenila z 1555 N na 441 N, v strede je 246 N a na konci 120 N. To znamená, že ak zoberieme priemernú silu v celej druhej polovici dráhy (a prenásobíme ju dĺžkou tohoto úseku, čím získame energiu odovzdanú guličke), urobíme veľmi malú chybu, zatiaľ čo prvú štvrtinu by sa patrilo rozdeliť si ešte aspoň na polovicu. Každopádne, ak sme si rozdelili celú dĺžku hlavne len na štvrtinové úseky, a spočítali energiu získanú z jednotlivých úsekov, výsledok bol 127 J (oproti 109 J získaným integrovaním), a výsledná rýchlosť 159 $m.s^{-1}$. A pri rozdelení prvej štvrtiny ešte na polovice (zistíme, že už v prvej osmine dráhy klesla sila na menej ako polovicu svojej pôvodnej hodnoty) dostávame výslednú rýchlosť 152 $m.s^{-1}$, čo je mimochodom bližšie k realite, ako keď ste mnohí zabudli uvažovať vytláčanie vzduchu z hlavne. Zdá sa, že výsledná hodnota sa nám už rapídne nemení, takže by asi nemalo nejaký veľký význam deliť úseky ešte na omnoho menšie.

To samozrejme ešte nie je úplne všetko. Kto paintball hrá vie, že rýchlosť náboja pri ústí hlavne je ohraničená pravidlami na 90 m.s^{-1} a náš výsledok túto hodnotu prekračuje. Spôsobené je to tým, že sme vôbec neuvažovali trenie, ktoré v týchto rýchlostiach už nie je zanedbateľné, ale podľa môjho názoru ešte do väčšej miery inou vecou. V tomto prípade sa jedná o nevratný dej v plyne, ktorý sa nedá popísať stavovou rovnicou. Zjednodušene by sa to dalo vysvetliť asi tak, že keďže náboj sa pohybuje veľmi rýchlo, pomalšie molekuly plynu, ktoré naňho tlačia „zozadu“, ho nestíhajú dobehnúť a opačne molekuly vzduchu z vonkajšej strany hlavne ho brzdia výrazne viac. Skutočný rozdiel tlakov na oboch stranách náboja tak môže byť ďaleko menší ako ten, ktorý sme vyrátali. Toto všetko sem píšem samozrejme len na vysvetlenie toho, prečo nám vyšli hodnoty, ktoré nie sú celkom reálne.

Myslím, že ak ste sa naozaj dočítali až sem, ste rovnako vyčerpaní ako ja. Takže vám prajem úspešné strávenie tohto vzoráku, príjemný deň, a ak naberiete po tomto výpočte odvahu ísť si zahrať paintball, tak veľa šťastia ;) a ja idem konečne spať...

A-2.4 Vesmírne hodiny (opravoval Martin Plesch)

Ako je známe, v poslednom čase sa začali z rôznych dôvodov oneskorovať viaceré vesmírne projekty. Mocní tohoto sveta sa uzhodli na tom, že na vine sú kozmonauti a rozhodli sa pre nich vybudovať vo vesmíre velikánske hodiny, aby im stále pripomínali presný čas. Hodiny budú klasické ručičkové, s hodinovou a minútovou ručičkou, ktoré budú vyrobené z medi. Aká je maximálna možná veľkosť hodín, aby mohli fungovať?

Výborne! Na moje veľké prekvapenie a potešenie mnoho z vás prišlo na to, v čom bola finta, a dokázali ste nájsť správne riešenie. Teda riešenie, ktoré reálne obmedzilo veľkosť hodín na hodnoty, ktoré sa aj obyčajnému smrteľníkovi zdajú normálne. Ale nepredbiehajme, zoberme si to pekne po poradí.

O nápady vo vašich riešeniach rozhodne nebola núdza. Jedným z prvých bola teória relativity. Vieme predsa všetci, že nič na tomto svete (a dokonca možno ani mimo neho) sa nemôže pohybovať rýchlejšie ako svetlo. Ak si označíme rýchlosť svetla c, polomer ručičky R a jej uhlovú rýchlosť $\omega = 2\pi / T$, potom musí platiť obmedzenie

$$R\omega = \frac{2\pi R}{T} < c\ ,$$

čo nám po dosadení čísel pre minútovú ručičku ($c = 3.10^8 ms^{-1}, T = 3600 s$) dáva horný odhad pre polomer ručičky približne 1,7.10^{11} metra. To je **naozaj veľa**.

Ďalšie, kurióznejšie nápady hovorili o tom, že príliš veľké hodiny by mohli skolabovať sami do seba pod svojou gravitačnou silou, že na Zemi nie je dostatok medi na vytvorenie príliš veľkých hodín, že hodiny sa nezmestia do slnečnej sústavy a podobne. Každý z nich má niečo do seba. Ale obmedzenia, ktoré nám dávajú, sú nejasne formulované a ťažko spočítateľné.

Inak je to s problémom, na ktorý ste mnohí prišli: odstredivá sila. Ak sa ručička otáča okolo svojej osi, pôsobí na ňu predsa odstredivá sila! A keď bude táto sila príliš veľká, môže spôsobiť roztrhnutie ručičky.

Tak sa poďme na to pozrieť podrobnejšie. Predstavme si ručičku v tvare valca (zatiaľ, neskôr sa k optimálnejším tvarom ešte vrátime) o priereze S. Okrem toho nech je hustota medi ρ a medza pevnosti v ťahu σ. Hmotnosť a odstredivá sila takejto ručičky bude

$$m = S.R.\rho, \qquad F = m\omega^2 \frac{R}{2} = SR^2 \rho \frac{2\pi}{T^2},$$

pričom tá polovica je vo vzorci preto, lebo ťažisko valca je v polovici jeho výšky, na čo mnohí z vás pozabudli.

Táto odstredivá sila nemôže byť väčšia ako medzná sila, ktorú ešte ručička vydrží, a tá je daná rovnicou $F = \sigma S$. Po dosadení tabuľkových hodnôt (predpokladáme použitie kvalitnej medi) dostávame

$$\sigma S \geq SR^2 \rho \frac{2\pi}{T^2}$$

$$R \leq \sqrt{\sigma \frac{T^2}{2\pi\rho}} \approx 180 km$$

To už je, pochopiteľne, oveľa reálnejšie obmedzenie. Hodinová ručička by mohla byť o niečo dlhšia, ale kto to kedy videl? Samozrejme sme predpokladali aj to, že minútová ručička sa bude pohybovať rovnomerne a nie trhane každú minútu. To by spôsobilo oveľa drastickejšie obmedzenie, keďže v priebehu svojho krátkeho pohybu by sa musela ručička pohybovať oveľa rýchlejšie.

Lenže… a sem sa dostal v úvahách iba jediný riešiteľ… čo keď nepoužijem valec? Čo keď si postavím ručičku v tvare kužeľa? Zmení sa niečo? Áno. Keď sa pozrieme na rovnicu pre odstredivú silu, figuruje v nej hmotnosť celej ručičky a vzdialenosť ťažiska od stredu. Pri rovnakej dĺžke bude mať kužeľová ručička trikrát menšiu hmotnosť a ťažisko o polovicu bližšie k osi otáčania. Limitný polomer sa mi takto zväčší $\sqrt{6}$ krát, čo mi dá približne 441 km. Je to ale koniec? Neexistuje ešte lepší tvar, ktorý by nám umožnil stavať ešte dlhšie ručičky? Veru existuje. Dokonca ich je nekonečne veľa. Ak odhliadneme od zložitých konštrukcií rúrkových ručičiek a sústredíme sa len na tie jednoduché, máme veľa možností. Predstavme si ručičku, ktorej prierez (hrúbka) sa bude meniť v závislosti od polomeru podľa vzorca

$$S(r) = S_0 e^{-\frac{r^2}{2R^2}},$$

kde R je ľubovoľná konštanta, pre ktorú musí platiť $R \leq \sqrt{\sigma / (\rho\omega^2)} \approx 129 km$. (Pochopiteľne, po správnosti by som sem mal napísať, odkiaľ som dostal práve tento vzorec. Na to existuje niekoľko možností. Buď sa riešenie uhádne, nejako odhadne, alebo sa riešia nie príliš zložité diferenciálne rovnice, ktoré nám ho po istom nátlaku prezradia. Toto ale nie je účelom vzorového riešenia, tu sa snažím len ukázať, že existujú optimálnejšie riešenia ako bežné geometrické tvary typu valca či kužeľa). Takáto ručička by vyzerala približne ako Eiffelova veža idúca až kdesi do nebies (alebo kužeľ, ktorý sa zužuje rýchlejšie ako lineárne) a obmedzenie na konštantu R je potrebné preto, aby sa ručička dostatočne rýchlo zužovala a nepretrhla sa nám kdesi v polovici. Pri takto postavenej ručičke nám pretrhnutie nehrozí.

Lenže, na druhej strane, takáto ručička by sa ťažko realizovala. Ak si predstavíme, že jej najtenšia časť (úplný koniec) by bola široká len približne 1 mm, ručička dlhá 1000 km by musela mať pri osi hrúbku 3300 km, teda už by bola širšia ako je jej dĺžka. No a sami uznáte, že vyrábať ručičky tenšie ako 1 mm nemá veľký význam, lebo by ich asi nebolo vidieť z väčšej vzdialenosti.

Takže záver je jasný: Nech budeme hodiny stavať akokoľvek, ťažko sa nám podarí prekročiť s ich polomerom hranicu okolo 1000 km. Na presnejšie určenie hranice by bolo potrebné presnejšie zadanie príkladu.