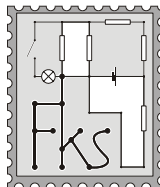


# FYZIKÁLNY KOREŠPONDENČNÝ SEMINÁR

**3. kolo** zimnej časti 18. ročníka  
**A** – kategória (starší)  
školský rok 2002/2003  
*termín príchodu riešení*  
**4. 12. 2002**



www.fks.sk

**FKS, KZDF FMFI UK**  
**Mlynská dolina**  
**842 48 Bratislava**  
riesenia@fks.sk  
info@fks.sk

---

## **A–3.1 Lietadlo** (5 bodov)

Bežné dopravné lietadlo letí vo výške 11 km nad hladinou mora rýchlosťou 890 km/h. V tejto výške je tlak vzduchu približne 10000 Pa a teplota okolia  $-65^{\circ}\text{C}$ . V kabíne lietadla je izbový tlak aj teplota. Keďže každé lietadlo má netesnosti, musí do kabíny vháňať stále nový vzduch z okolia. Musí lietadlo vháňaný vzduch zohrievať, alebo ochladzovať, aby sa udržiavala vnútri želaná teplota? Prečo?

---

## **A–3.2 Global warm(n)ing** (5 bodov)

Ak by sa teplota na Zemi zvýšila o  $5^{\circ}\text{C}$ , časť ľadu na jej povrchu by sa roztopila. V dôsledku toho by stúpala hladina oceánov. Popíšte javy vplývajúce na tento vzostup a pokúste sa odhadnúť jeho číselnú hodnotu.

---

## **A–3.3 Kozmický seriál** (5 bodov)

Odmyslite si na chvíľu zemskú atmosféru a predstavte si, že stojíte na rovníku. Zvislo nahor vyhodíte prvou kozmickou rýchlosťou kameň. Do akej výšky nad povrchom Zeme sa dostane? Pri riešení úlohy otáčanie Zeme: a) neuvažujte, b) uvažujte.

---

## **A–3.4 Celaskon** (5 bodov)

Odmerajte, aký objem plynu (bubliniek) sa uvoľní z jednej tablety „šumivého celaskonu“.

---

Tento seminár je organizovaný s podporou  
Nadácie Pre Otvorenú Spoločnosť – Open Society Fund  
a KZDF FMFI UK

# FYZIKÁLNY KOREŠPONDENČNÝ SEMINÁR

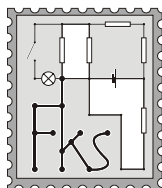
vzorové riešenia 2. série

A – kategória (starší)

18. ročník

zimný semester

školský rok 2002/2003



www.fks.sk

FKS, KZDF FMFI UK

Mlynská dolina

842 48 Bratislava

riesenia@fks.sk

info@fks.sk

## A–2.1 Rýchlovlak (opravoval Čermo, so vzorákom sa pohrali aj Nagi s Matúšom)

Pri maximálnom výkone lokomotívy prejde rýchlovlak 200 km dlhú trať Bratislava – Žilina za dve hodiny. Odhadnite, aký je najmenší čas, za ktorý dokáže prejsť túto trasu opačným smerom. Výškový rozdiel medzi koncovými stanicami je 150 metrov, hmotnosť vlaku je 1000 ton. Pre jednoduchosť predpokladajte konštantný sklon trate, rozbiehanie a spomaľovanie vlaku neuvažujte.

Nuž, ako vidieť z vašich riešení, nie každý chcel byť v piatich rokoch rušňovodičom a tí, ktorí áno, tak asi len na TGV ☺. No, ale nevadí, keď už nie rušňákom, tak aspoň fyzikom. Keď sme už prišli na to, čím chceme byť, môžeme sa pustiť do riešenia tejto pomerne náročnej úlohy.

Prvým krokom bude pohľad na danú problematiku fyzikálnymi očami. Každý z vás určite aspoň raz v živote cestoval vlakom (alebo to aspoň videl v TV). Iste si spomeniete, že vlak počas cesty udržuje konštantnú rýchlosť. Aj keď bol tento fakt uvedený v zadání, veľa riešiteľov naň zabudlo a neuvažovali o odporových silách, ale iba o zmene kinetickej energie na potenciálnu, čo v konečnom dôsledku znamenalo, že vlak počas celej cesty zrýchľoval (nielen ťiažou, ale aj vlastným výkonom  $P$ ) a výsledný čas sa potom pohyboval okolo 1 hod, teda priemerná rýchlosť 200 km/h!

Poučení touto chybou sa vyberieme po stopách našej odporovej sily. Treba si uvedomiť, že vlak okrem trecích síl  $F_t$  nezávisiacich od rýchlosti (napríklad valivý odpor kolies na koľajniciach) brzdia sily  $F_v$ , ktorých veľkosť závisí od rýchlosti. Mocninu, v akej tam vystupuje  $v$  určuje prostredie, v ktorom sa teleso pohybuje a aj samotná rýchlosť. Pre laminárne obtekanie v kvapalinách je  $F_v \approx v$ , pri vzduchu a rýchlostiach rádovo  $10\text{ms}^{-1}$  je to  $\approx v^2$ , ak sa narúša lineárnosť obtekania je potrebné brať do úvahy člen  $\approx v^3$ . Na začiatok skúsme uvažovať len so silami:  $F_0 = F_t + F_v(v^2)$ .

Posilnení týmito poznatkami sme pripravení vrhnúť sa do samotného riešenia. Pre rovnomerný pohyb platí podmienka:  $F_{\text{výsl}} = 0$ . V našom prípade na vlak pôsobia tri sily: sila lokomotívy  $F_L$ , ťaž  $G$  a odporová sila  $F_o$ . Zrejme platí:

$$\text{pre smer z Blavy do Žiliny: } F_L(v_1) = F_v(v_1^2) + G \sin \alpha + F_t$$

$$\text{pre smer zo Žiliny do Blavy: } F_L(v_2) = F_v(v_2^2) - G \sin \alpha + F_t$$

Pritom pre jednotlivé sily platí:

$$F_L(v) = P/v = PT/d,$$

$$F_v(v) = Kv^2 = Kd^2/T^2,$$

kde  $P$  je výkon lokomotívy,  $T$  je príslušný čas, teda  $t$  pre cestu B→Ž a pre cestu nazad (Ž→B) zase  $\tau$ , označíme si  $k$  konštantu v závislosti odporovej sily  $F_v$  od rýchlosti a  $d$  bude vzdialenosť BŽ. Pričom, ak je  $h$  výškový rozdiel, tak  $\sin \alpha \approx h/d$ . Po týchto uváženiach dostávame sústavu 2 rovníc s neznámou  $\tau$  a parametrami  $P, K, F_t$ :

$$\frac{Pt}{d} = K \frac{d^2}{t^2} + G \frac{h}{d} + F_t,$$

$$\frac{P\tau}{d} = K \frac{d^2}{\tau^2} - G \frac{h}{d} + F_t.$$

Teraz sa nám naskytujú dve možnosti, ako sa s daným problémom popasovať. Môžeme sa priamo pustiť do riešenia a), alebo spraviť nejaké ďalšie zanedbania ohľadom neznámych veličín b).

Takže a): Po odčítaní rovníc sa zbavíme trecej sily  $F_t$ , ktorá sa dosť ťažko odhaduje vzhľadom na zložitosť sústavy, akou je rušeň s vozňami:

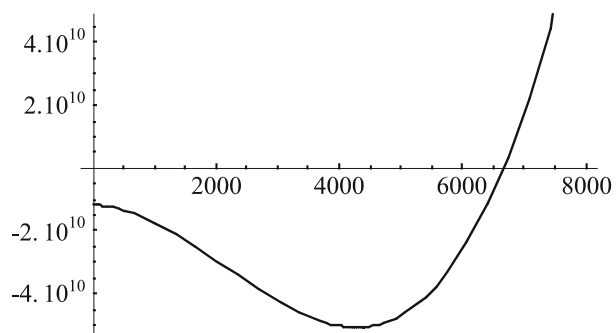
$$P\tau^3 + \tau^2 \left( K \frac{d^3}{t^2} - Pt + 2Gh \right) - Kd^3 = 0. \quad (1)$$

Dostali sme nepeknú kubickú rovnicu. Netreba ju ale presne riešiť, pretože chceme len odhad času  $\tau$ . Všetko, čo v rovnici vystupuje vieme odhadnúť. Efektívny výkon lokomotívy  $P$  (existuje množstvo zdrojov odkiaľ možno čerpať údaje: encyklopédie, železničné stanice....) sa teda pohybuje okolo 5 MW. Konštanta  $K = CS\rho/2 \approx 7,4$  pre parametre  $\rho = 1,23 \text{ kg.m}^{-3}$ ,  $C \approx 1$  (kvádrovitý slovenský vlak) a  $S \approx 4 \times 3 = 12 \text{ m}^2$ . Ďalej poznáme vzdialenosť  $d = 200 \text{ km}$  a hmotnosť  $M = 1\,000\,000 \text{ kg}$ . Rovnica (1) dostane teda tvar

$$5 \cdot 10^6 \tau^3 - 3,2 \cdot 10^{10} \tau^2 - 5,92 \cdot 10^{16} = 0, \quad (2)$$

čiže

$$\tau^3 - 6400\tau^2 - 1,18 \cdot 10^{10} = 0. \quad (3)$$



Ideme nájsť približné riešenie. Buď ho odčítate z grafu (nakreslí ho počítač), alebo si popočítate na kalkulačke. Trebárs takto:

Do Žiliny to trvalo 7 200 sekúnd, nazad by to mohlo byť o čosi menej. Čo tak 7 000? Výraz vľavo v rovnici (3) vyplúje po naťukaní do kalkulačky  $1,76 \cdot 10^{10}$ . Teda vyzerá to, že sme prestrelili, pretože už sme nad nulou a  $\tau^3$  prebilo zvyšok. Skúsme teraz 6500. Výsledkom je  $-7 \cdot 10^9$ . Dobrým tipom je teda

asi 6700. Dá to  $1,6 \cdot 10^9$ . Dáme teda 6650, vyhodí to  $-7,4 \cdot 10^8$ . S dosť dobrou presnosťou teda vieme povedať, že výsledok je niečo nad 6650 a pod 6700. Po 4 dosadeniach do kalkulačky...

Všetko by bolo krásne, ale keď si spätne vypočítame treciu silu, tak nám vyjde koeficient trenia  $\mu$  približne 0,01, čo je pre kolesá vlaku asi 10-krát viac ako reálne. Ak by sme sa v rovnici snažili správne odhadnúť treciu silu  $\approx G \cdot \mu$  (koeficient valivého odporu pre kolesá vlaku je podľa tabuliek približne 0,001) vypočítali by sme čas  $\approx 7000 \text{ s}$ , ale  $K$  by malo hodnotu asi 210!

Zjavne bol náš model moc zjednodušený a preto jednotlivé parametre vychádzali nereálne. Z týchto výsledkov môžeme odhadnúť, že správny výsledok bude niekde medzi hodnotami 6650-7000 s. Pre otrlejšie povahy by sme mohli do odporu započítať aj nelaminárne prúdenia, o ktorých sme sa na začiatku rozprávali, ale to je už iná rozprávka...

Ešte nám tu zostáva možnosť b) – zanedbávanie. Ide v nej o to, že by sme jednu z odporových síl neuvažovali a spočítali sústavu rovníc. Ak sa na vec bližšie pozriete (rozpočítate si hodnoty pre nejakú reálnu situáciu), zistíte že pôsobiace sily sú navzájom porovnateľné a len tak škrtnúť niektorú z nich sa nedá. Smola, radšej vycúvajme.

A teraz pozor. Ak si skúsíte dosadiť nejaké rozumné hodnoty, zistíte, že pri ceste z Bratislavy do Žiliny je (s použitím zadaných údajov) výkon lokomotívy necelý jeden Megawatt! To znamená, že predpoklad „pri maximálnom výkone“ zo zadania má veľmi ďaleko k pravde. Veru tak, lokomotívy používajú svoju silu naplno iba pri rozbiehaní vlaku, počas jazdy už iba udržiavajú rýchlosť, ktorá je obmedzená technickým stavom našich tratí. Teda úloha, ktorú sme riešili bola síce pekná, ale k realite mala dosť ďaleko...

## A-2.2 Kúzníkov recept (opravovala Lucia)

*Do dutej hliníkovej tyče vpustíme cez horný otvor magnet. Na dolnom konci spozorujeme, že akosi dlho trvá, kým magnet z tyče vylezie von. Prečo?*

Hlavný krok je uvedomiť si, že za celým zázrakom stojí Faradayov a Lenzov zákon. Pre začiatok si napíšme ten druhý z nich. Dovolím si citovať z jednej knižičky: „Indukovaný prúd má vždy taký smer, že svojimi účinkami pôsobí proti zmene, ktorá ho vyvolala.“ To teda znamená, že keby sa nám pôsobením padajúceho magnetu v hliníkovej tyči indukoval nejaký prúd, pôsobil by proti padaniu magnetu, brzdil by jeho pád. Nedočkavcom prezradím, že takéto prúdy sa volajú „vírivé“ a vznikajú vtedy, keď sa v okolí vodiča mení magnetické pole. No a ako to s vodičmi býva, napriek vodivosti majú nejaký nenulový odpor a preto sa dôsledkom spomínaných vírivých prúdov uvoľňuje v tyči teplo (rovnako ako sa uvoľňuje teplo vo vláknach žiarovky, ktorým tečie prúd).

No a teraz sa pozrime na vec z druhej strany. Potenciálna energia nemagnetu hodeného do našej hliníkovej trubky sa mení iba na jeho kinetickú energiu. Naproti tomu potenciálna energia rovnako padajúceho magnetu sa premieňa nielen na kinetickú energiu, ale aj na teplo uvoľňované v tyči! (Odkiaľ inokadiaľ by sa mohlo to teplo nabráť? Do Vianoc je ďaleko, Ježiško nám ho teda nedonesie!) Na kinetickú energiu – rýchlosť magnetu sa preto nezvyšuje toľko ako pri bežnom voľnom páde a tak magnetu neostáva nič iné než padať pomalšie.

Toľko stručné zdôvodnenie javu popísaného v zadaní úlohy. Aby ste nefrlali, že to boli všetko len také reči, o malú chvíľku sa do veci pustíme poriadnejšie. Miestami to síce nebude nič pre slabé žalúdky, ale, kto sa preniesie cez tú matematiku (alebo nad ňou privrie oči), nájde ešte veľa zaujímavého. Takže...

Faraday si okolo roku 1831 všimol, že ak približujeme magnet k vodiču, začne ním prechádzať prúd. Podobne je to so závitom, ktorý sa otáča v konštantnom magnetickom poli. Jav elektromagnetickej indukcie vzniká teda vtedy, keď sa buď s časom mení indukcia  $\mathbf{B}(t)$ , alebo sa mení uhol  $\alpha(t)$  medzi smerom magnetického poľa  $\mathbf{B}$  a normálou  $\mathbf{N}$  k ploche  $S$ , alebo sa s časom mení plocha  $S(t)$ , o ktorú sa zaujíname. Matematicky môžeme indukované napätie pri nehomogénnom poli  $\mathbf{B}$  vyjadriť nasledovne

$$U_i = -d\Phi / dt = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}, \quad (1)$$

kde  $\Phi$  označuje s časom sa meniaci tok magnetického poľa našou plochou  $S$ . Pri konštantnom poli  $\mathbf{B}$  môžeme jednoduchšie písať  $\Phi = BS \cos\alpha$ .

Keď priložíme magnet k železu, magnet sa k nemu priťahuje. Ako je to v prípade hliníka? Hliník nie je feromagnetický materiál, magnet sa k nemu nepríťahuje. Predsa len, hliníková tyč je niečím zaujímavá. Keď si pozriete periodickú tabuľku prvkov, zistíte, že taký hliník má na valenčnej vrstve voľné elektróny. A to je podstatné.

Vráťme sa teraz k úvahe nášho padajúceho magnetu. Predstavme si ho napríklad ako tyčový magnet a okolo neho vykreslíme siločiaru. Tie smerujú od južného pólu magnetu S k severnému N. Vezmeme si ďalej časť, malý valcový prúžok tyče, v nejakej vzdialenosti od pólu, napr. od N, a sledujme tento prúžok, ako postupuje spolu s magnetom rýchlosťou  $v(t)$  nadol. Hustota siločiar sa v prúžku nemení, preto aj veľkosť magnetickej indukcie  $\mathbf{B}$  zostáva konštantnou. Plôšku prúžku si môžeme vyjadriť

$$dS = 2\pi r v dt. \quad (2)$$

Plôška samozrejme závisí od rýchlosti magnetu,  $r$  je polomer valcovej tyče. Podľa vzťahu (1) si ľahko určíme veľkosť indukovaného napätia v našom prúžku

$$U_i = -2\pi r v B. \quad (3)$$

Uhol  $\alpha$  je nulový. Keby sme teraz zobrali iný prúžok nad pólom N, vzťah (3) by sa nezmenil, iba hodnota  $B$  by sa o niečo líšila, v závislosti od rozloženia magnetických siločiar nad pólom. Keby sme sa dostali s našim myslým prúžkom do takej vzdialenosti, v ktorej by sme už

pôsobenie magnetického poľa od magnetu mohli zanedbať, potom by  $U_i$  bolo nulové. Podobne by sa napätie  $U_i$  indukovalo aj pod južným pólom magnetu, tentokrát s opačným znamienkom

$$U_i = 2\pi r v B. \quad (4)$$

Prečo iné znamienko? Uhol  $\alpha$  je teraz 180 stupňový. Normála plošky smeruje od valca, ale siločiaru pretínajúce plochu valca smerujú dnu. Tretiu situáciu na úseku povrchu valcovej tyče medzi pólmi magnetu nechám na vás, ale tvrdím, že výsledok je

$$U_i = 0. \quad (5)$$

Zistili sme teda, že na povrchu valcovej tyče sa indukuje napätie, a to v miestach nad severným pólom magnetu a pod južným pólom magnetu. V oblasti medzi pólmi aj v oblasti ďaleko od magnetu sa napätie neindukuje. Urobme teraz približný odhad, aký veľký prúd sa indukuje v hliníkovej tyči a aké veľké sú tepelné straty v materiále.

Vďaka voľným elektrónom môže povrchom tyče tiecť prúd  $I = dQ/dt$ . Celkový náboj  $Q$  môžeme pomocou kapacity  $C$ , ktorá je konštantou závislou od materiálu a tvaru tyče, vyjadriť  $Q = U_i/C$ . Aby sme mohli počítať ďalej, urobme vo výpočte jedno priblíženie. Do úvahy vezmeme len oblasť nad severným pólom N, pod južným pólom magnetu je situácia podobná. Nech na dĺžke  $l$  vo vzdialenosti od pólu je veľkosť  $U_i$  od miesta k miestu približne rovnaká. Zanedbávam teda nehomogénnosť magnetického poľa nad N a budem predpokladať, že vo vzdialenosti  $l$  je magnetické pole  $\mathbf{B}$  konštantné a vo vzdialenosti väčšej ako  $l$  je nulové. Potom podľa vzťahu (3) na celom úseku dĺžky  $l$  je  $U_i = -2\pi r v B$ .

Zapísať môžeme aj rovnosť  $dI/l = dQ/Q$ , kde  $dl = v dt$  je dĺžka nášho valcového prúžka. Použitím všetkých spomínaných vzťahov pre veľkosť indukovaného prúdu dostávame

$$I = -2\pi r \gamma B v^2, \quad (6)$$

kde  $\gamma = C/l$  je dĺžková kapacita.

Keďže hliník má svoj merný, napr. dĺžkový odpor  $\rho = R/l$ , pri pretekaní prúdu v ňom dochádza k tepelným stratám. Tie ľahko vyjadríme pomocou Joulovho zákona,  $P = RI^2$ . Otázkou teda zostáva, odkiaľ čerpať energiu na to, aby sa mohla premieňať na Joulovo teplo. Odpoveď je: v kinetickej a potenciálnej energii magnetu pri voľnom páde. Cyklus vymieňania energií si môžeme predstaviť nasledovne. Nech sa na začiatku magnet pohybuje voľným pádom. Jeho rýchlosť narastá. Pri pohybe sa však indukuje prúd, ktorý spôsobuje, že časť energie z pohybu sa premieňa na teplo. Preto magnet postupne viac stráca na rýchlosti. Predstavme si, že by sa toľko energie spotrebovalo na Joulov ohrev, až by magnet temer zastal. Potom by sa ale neindukoval skoro žiaden prúd a žiadna energia z pohybu by sa „neodčerpávala“. Magnet by začal zrýchľovať. Cítíme, že celý dej speje k rovnomernému pohybu magnetu nejakou rýchlosťou  $v$ . Z našich skorších úvah o indukovanom prúde si ju môžeme približne odhadnúť.

Chceme dať do rovnosti energie, vtedy nastáva energetická rovnováha, čo je to isté, ako keď dáme do rovnosti výkony. Takže máme  $mgv = 4\pi^2 \gamma^2 \rho B^2 l v^4$  a odtiaľ

$$v^3 = mg/4\pi^2 \gamma^2 \rho B^2 l.$$

Všetky veličiny na pravej strane rovnosti sú buď materiálové konštanty, napr.  $\gamma$  a  $\rho$ , alebo súvisia s veľkosťou magnetického poľa  $\mathbf{B}$ , ktoré sme si povedali, že je konštantné. Rýchlosť, ako vidieť teda nezávisí od času, je konštantná.

Treba si ale uvedomiť, že výpočet indukovaného prúdu v sebe zahŕňa priblíženie s konštantným magnetickým poľom na úseku  $l$ . Toto priblíženie, ako vidieť z výsledku konštantnej rýchlosti po ustálení pohybu magnetu, však bolo pomerne dobré. Okrem toho sme získali nejakú predstavu o tom, čo elektromagnetická indukcia v tomto prípade spôsobuje. Vo všeobecnosti podobné javy nastávajú aj v iných situáciách. Spolu hovoríme o Foucaultových vírivých prúdoch, ktoré, podľa Lenzovho zákona, pôsobia proti zmene, ktorá ich vyvolala. S vírivými prúdmi sa môžeme stretnúť napríklad v transformátoroch, elektromeroch, elek-

tromagnetických brzdách. Mimochodom, myslím, že rôzne zábavné parky ich využívajú tiež. Ako inak by sa dal ubrzdiť taký „Freefall“?

### A-2.3 Balón (opravovala Miška)

Do akej výšky môže vystúpiť teplovzdušný balón? Predpokladajte, že má konštantný objem, polomer 8 m, hmotnosť záťaže je 100 kg a potrebné údaje nájdete v tabuľkách.

Balónik nám bude stúpať a bude sa asi snažiť dodržiavať nejaké tie naše fyzikálne zákony. Na začiatku sa bližšie pozrieme na tri z nich: stavovú rovnicu ideálneho plynu (1), tabuľkovú barometrickú rovnicu (2) a rovnicu rovnováhy síl pôsobiacich na balón v hľadanej výške výstupu (3):

$$pV = nRT, \text{ resp. } pM = \rho RT \quad (1)$$

$$p_H = p_0 e^{\frac{-Mgh}{RT}} \quad (2)$$

(Vo všetkých používaných rovnicach je  $M$  molová hmotnosť vzduchu, veličiny s indexom  $i$  sa vzťahujú na balón –  $\rho_i$  je hustota vzduchu v balóne,  $T_i$  teplota vzduchu v balóne.)

Balón nám bude stúpať až dovtedy, kým sa vztlaková sila nebude rovnať tiažovej. Potom naša rovnica (3) bude vyzerat' nejak takto:

$$\begin{aligned} (M'+m)g &= \rho_H \cdot V \cdot g \\ V(\rho_H - \rho_i) &= M', \end{aligned} \quad (3)$$

kde  $M'$  je daná hmotnosť záťaže (100kg),  $m$  je hmotnosť vzduchu v balóne ( $m = V_{balóna} \cdot \rho_i$ ),  $\rho_H$  je hustota vzduchu v okolí balóna v tejto výške. Obe hustoty sa nám ale zákerne menia v závislosti od výšky a teda i tlaku. Z (1) a (2) dostaneme

$$\rho_H = \frac{Mp_0 e^{\frac{-Mgh}{RT_H}}}{RT_H} \quad \text{a analogicky} \quad \rho_i = \frac{Mp_0 e^{\frac{-Mgh}{RT_i}}}{RT_i}.$$

Po ich dosadení do (3) a po niekoľkých úpravách (na ktoré vám stačí jedna prednáška z optiky :-)) budeme majiteľmi krásnej finálnej rovnice v tvare

$$\frac{M'R}{MV} = p_0 e^{\frac{-Mgh}{RT_H}} \left( \frac{1}{T_H} - \frac{1}{T_i} \right).$$

Tak a máme tu jeden ďalší veľký problém, s ktorým sa musíme popasovať. Zákerne totiž pri našej dobrodružnej ceste balónom nie sú iba hustoty, ale i celkom obyčajná teplota vzduchu v okolí balóna  $T_H$  závisí od výšky podľa ďalšieho tabuľkového vzťahu  $T_H = T_0 - 0,0065 h$ . Jeho presnosť je obmedzená iba do výšky 11 km, vo vyšších výškach je už jeho použitie nepresnejšie, ale predsa užitočné. V tabuľkách sa dajú nájsť teploty, ktoré sú pre rôzne výšky konštantné a dá sa ďalej pracovať i s nimi ako s  $T_H$ . Musíme však dávať pozor na to, ako ich budeme dosadzovať do finálnej rovnice (nie vždy je to také jednoduché ako vo väčšine vašich riešení).

Ak budeme uvažovať, že teplotu vzduchu  $T_i$  v balóne dokážeme udržiavať konštantnú (vo vašich riešeniach ste ju celkom pekne reálne odhadovali napríklad na nejakých tých 60°C), numerickým riešením rovnice (napríklad pomocou počítača alebo vašich pevných nervov pri pokusnom dosadzovaní výšky  $h$ ) zistíme, že balón by v takýchto ideálnych podmienkach mohol vystúpiť až do výšky viac ako 16 km. Lenže...

...od určitej výšky  $h$  (zhruba už od takých 3 – 4 km) majú oveľa väčší vplyv na teplotu vzduchu v balóne tepelné straty ako zmena hustoty plynu. Tepelné straty sú spôsobené tým, že teplotný rozdiel medzi teplotou vzduchu v balóne a teplotou okolia je väčší a teda i vyžarovanie tepla bude väčšie. Preto bude naša najvyššia dosiahnutá výška nižšia ako tých

optimistických 16 km (Bus sa dôkladne pohral práve s týmto javom a balón s ním vystúpil iba do výšky 5 km.).

Vcelku je toto riešenie dosť hnedohusté (podľa Braňa a Peťa), a preto som bola potešená tým, že mnohí z vás mali vo svojich riešeniach postupy nanajvyš invenčné (ani som nevedela, koľko internetových stránok obsahuje informácie o teplovzdušných balónoch :-)) a oveľa jednoduchšie. Otázne však už bolo, nakoľko boli tieto postupy správne. Nie vždy sa dá totiž čosi zanedbať a tváriť sa, že to výsledku a javu samotnému neublíži. Ale aj tak sa tešte, lebo ste mali vcelku fajn riešenia a nabudúce možno bude potrebné spočítať ešte niečo horšie...

#### A-2.4 Narkoman (opravoval Fajo)

*Pokúste sa experimentálne zistiť (bez priameho merania), aký vnútorný priemer má ihla na injekčnej striekačke.*

Nazdárek, ak si podľa názvu myslíte, že by vám mal o tomto príklade porozprávať niekto kompetentný, tak vedzte, že táto podobnosť je s mojou osobou čisto náhodná. Táto úloha bola taká teoreticko-experimentálna a dala sa riešiť niekoľkými rovnako dobrými spôsobmi. Podstatné je, že ste všetci správne pochopili vetičku: „bez priameho merania“ a neskúšali ste strkať do ihly všelijaké drôtky a zisťovať ich priemer a pod.

Skoro všetci ste vo výpočtoch využívali známu rovnicu kontinuity pre tok kvapaliny:

$$S_1 \cdot v_1 = S_2 \cdot v_2 \quad (1)$$

Teda, ak natiahneme do injekcie vodu a budeme tlačiť piest rýchlosťou  $v_1$ , bude kvapalina vytekať z ihly rýchlosťou  $v_2$ , ktorá bude podľa rovnice väčšia. V našom prípade je  $S_1$  vnútorný obsah prierezu piestu a  $S_2$  obsah prierezu ihly. Je jasné, že ak budeme vedieť prierez ihly  $S_2$ , vypočítať jej priemer už bude hračka. Ako ale zistiť hodnoty  $S_1$ ,  $v_1$  a  $v_2$ ?

Finta je v tom, že my ani nepotrebujeme  $S_1$ ,  $v_1$  tak, ako ich súčin  $S_1 \cdot v_1$ . To je ale vlastne objemový prietok  $Q_v = V / t$ , čiže objem vody  $V$ , ktorý z injekcie vytečie za čas  $t$ .

Vnútro injekcie má tvar valca s podstavou  $S_1$  a výškou (dĺžkou)  $l$ . Potom jeho objem (objem vody) je  $V = S_1 \cdot l$ . Objemový prietok je:

$$Q_v = \frac{S_1 l}{t} = S_1 \frac{l}{t} = S_1 v_1.$$

Keďže injekcia je objemovo okalibrovaná, vieme koľko vody v nej je. Stačí namerať čas  $t$ , za ktorý túto vodu vytlačíme a ľavú stranu rovnice (1) máme vybavenú.

Ostáva už len namerať rýchlosť vytekajúcej vody  $v_2$ . Tu si pomôžeme tým, že využijeme gravitáciu a niektorý z vrhov – vodorovný, šikmý, zvislý... Ja som sa rozhodol pre vodorovný, pretože je asi najľahšie merateľný.

Dôležité je držať striekačku vo vodorovnej polohe. Voda je teda vrhnutá vo vodorovnom smere počiatočnou rýchlosťou  $v_2$  a padá na zem. Nech  $h$  je kolmá vzdialenosť hrotu ihly od zeme a  $b$  vzdialenosť, do ktorej dopadá vytekajúca voda. Rovnice pre vodorovný vrh:

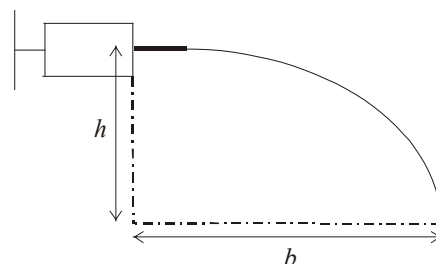
$$b = v_2 \cdot t_1 \quad \text{a} \quad h = 1/2 \cdot g t_1^2.$$

Z prvej rovnice vyjadríme čas  $t_1$  a dosadíme do druhej:

$$h = \frac{1}{2} g \left( \frac{b}{v_2} \right)^2, \quad \text{z toho} \quad v_2 = b \sqrt{\frac{g}{2h}}.$$

Hodnoty  $h$  a  $b$  sa dajú namerať, takže už nám nič nebráni určiť prierez  $S_2$ , čiže aj hľadaný priemer ihly  $d$ :

$$S_2 = \pi \frac{d^2}{4} \quad \text{z toho} \quad d = \sqrt{\frac{4S_2}{\pi}}, \quad \text{kde} \quad S_2 = \frac{S_1 v_1}{v_2} = \frac{Q_v}{v_2}, \quad \text{po dosadení:}$$



$$d = \sqrt{\frac{4V}{\pi \cdot t \cdot b}} \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

Vidíme, že na určenie  $d$  potrebujeme namerať 4 veličiny:  $V$ ,  $t$ ,  $h$ ,  $b$ . Postup je asi takýto:

Umiestnime injekciu na stôl s nejakou výškou  $h$ . Vo vzdialenosti  $b$  od stola spravíme na zem značku - cieľ. Naberieme do striekačky známy objem  $V$ . Zoberieme stopky a triafame vodu na cieľ, pričom zmeriame čas  $t$ . Dôležité je, aby voda dopadala stále na značku, čiže, aby sme piest tlačili konštantnou rýchlosťou. To si vyžaduje nejaký ten tréning. Druhou možnosťou je použiť zvislý vrh nahor, kde bude teba merať výšku  $h_1$ , do ktorej voda vystrekne. Potom pre výšku výstupu zo zákona zachovania energie platí: Teleso vyletí do takej výšky, že celá jeho počiatočná kinetická energia sa premení na polohovú:

$$\frac{1}{2}mv_2^2 = mgh_1 \text{ z toho } v_2 = \sqrt{2gh_1} \text{ a } d = \sqrt{\frac{4V}{\pi \cdot t \cdot \sqrt{2gh_1}}}$$

No a tu sú nejaké vami namerané hodnoty:

$V$ [ml]	$h$ [m]	$b$ [m]	$t$ [s]	$d$ [mm]
1	0,105	0,10	8,97	0,46
20	0,87	2,39	21,16	0,46
20	0,35	0,30	22,60	0,49

vodorovný vrh

$V$ [ml]	$h_1$ [m]	$t$ [s]	$d$ [mm]
5	0,75	5,4	0,55
20	0,80	15,0	0,64
10	0,30	20,2	0,51

zvislý vrh

Vaše riešenia nasvedčujú tomu, že ste sa potrápili a väčšina z vás namerala priemer  $d$  s dosť slušnou presnosťou. Hodnotil som nielen teoretické riešenie, ale aj to, ako sa vám podarilo samotné meranie – hlavne, koľko ste ich urobili (jedno nestačí). Najlepšie bolo, ak ste opakovali merania aj pri zmenených hodnotách  $V$ ,  $h$ ,  $b$ , pretože ste tým zmenšili aj celkovú chybu merania. A aké sú výrobcom udávané priemery ihliel? Najčastejšie používané sú ihly s vonkajším priemerom  $d = 0,5$ ;  $0,7$  a  $1,1$  mm, z čoho sa dá usudzovať, že vaše výsledky by mohli byť celkom správne.

## FYZIKÁLNY KOREŠPONDENČNÝ SEMINÁR

výsledková listina A – kategórie po 2. sérii zimného semestra 18. ročníka

Priezvisko	Meno	Trieda	Škola	Ⓢ	A-2.1	A-2.2	A-2.3	A-2.4	⚡	Σ
1. Závodný	Jakub	se.	G BA Grösslingova	18.0	3.5	4.50	5.0	5.0		36.54
2. Štolc	Miroslav	se.	G Nitra Párovská	17.4	5.0	3.50	3.5	4.5		34.73
3. Batmendijnová	Zuzana	se.	G Terézie Vansovej	17.2	3.0	3.50	5.0	5.0		34.52
4. Neilinger	Pavol	3 A	G Dunajská Streda	18.4	5.0	3.50	1.5	5.0		34.51
5. Baník	Dušan	3 A	G Poprad Popr. nábr.	16.8	3.0	2.50	4.5	5.0		32.92
6. Škorupa	Martin	3 D	G Liptovský Mikuláš	17.2	4.5	3.00	2.0	5.0		32.85
7. Smrek	Ján	ok. N	1SG BA Čapkova	16.0	4.0	3.50	4.0	5.0		32.50
8. Zajac	Peter	3 B	G BA Grösslingova	16.2	3.0	4.00	3.5	3.0		31.02
9. Kvašňáková	Katka	3 E	G K2 Prešov	16.4	3.0	3.50	3.0	3.5		30.74
10. Tekel	Juraj	ok.	G M.M. Hodžu	17.0	2.0	3.50	3.0	5.0		30.50
11. Fialka	Vlado	3 E	G K2 Prešov	16.7	3.0	2.50	2.5	3.5		29.68
12. Svrček	Matúš	se.	G Terézie Vansovej	13.7	3.0	3.75	3.0	5.0		29.63
13. Burger	Michal	se.	G BA Grösslingova	12.3	5.0	4.00	5.0	5.0	-2	29.57
14. Brutovská	Eva	se.	G Kežmarok	17.6	3.0	3.00	1.0	3.0		29.11
15. Nad'	Miroslav	3 A	G Veľké Kapušany	13.4	3.0	2.50	2.0	4.5		26.88



16. Kysel	Róbert	3 A	G BB Š. Moyzesa	12.8	0.5	3.50	4.0	3.5	25.74
17. Mikulík	Andrej	3 B	G BA Grösslingova	13.4	3.0	0.00	2.5	5.0	25.44
18. Trubenová	Barbora	3 A	G BA J. Hronca	9.8	3.0	3.00	3.0	4.5	24.57
19. Dzurňák	Tomáš	1 E	G Spišská Nová Ves	10.5	3.0	3.00	5.0	2.5	-2 23.32
20. Zalom	Peter	4 G	G Poprad Tatarku	11.3	4.0	3.50	1.0	3.5	23.30
21. Molčány	Michal	3 E	SPŠE BA K.Adlera	14.8	0.5	2.50	0.5	3.0	22.63
22. Krššák	Martin	se.	G Piaristické Nitra	8.8	3.0	1.50	4.5	2.5	21.72
23. Maták	Peter	3 E	G VBN Prievidza	12.0	4.0	4.25	–	–	21.70
24. Potočková	Zuzana	se.	G Liptovský Mikuláš	12.8	–	4.00	1.5	2.0	21.68
25. Šoltéssová	Mária	3 B	G BA Grösslingova	8.9	3.0	0.00	2.5	5.0	20.90
26. Dzetkulič	Michal	2 A	G PH Michalovce	10.2	–	3.00	2.0	3.5	20.14
27. Struhár	Pavel	2 A	G BA J. Hronca	13.4	1.0	–	–	4.5	-1 19.14
28. Lakatoš	Pavol	3 A	G Veľké Kapušany	12.8	1.0	1.00	0.5	2.5	18.90
29. Feketeová	Erika	3 A	G Veľké Kapušany	11.0	3.0	–	0.5	2.5	18.26
30. Hornák	Rastislav	3 D	SPŠE Piešťany	13.0	1.0	3.00	–	–	17.93
31. Čajka	Jozef	3 A	G Spišská Stará Ves	8.9	1.0	3.50	1.0	1.5	17.27
32. Perešíni	Peter	1 F	G BB Tajovského	16.0	–	–	–	–	15.95
33. Staňák	Ľuboš	se.	G Dunajská Streda	12.4	–	3.50	–	–	-1 15.81
34. Flak	Juraj	se.	G BA Vazovova	9.7	0.5	0.50	2.0	4.5	-3 15.60
35. Ďurák	Michal	3	G BST Lučenec	15.5	–	–	–	–	15.52
36. Putiš	Marián	4 B	G BB Sládkoviča	7.5	1.0	4.50	1.5	2.0	-1 15.50
37. Mánik	Tomáš	3 C	G BST Lučenec	14.6	–	–	–	–	14.64
38. Bukovina	Lukáš	3 A	G Spišská Stará Ves	6.6	1.0	3.50	1.0	2.0	-1 14.50
39. Salajka	Lukáš	3 A	SPŠ IG	13.7	–	–	–	–	13.72
40. Ferko	Tomáš	3 A	G Spišská Stará Ves	5.9	1.0	2.00	2.0	2.0	-1 13.29
41. Kramarič	Michal	3 C	G BA I. Horvátha	6.8	3.0	3.50	–	–	-2 12.63
42. Dravecky	Pavol	3 IB	G BA J. Hronca	12.5	–	–	–	–	12.49
43. Ploszek	Tomáš	3 D	SPŠE Piešťany	9.4	–	1.50	0.5	0.0	11.98
44. Galovič	Marián	4 B	G Kurzw.-Eisenstadt	11.5	–	–	–	–	11.50
45. Lauko	Martin	se. A	G JL Martin		3.0	0.00	2.5	3.5	10.49
46. Kuruc	Pavol		G Želiezovce	6.1	0.5	3.00	1.5	–	-2 10.25
47. Makovníková	Zuzana	3 D	G Žilina Hlinská	10.0	–	–	–	–	10.00
48. Majorošová	Gabriela	3 A	G Veľké Kapušany	3.7	3.0	–	0.5	2.5	-1 9.98
49. Vavrovič	Juraj	3 A	G Piaristické Nitra	5.5	1.0	0.00	0.5	2.0	9.91
50. Santusová	Iva	3 C	G VPT Martin	5.0	0.5	0.00	0.5	1.5	8.12
51. Kamenská	Katarína	3 C	G VPT Martin	5.5	0.5	0.50	–	1.0	8.09
52. Žák	Vladimír	3 A	G LS Bardejov	7.9	–	–	–	–	7.91
53. Vontorčíková	Lenka	3 C	G VPT Martin	7.8	–	–	–	–	7.82
54. Haizer	Ľudovít	ok.	G BA sv. Uršule	7.5	–	–	–	–	7.50
55. Varga	Matej	2 B	Evanjelické gym. BA	7.3	–	–	–	–	7.26
56. Rybár	Jozef	ok. B	G BA sv. Uršule	7.0	–	–	–	–	7.00
57. Pikna	Peter	3 D	G BA Metodova	5.5	1.0	–	–	–	6.83
58. Vančo	Tomáš	3		6.7	–	–	–	–	6.70
Sčensný	Jozef	se. B	G Nitra	6.7	–	–	–	–	6.70
60. Boháčová	Iveta	3 C	G VPT Martin	5.7	–	–	–	1.5	-1 6.61
61. Patáčík	Ivan	3 C	G Partizánske	6.7	0.5	0.00	–	–	-1 6.34
62. Franček	Igor	3	G Žilina Hlinská	2.9	0.5	3.00	–	1.0	-3 5.45
63. Trtílek	Radovan	3 C	G VPT Martin	5.3	–	–	–	–	5.31
64. Bellanová	Jana	3 E	G Žilina Hlinská		0.5	3.00	–	1.0	-3 2.55
65. Ocelák	Michal	4 AB	G KE Šaca	2.0	–	–	–	–	2.00
66. Breuer	Tomáš	3 E	SPŠE Piešťany	0.0	–	–	–	–	0.00

A po těžkých vzorákových...

