FYZIKÁLNY KOREŠPONDENČNÝ SEMINÁR

vzorové riešenia 3. série
A – kategória (starší)
17. ročník
letný semester
školský rok 2001/2002

www. **.sk**

FKS, KZDF FMFI UK
Mlynská dolina
842 48 Bratislava
riesenia@fks.sk
info@fks.sk

A – 3.1 Svetový rekord (opravoval Matúš)

Na rovníku a na severnom póle boli postavené dve dokonalé (a klimatizované) športové haly. Majstrovstvá sveta sa uskutočnili v tej „polárnej“. Rekord v hode guľou do diaľky bol na súťaži zlepšený o jeden centimeter. Ak by sa hádzalo v „rovníkovej“ hale, bol by svetový rekord tiež prekonaný? O koľko? Predpokladajte, že na oboch miestach by športovci podávali rovnaké fyzické výkony.

Ako mnohí správne postrehli, hod guľou naozaj nemá ďaleko k šikmému vrhu... Stačí zanedbať vplyv odporu vzduchu (na toto zanedbanie je práve ťažká kovová guľa ideálna) a Coriolisovu silu. Tak to teda zanedbajme a s kľudným svedomím môžeme napísať pre dĺžku hodu l počiatočnou rýchlosťou v_0 pod uhlom α k zemi vzťah

$$l = \frac{v_0^2}{g}\sin^2\alpha .$$

Športovci na to nevyzerajú, no to, čo im z fyziky treba, majú v malíčku. Preto za uvedených podmienok hádžu pod uhlom 45° – vedia, že im to tak doletí najďalej. Ak dosadíme túto hodnotu do minulého vzorca, dostaneme $l = v_0^2/(2g)$. Ako ste si určite všimli, zanedbali sme to, že guliari hádžu guľu nie z úrovne Zeme. Lež táto opúšťa ich ruku vo výške takmer 2,5 metra! To je zle, že sme na čosi také zabudli. Dobré na tom je to, že sme na to zabudli pri oboch našich guliaroch (polárnom i rovníkovom), takže ničoho strašného sa nakoniec nedopúšťame. Akurát hodnoty v_0 (pre nás aj tak nezaujímavé) nám vyjdú jemne prehnané. Na rozdiele dĺžok hodov by sa však nič podstatné zmeniť nemalo (nejaký ten centimeter nám náladu nepokazí). Kto neverí, nech si skúsi prejsť tým mínovým poľom sám.

Otázne je, čím sa budú pokusy prekonať svetový rekord na póle a rovníku líšiť. No predsa hodnotou tiažového zrýchlenia g! Športovec bude totiž ten istý a predpokladáme, že malá zmena tiažového zrýchlenia nijako neovplyvní techniku jeho hodu, a teda ani hodnotu v_0.

Nuž a prečo bude g iné? Dôvody sú (pozor!) dva: pôsobenie odstredivej sily a rozdiel medzi polárnym a rovníkovým polomerom Zeme. Ešte raz a pomaly. Odstredivá sila pôsobí na všetky telesa na Zemi, pretože krúžia spolu s jej povrchom okolo osi jej otáčania. Poznáme vzťah pre odstredivú silu $F_O = m\omega^2 r$, kde ω je uhlová rýchlosť otáčania (samozrejme, pre celú Zem rovnaká a rovná $2\pi/1$ deň – Zem sa otočí o celý uhol 2π za jeden deň, 24 hodín) a r je vzdialenosť od stredu otáčania. Tu už netreba veľkého fiškusa, aby sme zistili, že na póle odstredivá sila nepôsobí ($r = 0$), zatiaľ čo na rovníku snaživo zmenšuje hodnotu g danú gravitačným priťahovaním.

Ešte sa pohrajme s tým priťahovaním. Newton a jeho zákon vravia, že gravitačné zrýchlenie udeľované Zemou telesám na jej povrchu by malo mať veľkosť

$$g = \frac{\kappa M}{r^2},$$

kde r je vzdialenosť od stredu Zeme, M jej hmotnosť a κ gravitačná konštanta. Tu sme opäť raz využili našu moc fyzika a použili tento vzťah (ktorý presne platí iba pre sféricky symetrické rozloženie hmoty) i pre našu, predsa len trochu šišatú, Zem. Opäť nám možno nejaký ten milimeter výsledku uletí, ale neplačme a počítajme ďalej.

Polárny a rovníkový polomer Zeme označme r_P a r_R. Keďže vieme, že $r_P < r_R$, je už teraz nad slnko jasnejšie, že rekord by bol prekonaný aj v rovníkovej hale – je v nej menšie gravitačné priťahovanie, dokonca ešte zoslabené odstredivou silou, ktorá na póle chýbala!

Poďme už ale čosi naozaj vypočítať. Podľa vyššie napísaného môžeme pre gravitačné zrýchlenia na póle (g_P) a na rovníku (g_R) zapísať vzťahy

$$g_P = \frac{\kappa M}{r_P^2}, \quad g_R = \frac{\kappa M}{r_R^2} - \omega^2 r_R.$$

Pomocou spomínaného vzťahu pre dĺžku hodu máme potom pre tieto dve g-čka dĺžky hodov

$$l_P = \frac{v_0^2}{2g_P}, \quad l_R = \frac{v_0^2}{2g_R}.$$

Halovým rekordom v hode guľou je teraz 22,66 metra, preto nech v polárnej hale vrhol borec rovných 22,67 metra. To znamená, že

$$\frac{v_0^2}{2g_P} = 22{,}67\,\mathrm{m}.$$

Ak odtiaľto vyjadríme v_0 a dosadíme do vzťahu pre dĺžku hodu na rovníku, zistíme, že

$$l_R = \frac{g_P}{g_R} \times 22{,}67\,\mathrm{m}.$$

Ostáva dosadiť hodnoty $M = 5{,}98 \cdot 10^{24}$ kg, $r_P = 6357$ km, $r_R = 6378$ km, $\omega = 7{,}27 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{s}^{-1}$. Dostaneme tak $g_P = 9{,}87\ \mathrm{ms}^{-2}$, $g_R = 9{,}77\ \mathrm{ms}^{-2}$. No a podľa skvelého posledného vzťahu máme sladkú odmenu, $l_R = 22{,}90$ m. Rozdiel v dĺžke hodu je takmer štvrť metra – to je dĺžka! Ďakujeme za pozornosť, od mikrofónu sa s vami lúči Karol Polák mladší...

A – 3.2 Virtuálna práca (opravoval Fajo)

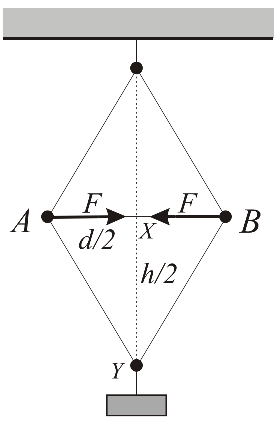
Na obrázku je závažie hmotnosti m *zavesené na jednoduchej konštrukcii zloženej zo síce nehmotných, no neohybných tyčí. Dĺžka tyčí na obvode je* a*, dĺžka tyče medzi bodmi* A *a* B *je* d*. Akou silou je stláčaná táto tyč?*

Ahojte budúci skvelí stavitelia mostov. Tento príklad, aj keď nebol najľahší, ste skoro všetci vypočítali správne. Páčilo sa mi, že ste použili rôzne postupy, ktoré nakoniec viedli k správnemu výsledku. Ako už názov príkladu napovedá, jeden (najčastejší) spôsob riešenia je pomocou takzvaných virtuálnych prác:

Ide vlastne o to, že v inak stabilnom systéme vykonáme nejakú zmenu – posunutie a pozorujeme, čo to spraví s celkovou energiou systému.

V prvom rade je podstatné, že všetky tyče sú nehmotné, teda gravitačná sila pôsobí len na závažie. Teda ak posunieme závažie o nekonečne malý kúsok Δh smerom dole, skráti sa priečka medzi bodmi A,B o nekonečne malý kúsok Δd . Z hľadiska energie to znamená, že pokles potenciálnej energie telesa $|\Delta E_p|$ sa rovná práci ΔW potrebnej na stlačenie tyče:

$$|\Delta E_p| = \Delta W. \qquad (1)$$



Veľkosť zmeny energie telesa je $|\Delta E_p| = mg\,\Delta h$.

Pretože konštrukcia je kosoštvorcového tvaru, bude hľadaná sila F pôsobiť v smere priečky. Teda práca $\Delta W = F\,\Delta d$. Vráťme sa k rovnici (1) : $mg\,\Delta h = F\,\Delta d$ a z toho hneď máme

$$F = (\Delta h / \Delta d) mg, \qquad (2)$$

kde Δh a Δd sú nekonečne malé, takže

$$F = mg \lim_{\Delta d \to 0} \frac{\Delta h}{\Delta d}.$$

Uvedená limita je vlastne derivácia vzdialenosti h podľa dĺžky d. Vyjadrime si vzdialenosť h podľa d. Z Pytagorovej vety platí :

$$(d/2)^2 + (h/2)^2 = a^2 \tag{3}$$
$$h = (4a^2 - d^2)^{1/2}$$

Naša hľadaná derivácia potom bude: $h' = - d/(4a^2 - d^2)^{1/2}$. Ak ju dosadíme do vzťahu pre silu dostaneme (derivácia je záporná, nás však zaujíma veľkosť – absolútna hodnota sily):

$$F = \frac{mgd}{\sqrt{4a^2 - d^2}}.$$

Ak si ešte celkom nerozumiete s deriváciami alebo by ste radšej videli riešenie bez nich, dá sa prísť na správny výsledok aj pomocou trošky zanedbávania.

Vzťah medzi vzdialenosťou h a dĺžkou l nám určuje rovnica (3) . Poďme si načrtnúť situáciu po posunutí závažia o Δh smerom dole. Dĺžka strany AX sa zmení na $(h+ \Delta h)/2$ a dĺžka AY na $(d- \Delta d)/2$, preto:

$$\left((d - \Delta d)/2\right)^2 + \left((h + \Delta h)/2\right)^2 = a^2 .$$

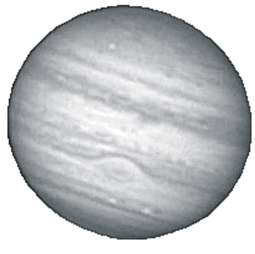
Po úprave dostaneme: $d^2 - 2d\,\Delta d + \Delta d^2 + h^2 + 2h\,\Delta h + \Delta h^2 = 4a^2$. Keďže dĺžky Δd a Δh sú veľmi malé, môžeme ich druhé mocniny zanedbať (rovnako ako môžeme zanedbať desaťtisícinu voči stotine): $d^2 - 2d\,\Delta d + h^2 + 2h\,\Delta h = 4a^2$. Ak dosadíme za h z rovnice (3) dostaneme $\Delta h/\Delta d = d/(4a^2 - d^2)^{1/2}$ (čo je vlastne tá derivácia). Ak tento výsledok spätne použijeme v rovnici (2), vidíme, že získame rovnaký vzťah pre silu ako pri použití derivácie.

No a je to. Čo dodať k vašim riešeniam? Boli poväčšine správne a vyskytli sa aj takí, ktorým sa zdala úloha jednoduchá a sťažili si ju počítaním s hmotnými tyčami.

Takže šťastné a veselé prázdniny a žite s mierou.

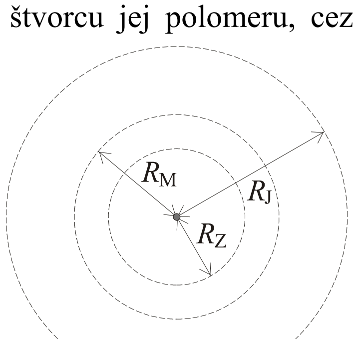
A – 3.3 Jupiter (opravoval Matúš)

Predstavte si, že by Jupiter obiehal Slnko nie po svojej doterajšej dráhe, ale po dráhe Marsu. Pozreli by sme sa naň vo chvíli, kedy by bol k Zemi najbližšie. Koľkokrát viac svetla Jupitera (oproti súčasnej situácii) by dopadalo do nášho oka? Ak to dokážete, zistite, akej hviezdnej veľkosti (magnitúde) to zodpovedá. Pri hľadaní potrebných hodnôt vám určite pomôže Encyklopédia astronómie. Tam zistíte aj to, čo je vlastne zač tá hviezdna veľkosť.



Vcelku ste ju zvládli, netradičnú astronomickú úlohu. Pravda, platí to iba o tých, čo sa aspoň trošku snažili (že, Kubo?). Tak sa snažme aj my.

To, že intenzita žiarenia nejakého zdroja prechádzajúca jednotkovou plochou klesá so štvorcom vzdialenosti od zdroja, to je známa vec. Prečo je to tak? Ak zostrojíme pomyseľnú guľu s našim zdrojom svetla v strede, celkové množstvo žiarenia prechádzajúce cez povrch tejto gule nemôže závisieť od jej polomeru – energia sa pri svojom toku zo zdroja nestráca! No a keďže povrch myslenej gule je priamo úmerný štvorcu jej polomeru, cez jednotku plochy nám musí tiecť množstvo svetla nepriamo úmerné tomuto štvorcu…



Označme si intenzitu svetla, ktoré k nám prichádza od Jupitera teraz, na jeho starej obežnej dráhe, Φ_0. Kvôli čomu sa zmení prechodom Jupitera na obežnú dráhu Marsu? Jupiter bude bližšie k Slnku a preto zachytí svojou plochou viac jeho žiarenia, ktoré potom rozptýli do priestoru. Navyše sa bude k Zemi dostávať bližšie než doteraz a my z toho rozptýleného svetla zachytíme viac. A je to. Už len v súlade s obrázkom označme polomer dráhy Zeme R_Z, polomer dráhy Marsu R_M a polomer terajšej dráhy Jupitera R_J. Ak bolo doteraz Jupiterom do priestoru rozptyľované nejaké množstvo svetla, potom to bude $(R_J / R_M)^2$-krát viac (v dôsledku jeho priblíženia sa k Slnku). Ak sa doteraz približoval Jupiter k Zemi na najmenšiu vzdialenosť $R_J - R_Z$, teraz to bude iba $R_M - R_Z$. V dôsledku toho narastie celkový svetelný tok prichádzajúci k nám od Jupitera z Φ_0 na

$$\Phi' = \Phi_0 \cdot \left(\frac{R_J}{R_M}\right)^2 \cdot \left(\frac{R_J - R_Z}{R_M - R_Z}\right)^2.$$

Ak dosadíme tabuľkové hodnoty $R_Z = 1$ AU, $R_M = 1{,}5$ AU, $R_J = 5{,}2$ AU (zoznámte sa s novou jednotkou dĺžky, v astronómii často používanou „astronomickou jednotkou“, či Astronomical Unit), zistíme, že prichádzajúci svetelný tok sa nám zväčší asi 850-krát. Mimochodom, nemá cenu dosadzovať uvedené hodnoty omnoho presnejšie – dráhy všetkých troch telies sú totiž elipsy a nie kružnice (najmä v prípade Marsu dosť šišaté elipsy...) a oné tabuľkové hodnoty sú akési ich priemerné hodnoty. Navyše, nemilosrdný logaritmus nám o chvíľu vymiesi všetky detaily do homogénnej masy.

Ostáva odpovedať na otázku, aká by bola jasnosť takéhoto Jupitera, či po „astronomicky“ povedané, aká by bola jeho magnitúda. Stačí nájsť múdry vzťah (Pogsonov), ktorý hovorí o rozdiele magnitúd (značíme ich m) dvoch telies, od ktorých k nám prichádzajú rôzne množstvá svetla E_1 a E_2. Tento rozdiel je

$$\Delta m = -2{,}5 \cdot \log \frac{E_1}{E_2}.$$

Dosadením nášho podielu $E_1/E_2 = 850$ dostaneme $\Delta m = -7{,}3^{\mathrm{m}}$. Keďže teraz je maximálna jasnosť Jupitera rovná $-2{,}6^{\mathrm{m}}$, po jeho presťahovaní bude $m' = -9{,}9^{\mathrm{m}}$. To je skoro toľko, ako má Mesiac (ten má $-12{,}7^{\mathrm{m}}$). (Správne ste si všimli, v astronómii je to naozaj tak, že jasnejšie objekty majú menšiu magnitúdu.) No a ešte jedna poznámka – priblížením Jupitera k Slnku by stúpla teplota jeho atmosféry, čo by mohlo pozmeniť jej zloženie a dramaticky zmeniť množstvo žiarenia odrážané Jupiterom do okolitého priestoru. To nikto nespomenul, no za zmienku to nepochybne stojí.

A – 3.4 Tenisík (opravovala Rebro)

Dominik, veľký to tenista, sa jedného dňa rozhodol, že si nacvičí špeciálne podanie. Podá prudkú loptu (ktorá bude letieť skoro úplne rovno, ako keby tam ani gravitácia nebola), ktorá sa po dopade na súperovu časť ihriska odrazí späť na Dominikovu polovicu ihriska. Má význam, aby Dominik takéto podanie trénoval? Ak áno, ako by musel udierať do loptičky? Ak nie, prečo?

Na úvod môjho vzoráku vám všetkým prajem príjemné krásne slnečné leto, maturanti nech po maturách a prijímačkách len oddychujú a tretiaci nech sa tešia na to o rok. Nuž ale k príkladu.

Takmer všetci ste na začiatku svojich riešení uviedli, že sa to nedá, lebo keby áno, určite by sa to už ktosi naučil, minimálne taká špička tenistov, a to by ešte len ľudia otáčali hlavami pri tenisových zápasoch. Ale Marián Galovič napísal, že pozná chlapíka, ktorý to zvládne, ale že je to fakt hnusná vec, keď ti pred nosom loptička uskočí (koniec citácie). Tak neviem, ja tenisu vôbec neholdujem, len sem-tam sa pozerám z intráku na jeden kurt a obdivujem malé deti, ktoré majú v rukách raketu väčšiu ako oni sami a navyše nerada robím hnusné veci...

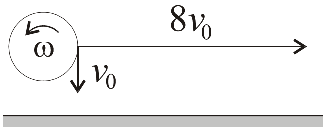
Ale poďme si povedať, čo by sa muselo diať, aby to šlo a prečo to teda nejde. Ako ste písali, loptička by musela mať slušnú rotáciu okolo vlastnej osi, aby po tom, čo dopadne na súperovu časť ihriska, sa neodrazila ďalej, ale späť.

Ak udierame do loptičky, udierame viac menej len v jednom bode. V extrémnom prípade, keby bolo trenie nekonečne veľké, pôsobíme v tomto bode silou rovnobežnou s povrchom loptičky. Prečo? Trecia sila je nanajvýš f-násobkom kolmej (normálovej) sily od rakety. Ak bude f fakt veľké, tak môže byť táto sila rovnobežná s raketou omnoho väčšia než na raketu kolmá sila a spomínaná rovnobežnosť je na svete.

Sila od rakety má svoju veľkosť a svoj moment, veľkosť rozbieha loptičku a moment ju roztáča. Keď sa má rotujúca loptička po dopade odraziť späť, potrebovala by s pomocou trenia zrušiť celú svoju vodorovnú rýchlosť, lebo sú to práve zvyšky vodorovnej rýchlosti, čo nútia pokračovať normálnu loptičku zhruba v pôvodnom smere pohybu.

Keď však zoberieme do úvahy rozmery tenistu (loptičku podáva z výšky asi tak 2,5 metra), a rozmery ihriska (k sieti to má skoro 12 metrov, pričom sieť je vysoká len o málo viac než 1 meter), vychádza nám, že loptička musí letieť pod veľmi malým uhlom k podložke (cca 7°). Podľa zadania chceme podať prudkú loptu, ktorá bude letieť takmer rovno, nemáme teda na výber a vodorovná zložka rýchlosti loptičky musí byť omnoho väčšia než zvislá (pre tých 7° je to 8-krát väčšia rýchlosť). Opäť nám čosi začína navrávať, že takúto veľkú vodorovnú rýchlosť rotácia loptičky určite nestihne zvrátiť. Pre neveriacich Tomášov môže byť potrebnou poslednou kvapkou nasledujúcich pár vzorcov.

Označme si trvanie odrazu loptičky od podložky ako Δt. To je nejaký krátky, no predsa nenulový čas. Počas neho sa zvislá rýchlosť loptičky, označme ju v_0 zmení na opačnú. Tomu zodpovedá zmena hybnosti $\Delta p = 2mv_0$, kde m je hmotnosť loptičky. Na to musí na loptičku pôsobiť zvislá sila veľkosti



$$F = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{2mv_0}{\Delta t}.$$

Keďže Δt je malé, určite to musí byť „poriadna šupa“. Keďže sa loptička otáča, pri dopade na podložku na ňu bude pôsobiť trecia sila. Práve ona môže zmenšiť (či dokonca zmeniť na opačnú) vodorovnú rýchlosť loptičky, ktorá je podľa minulých riadkov asi tak $8v_0$. Táto trecia sila má veľkosť $F_T = f F$ a zmena vodorovnej rýchlosti, ktorú spôsobí je

$$\Delta v = \frac{F_T}{m} \cdot \Delta t = 2 f v_0.$$

Vidíme, že na to, aby táto zmena rýchlosti bola aspoň $8v_0$ (aby sa loptička keď už nie vracala späť, tak aspoň pohybovala zvislo) je potrebné f aspoň 4. Otvorte tabuľky. Vidíte tam také hodnoty koeficientu trenia? Nie. Žiadny teraflex ani najlepšia Wimbledonská tráva Vám k čomusi takému nepomôžu. Inak, ďalšie neriešiteľné problémy sa dali nájsť pri skúmaní detailov odrazu tak rýchlo rotovanej loptičky raketou...

Ktosi by mohol prísť a namietať, že pri ping-pongu sú takéto podania časté. Tam je však stôl kratší a sieť je nižšie. Na druhej strane, stolnotenisová loptička je oveľa hladšia aj stôl, na ktorom sa hrá, teda trenie je tam oveľa menšie, ale to už je iný príklad.

Ale aby som zasa zacitovala Mariána: „…dá sa to, ale musí sa to zahrať veľmi jemne a s citom!“. Tak skúšajte, robte experimenty, budete slávni. Mne stačí, keď porobím skúšky a potom hurá na prázdniny.

Všetkých vás zdraví Rebro.

FYZIKÁLNY KOREŠPONDENČNÝ SEMINÁR

výsledková listina A – kategórie po 3. sérii letného semestra 17. ročníka

	Priezvisko	Meno	Trieda	Škola	②	A-3.1	A-3.2	A-3.3	A-3.4	☠	Σ
1.	Dzetkulič	Tomáš	4 A	G PH Michalovce	36,5	4,0	5,0	3,0	4,0	-1	51,50
2.	Smrek	Ján	se. N	1SG BA Čapkova	28,0	1,5	4,0	3,5	5,0		43,29
3.	Skopalová	Eva	4 A	G Poprad Popr. nábr.	19,5	4,5	5,0	5,0	3,5		37,50
4.	Galovič	Marián	3 B	G Kurzweise-Eisenstadt	22,4	3,5	–	4,5	5,0	-1	35,80
5.	Osuský	Andrej	4 B	G BA J. Hronca	10,5	4,5	5,0	5,0	0,5	-1	24,50
6.	Rybár	Jozef	se. B	G BA sv. Uršule	16,8	3,0	–	–	4,0	-3	22,18
7.	Pitňa	Alexander	se. B	OG Štúrovo	18,8	–	–	–	–		18,76
8.	Chudý	Michal	4 B	G AV Levice	16,0	–	–	–	–		16,00
9.	Kálnai	Peter	4 A	G Levice	13,5	–	–	–	–		13,50
10.	Rjaško	Michal	se.	G Vranov nad Topľou	9,4	–	–	–	–		9,44
11.	Fialka	Vlado	2 E	G K2 Prešov	0,0	2,0	3,0	–	–		6,13
12.	Sütőová	Helena	se.	OG Štúrovo	5,5	–	–	–	–		5,49
13.	Adamec	Michal	3 B	G BA J. Hronca	3,5	–	–	–	–		3,50
14.	Mazánová	Silvia	se.	OG Štúrovo	3,4	–	–	–	–		3,37
15.	Závodný	Jakub	sx.	G BA Grösslingova	0,6	–	–	1,0	–		1,93
16.	Stribula	Tomáš Timotej	4 B	G AV Levice	1,5	–	–	–	–		1,50
17.	Mikulík	Andrej	2 B	G BA Grösslingova	0,0	1,5	–	–	–	-1	0,92