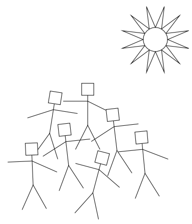
FYZIKÁLNY KOREŠPONDENČNÝ SEMINÁR

vzorové riešenia 2. série
B-kategória (mladší)
16.ročník
letný semester
školský rok 2000/2001

FKS, KZDF FMFI UK
Mlynská dolina
842 48 Bratislava
fks@center.fmph.uniba.sk
www.fks.sk

Všetci dobre počúvajte!



Oznamujeme Vám, že sa blíži leto (síce to tak zatiaľ nevyzerá, ale dlhodobými pozorovaniami a nespočetnými skúmaniami sa zistilo, že je to naozaj tak). Slnko začne svietiť, voda nás bude lákať, vtáčiky začnú spievať, asfalt sa bude topiť...

Dobre to bude potom, ale čo teraz? Nezúfajte, sme tu my a sme pripravení! A teda dosť bolo kockovatenia - je načase zažiť nezažiteľné, vidieť neviditeľné a spoznať nespoznateľné! Jednoducho ide sa na výlet.

Zraz bude **12.5.2001** o **9:40** (najneskôr 9:50) na **Hlavnej stanici v Bratislave**. Kam pôjdeme? Neprezradíme všetko, ale pevná obuv je nutná. A bude tam skvele!

B-2.1 Lenivec (opravoval Nagi)

Miro, známy to lenivec, doma upratuje musí zrolovať koberec vo svojej izbe. Akú minimálnu prácu musí na to vynaložiť? Koberec má rozmery 3,5 krát 4,5 metra a váži 37 kg. Jeho hrúbka je 17 mm a môžete predpokladať, že sa ohýba dostatočne ľahko.

Zdravím všetkých lenivcov a optimalizátorov, ktorí kedy stáčali koberce. Žiaľ, veľmi veľa z vás bolo natoľko lenivých, že len bezducho dosadzovali do nejakých vzorcov a počítali tak, koľko práce vykonajú, ak koberec chytia za koniec a zodvihnú a podobne.

Správny prístup je pozrieť sa, na čo sa vlastne naša práca použije. Keby sme mali tvrdý koberec, musíme ho pracne ohýbať. Náš je však "dokonale" ohybný. Keby nám pri stáčaní prekážalo valivé trenie, stálo by za zváženie. Niektorí sa vydali aj týmto smerom a zabudli na dôležitejšie veci. My sa však s trením trápiť nebudeme. Bolo by ťažké vypočítať to, pretože odporová sila proti stáčaniu valením sa mení priamo úmerne s dĺžkou natočeného koberca, ale jeho polomer s odmocninou tejto dĺžky. A vôbec, potom by sme museli uvažovať už aj stláčanie koberca a to slušne zrátať zatiaľ nevieme. Preto koberec – malú rolku budeme spredu tlačiť a ona sa nám bude natáčať bez trenia....

Koberec na začiatku leží na zemi a ťažisko má vo výške rovnej polovici jeho hrúbky. To si niektorí neuvedomili. Keď ho zrolujeme, stane sa z neho „valec“, takže ťažisko bude vo výške jeho polomeru. Teda koberec sme vlastne „zodvihli“ a sem odišla naša práca. Tú vypočítame jednoducho ako rozdiel potenciálnych energií koberca po a pred stočením.

Potenciálna energia na začiatku bola $E_0=mgd/2$, kde d je hrúbka koberca.

Po tesnom stočení sa koberec veľmi podobá na valec, preto si jeho polomer môžeme vypočítať zo zachovania objemu: $V=abd=\pi r^2 b$. Výhodnejšie je brať za výšku valca dlhšiu stranu b (teda stáčať tú kratšiu), lebo dostaneme menší polomer výsledného valca, a teda menšiu výslednú potenciálnu energiu. Tá bude potom $E_1=mgr$. Naša minimálna práca, potrebná na zrolovanie koberca bude:

$$W = E_1 - E_2 = mg\left(\sqrt{ad/\pi} - d/2\right),$$

$$W \approx 37.9{,}81.\left(\sqrt{3{,}5.0{,}017/3{,}14} - 0{,}017/2\right) \approx 48 \text{ J}.$$

Iba toto sme od Vás chceli. A nechoďte bosí po koberci!

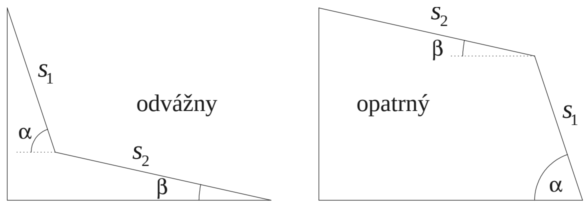
B-2.2 Lyžiar (opravovala Saša)

"Konečne sneh a zima!" Povedali si dvaja vedúci FKS a vybrali sa na lyžovačku. Keď konečne stáli šťastne na vrcholku hory a chystali sa zviesť do dediny, napadla ich myšlienka: "Dáme si preteky"! Odvážny pôjde rovno dole do doliny a potom miernym svahom po doline až dole do dediny. Opatrný to spraví opačne, pôjde najskôr miernym svahom po hrebeni kopca a nakoniec strmo do dediny (výškové profily dráhy oboch lyžiarov sú na obrázku). Kto príde prvý, platí čaj! Predpokladajte, že obaja vedúci sú približne rovnako ťažkí, majú rovnaké vybavenie a dráhy, po ktorých pôjdu sú rovnako dlhé a s rovnakým trením. Kto a prečo bude platiť čaj?

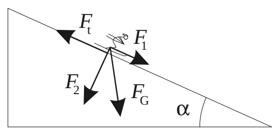
Aj keď by sa zdalo, že zima nás už opustila (aspoň podľa dátumu v kalendári ☺), nie je to celkom tak. Na zimu nám predsa len nedá zabudnúť príklad o dvoch vedúcich FKS, sťa by lyžiarov...tak ktorý že to bude platiť čaj?

Odvážny lyžiar sa spustí najprv po strmom svahu, a teda pri prechode na mierny svah v doline bude mať značnú rýchlosť, ktorú potom využije na miernom svahu. Opatrný lyžiar sa najprv pomaly rozbieha na miernom svahu a potom síce získa na strmom briežku rýchlosť, ale tú už nevyužije. Preto sa zdá, že odvážny lyžiar dôjde do dediny skôr. Ukážeme, že naozaj je výhodnejšie rozbehnúť sa na začiatku, ako na konci (tým bude naša celková priemerná rýchlosť väčšia, a teda čas, za ktorý prejdeme dráhu zjazdovky bude menší. A o to ide...).

Urobme si zjednodušený model, kde strmý kopec bude naklonená rovina pod uhlom α dĺžky s_1 a mierny svah bude naklonená rovina pod uhlom β s dĺžkou s_2, pričom na naklonených rovinách budú lyžiari konať rovnomerne zrýchlený pohyb.



Najprv sa poďme pozrieť na to, aké sily pôsobia na lyžiara na naklonenej rovine. Tiažová sila F_G sa dá rozložiť na dve zložky. V smere pohybu lyžiara na silu $F_1=F_G.\sin\alpha$, a na tlakovú silu na podložku $F_2=F_G.\cos\alpha$. Teda proti smeru pohybu lyžiara pôsobí trecia sila veľkosti $F_t=f.F_G.\cos\alpha$, kde f je koeficient trenia medzi lyžami lyžiarov a snehom.



Zrýchlenie na strmom úseku teda bude $a_1=g.(\sin\alpha - f.\cos\alpha)$, podobne na miernom úseku bude $a_2=g.(\sin\beta - f.\cos\beta)$. Je jasné, že $a_1 > a_2$.

Odvážny sa spustí sa po strmom svahu a prejde dráhu s_1 za čas t_{11}. Platí $s_1 = a_1 t_{11}^2 / 2$, a teda $t_{11} = \sqrt{2s_1 / a_1}$. Na konci strmého svahu teda lyžiar nadobudol rýchlosť $v_{11} = t_{11} a_1$, a teda na začiatku mierneho svahu má už začiatočnú rýchlosť a prejde ho za čas t_{12}. Teda platí: $s_2 = v_{11} t_{12} + a_2 t_{12}^2 / 2$. Vyjadrením času t_{12} dostávame:

$$t_{12} = \frac{1}{a_2}\left[-\sqrt{2s_1 a_1} \pm \sqrt{2s_1 a_1 + 2s_2 a_2}\right]$$

Do úvahy berieme len kladnú hodnotu (čas) a teda pre výsledný čas zjazdu odvážneho lyžiara dostávame.

$$t_1 = \sqrt{2s_1 / a_1} + \frac{1}{a_2}\left[\sqrt{2s_1 a_1 + 2s_2 a_2} - \sqrt{2s_1 a_1}\right]$$

Analogicky dostávame pre výsledný čas opatrného lyžiara vzťah:

$$t_2 = \sqrt{2s_2 / a_2} + \frac{1}{a_1}\left[\sqrt{2s_2 a_2 + 2s_1 a_1} - \sqrt{2s_2 a_2}\right]$$

Porovnáme tieto časy. Pre zjednodušenie výpočtov si označme $A = \sqrt{2s_2 a_2 + 2s_1 a_1}$ a $B = a_1 - a_2$. Chceme ukázať, že $t_1 < t_2$. Teda že platí nerovnosť:

$$\frac{1}{a_2}\left(A - B\sqrt{2s_1 / a_1}\right) < \frac{1}{a_1}\left(A + B\sqrt{2s_2 / a_2}\right),$$

$$Aa_1 - B\sqrt{2s_1 a_1} < Aa_2 + B\sqrt{2s_2 a_2},$$

$$BA < B\left(\sqrt{2s_1 a_1} + \sqrt{2s_2 a_2}\right).$$

Keďže B je zrejme kladné a pre kladné x a y platí $\sqrt{x} + \sqrt{y} > \sqrt{x + y}$, táto nerovnosť bude v našom prípade splnená.

Teda čas, za ktorý prejde trať odvážny lyžiar je kratší, ako čas opatrného lyžiara. Z nášho zjednodušeného modelu vidíme, že je naozaj výhodnejšie nabrať rýchlosť na začiatku ako na konci. Takže do dediny dôjde skôr a čaj bude platiť ODVÁŽNY lyžiar - vedúci.

Ešte uvediem zopár javov, ktoré môžu ovplyvniť pohyb lyžiarov.

Odpor vzduchu. Ten sa zväčšuje so zväčšujúcou rýchlosťou a teda, aj keby bol strmý svah veľmi dlhý, rýchlosť lyžiara sa bude zvyšovať len po nejakú maximálnu hodnotu, rovnako ako na miernom svahu. Aj tak však ostáva pravdou, že ten „rozbeh“ odvážnemu natoľko prospeje, že do dediny dôjde skôr.

Ďalším je odstredivá (v prípade opatreného) a dostredivá (v prípade odvážneho) sila, ktorá pôsobí na lyžiarov pri prechode z mierneho do strmého svahu a naopak. Tá spôsobí väčšie trenie odvážneho lyžiara a tým ho spomalí. Keďže v našom prípade tento efekt nezohrá príliš dôležitú úlohu, v príklade ho zanedbávame, ale oceňujem všetkých, ktorí si na to v riešení spomenuli.

Keďže sme si týmto príkladom splnili posledné podlžnosti voči zime, dúfajme, že nás už naozaj opustí, aby sme si mohli vychutnať prichádzajúcu sviežu jar.

B-2.3 Kto je najlepší (opravovala Lucia)

Túžba po prvenstve priviedla jedného dňa Hakkinena k tomu, aby vyzval Schumachera na súkromné preteky „len Ty a ja“. Dohoda bola jasná: rovnaké autá, s rovnakými karosériami, hmotnosťami a kolesami (t.j. rovnaká hmotnosť a moment zotrvačnosti). Deň pred odhalením pravdy však Schumacher nemohol zaspať, a rozhodol sa, že sa poistí. Kolesá na svojom tátošovi teda vymenil za rovnako ťažké a s rovnakým momentom zotrvačnosti, ale väčším polomerom. Pomôže mu tento nie práve najférovejší ťah?

Čaute fandovia! Takže Schumacher na svojom ťahu asi zarobil (aspoň teda fiktívne). A tí, ktorí tvrdili, že mu výmena kolies pomôže, mali pravdu. Poďme si teraz vysvetliť prečo.

Na úlohu sa dá pozerať z viacerých pohľadov. Skúsme to teda z pohľadu energií. Keď sa teleso *otáča* a *pohybuje*, jeho celková kinetická energia (súhrn energie otáčavého a posuvného pohybu) je, ako už iste tušíte, $E = J\omega^2/2 + mv^2/2$. Veľa z vás mi písalo iba o energii otáčavého pohybu ako o celkovej kinetickej energii, to však pri pohybe aj smerom vpred nie je správne.

Keď už teraz vieme správne vyjadrenie pre energiu, môžeme sa zamyslieť, ako to bude vyzerať s rýchlosťami Schumacherových a Hakkinenových kolies. Predpokladajme, že pri rovnakej konštrukcii oboch áut sa kinetické energie kolies rovnajú. Platí teda:

$$\frac{1}{2}J\omega_h^2 + \frac{1}{2}mv_h^2 = \frac{1}{2}J\omega_s^2 + \frac{1}{2}mv_s^2\,,$$

kde index h patrí Hakkinenovmu kolesu a s Schumacherovmu, moment zotrvačnosti J a hmotnosť m sú u oboch rovnaké. Otázka, ktorá nás zaujíma je, ktorý z favoritov pôjde *väčšou rýchlosťou* (a teda bude v cieli skôr). Po dosadení vzťahu pre uhlovú rýchlosť $\omega = v/r$ do tejto rovnice a následnej jednoduchej úprave dostaneme :

$$v_s = v_h\sqrt{\frac{\frac{J}{r_h^2}+m}{\frac{J}{r_s^2}+m}}\,,$$

pričom $r_h < r_s$, pretože Schumacher má polomer kolies väčší. Odtiaľ $r_h^2 < r_s^2$, teda $J/r_h^2 > J/r_s^2$, a teda aj $J/r_h^2+m > J/r_s^2+m$. Preto tiež $v_s > v_h$, čo znamená, že Schumacher sa pohybuje väčšou rýchlosťou.

Bez trecej sily teda Schumacher víťazí. Ale čo môže spôsobiť trenie? Keďže treciu silu (sila, ktorá pôsobí proti pohybu) vyjadríme ako $F_t = \mu.F_n/r$, platí, že čím väčší majú kolesá polomer, tým je trecia sila menšia. Čiže opäť hrajú karty v prospech Schumachera.

Niektorí ste mi písali aj o aerodynamike vozidiel a vplyvoch napr. väčšej plochy pri zväčšení kolies na odporovú silu vzduchu. Tieto a podobné úvahy boli tiež na mieste.. Takže celkovo, bodíky šli jednak za úvahy okolo porovnania rýchlostí formúl a vplyvu trecej sily, ale aj za dobré úvahy okolo iných vplyvov na celkovú rýchlosť. Majte sa krásne a nezabudnite fandiť tým svojim!

B-2.4 Mravec (opravoval Matúš)

Ferdo mravec sa vybral na romantický splav pozdĺž Hrona v zápalkovej škatuľke. Čo sa však stalo – nestalo, na dne sa mu spravila dierka, do kanojky mu začala vtekať voda, až sa úplne potopila. V tomto okamihu znamenala pre Ferda schopnosť plávať otázku života a smrti. Koľko času od vzniku diery teda Ferdovi zostáva, aby sa naučil plávať? Dierka na podlahe má priemer 1 mm. Ostatné potrebné rozmery a hmotnosti si zmerajte alebo odhadnite.

Niektorí ste si všimli, niektorí nie, že povrchové napätie vody je pre túto úlohu rozhodujúcou veličinou. Najprv však uvediem teoretický výpočet bez ohľadu na jeho vplyv.

Po položení na vodnú hladinu sa loďka s Ferdom na palube ponorí o istú hĺbku h. Túto vypočítame na základe porovnania tiažovej a vztlakovej sily, ktoré pôsobia na loďku. Ak označíme hmotnosť loďky m, jej rozmery a (dĺžka), b (šírka), c (výška) a hustotu vody ρ_0, dostaneme spomínaným porovnaním $F_{vz} = G$

$$abh\rho_0 = mg \quad \Rightarrow \quad h = \frac{mg}{ab\rho_0}.$$

Číselné hodnoty veličín sú m=4 g, a=5 cm, b=3,5 cm, c=1,2 cm, ρ_0 =1000 kg.m^{-3}, dostaneme h=2,3 mm. Pripomínam, že výpočet hmotnosti loďky m pomocou merania jej rozmerov a použitia tabuľkovej hustoty papiera nie je z môjho pohľadu príliš efektívny – veľa počítania a aj tak dostanete nepresný výsledok. Pri pohľade na krabičku je totiž jasné, že niektoré steny sú dvojité (to uvážil málokto), bolo použité trochu lepidla a podobne. Preto je jednoduché riešenie krabičku odvážiť aj riešením najlepším.

Tento začiatočný ponor loďky je dôležitý, pretože určuje rozdiel výšky hladiny vody v loďke a mimo nej. Tento ostane po celý čas rovnaký. S ohľadom na Archimedov zákon môžeme totiž povedať: „Ak do loďky nejaká voda pritečie, jej hmotnosť príslušne vzrastie a vďaka tomu musí vzrásť aj ponor loďky. Ponor však podľa odvodeného vzťahu vzrastie práve o toľko, aká výška vody v loďke pribudla a spomínaný rozdiel výšok hladín sa nezmení. Howgh.“ Sedliacky povedané, keďže do loďky nateká tá istá voda ako je všade okolo, nemôže to veľa spraviť.

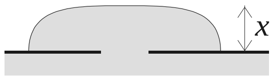
Keďže poznáme rozdiel hladín, pomocou Toricelliho vzorca $v = \sqrt{2hg}$ ľahko vypočítame rýchlosť vtekajúcej vody. Číselná hodnota pre vypočítané h je v = 0,21 ms^{-1}. Veľkosť prietoku vody (objem vody za čas) dierkou s obsahom S je $Q = Sv$, kde $S = \pi d^2/4$, d je známy priemer dierky. Tento prietok bude konštantný (veď S aj v sú), ľahko spočítame čas T za ktorý natečie do loďky objem vody V potrebný na jej potopenie. Tento objem V je $V = ab(c-h)$. Veľkosť c je zmenšená o h preto, lebo keď je vnútri loďky takáto výška vody, vonkajšia hladina je na úrovni okraja loďky a za malú chvíľku sa preleje dovnútra. To bude Ferdov koniec. Pre čas T musí platiť $QT = V$, teda

$$\frac{1}{4} Tv\pi d^2 = ab(c-h).$$

Toto je hľadaný čas potopenia loďky, po dosadení dostaneme T = 110 s. Po necelých dvoch minútach je s Ferdom koniec. Ale… Naozaj?

Vráťme sa k povrchovému napätiu, aké budú jeho dôsledky na potápanie? Zo začiatku bude ponor loďky menší, lebo kým voda nezmáča steny loďky, časť vzniknuvších síl pôsobí nahor, proti jej tiaži. Toto sa zmení po niekoľkých minútach, kedy papierová loďka navlhne a voda už jej steny zmáča. Ponor sa ustáli na hodnote blízkej teoretickej.

Problémom bude však aj samotné vtekanie vody do loďky. Na obrázku je znázornená kvapka vody, ktorá sa vytvorí v jej vnútri vďaka nedokonalej zmáčavosti papiera vodou. Pri pohľade na túto kvapku vidíme, že jej výška x je porovnateľná (prípadne, závisí od prevedenia experimentu, aj vyššia) ako výškový rozdiel medzi hladinou vody okolo loďky a otvorom na jej dne. Spomínanú výšku môžeme odhadnúť pomocou kapilárneho tlaku zodpovedajúceho polomeru guľovej kvapky x (na okrajoch je naša kvapka podobná guli), ten je $p = 2\sigma/x$. Ak tento porovnáme s hydrostatickým tlakom vodného stĺpca výšky x ($p = x\rho_0 g$), dostaneme $x = \sqrt{2\sigma/(\rho_0 g)}$, číselne x= 3 mm. Táto kvapka pôsobí tlakom proti vtekajúcej vode a vďaka jej výške je tento tlak väčší než ten, ktorý núti vodu vtekať. Experiment toto potvrdzuje, loďka ponorená 5 hodín ostala na hladine s minimom vody (spomínanou kvapkou) vo vnútri. Jej ponor síce rástol, to však bolo spôsobené iba postupným nasávaním vody papierom, s čím je prirodzene spojený nárast hmotnosti loďky. Definitívne klesla po približne dni zúfalého boja. Ferdo teda nemusí mať obavy, diera v dne sa sama "zacelí" a ak usilovný mravec príliš nepriberie, môže sa spokojne plaviť ďalej.



Našlo sa niekoľko odlišných teórií zdôvodňujúcich, prečo sa vode nechce do loďky. Väčšinou však neboli správne. Dôvod, že loďka je príliš ľahká (papier má malú hustotu) neobstojí, pretože tak, ako je vypočítané vyššie, aj ľahká loďka má istý ponor. Ak by nemala, nenašli by sme silu, ktorá by ju držala na hladine. Zdôvodňovanie tlakom vzduchu, ktorý nedovolí vode stúpať cez dierku taktiež nie je správne, pretože ten istý tlak vzduchu pôsobí aj na hladinu okolo loďky. Toto sa prenáša (Pascalov zákon) kvapalinou, v ktorej je vlastne všade tlak zvýšený o atmosferický tlak. Jeho vplyvy sa teda navzájom vyrušia.

Na záver pár slov k môjmu hodnoteniu úlohy. Teoretické výpočty s upozornením na nebezpečenstvo povrchového napätia som hodnotil plným počtom bodov. Rovnako dobre hodnotený mohol byť aj experimentálny prístup. Nesmel však chýbať dobrý popis experimentu (aj taká dierka v dne môže byť zaujímavá – svojimi vyvýšenými okrajmi od prepichovania a podobne) a vysvetlenie pozorovaných javov. To, že niečo vidím je pekné. Ešte krajšie však je, keď tomu aj rozumiem a viem to vysvetliť.