FYZIKÁLNY KOREŠPONDENČNÝ SEMINÁR

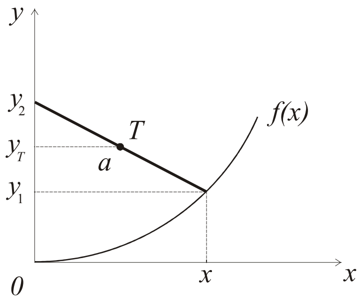
vzorové riešenia 2. série
A–kategória (starší)
18.ročník
letný semester
školský rok 2002/2003.

www. **.sk**

FKS, KZDF FMFI UK
Mlynská dolina
842 48 Bratislava
riesenia@fks.sk
info@fks.sk

A – 2.1 Rampa (opravoval Stano)

Tyč dĺžky a sa opiera jedným koncom o hladkú zvislú stenu a druhým koncom o rampu v tvare funkcie f(x). Aký má mať tvar rampa (aká je závislosť f(x)), aby bola tyč v ľubovolnej polohe v rovnováhe?



Spôsobov riešenia tejto úlohy bolo viac. Všetky však musia vychádzať z nejakého fyzikálneho princípu opisujúceho rovnovážnu polohu. Jedným je princíp minimálnej energie. Voľne povedané: „Každá uzavretá sústava sa snaží dostať do stavu s minimálnou energiou“ (tzv. princíp maximálnej lenivosti: „Čo nemusím, to neurobím“ ☺).

V tomto prípade uvažujeme len mechanickú energiu tyče. Keďže kinetická energia je vždy kladná, tak minimum nadobudne práve vtedy, keď bude nulová. Čiže tyč sa nebude pohybovať (čo je triviálny fakt). Ostáva len potenciálna energia, ktorá v tomto prípade závisí od výšky ťažiska ako mgy_T (pozri obr.). Takže ak chceme, aby bola tyč v každej polohe v rovnováhe, musí byť ťažisko stále v rovnakej výške.

Čiže musí platiť y_T = konšt. y_T sa dá vyjadriť ako $y_T = (y_1 + y_2)/2$, a keďže $y_1 = f(x)$ a $y_2 = f(x) + (a^2 - x^2)^{1/2}$, môžeme písať:

$$y_T = \frac{y_1 + y_2}{2} = konšt.$$

$$\frac{f(x) + \sqrt{a^2 - x^2} + f(x)}{2} = konšt. \qquad \text{alebo} \qquad f(x) = konšt. - \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{2}.$$

Daná konštanta závisí len od zvolenia počiatku rampy. Ak položíme $f(0) = 0$, bude konečný výsledok:

$$f(x) = \frac{a}{2} - \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{2},$$

čo po menšej úprave dá rovnicu

$$\left[a - 2f(x)\right]^2 + x^2 = a^2 .$$

Ako niektorí z vás správne poznamenali, ide o sploštenú kružnicu (resp. elipsu). Toť fsio.

A – 2.2 Fontánka (opravoval Nagi)

Na obrázku je fontánka – voda strieka z trysky s prierezom S nahor, tryska je v hĺbke H pod hladinou vody v nádobe. Prúd vody drží vo vzduchu vodorovnú platňu (samozrejme, je to platňa Michala Davida) hmotnosti m. V akej výške h je fontánka schopná takúto platňu udržať? Predpokladajte, že voda sa pri dopade na platňu rozstrekuje iba do strán (teda v prvom okamihu po dopade je jej rýchlosť vodorovná).

Ľudia moji, Michal David by z Vás nebol nadšený. Ani ja z Michala Davida nie ☺. Preto budeme ďalej radšej hovoriť o platni Michala Kocába – veď sa aj to jeho meno podobá na „kocábku“, teda lodičku, ktorá si vo výške *h* šantí na vodotrysku.

Akouže rýchlosťou to vyteká voda z trysky? Podľa Toricelliho je to

$$v_0 = \sqrt{2Hg}.$$

Za čas Δt teda vytečie z trysky voda s objemom

$$V = Sv_0\Delta t.$$

Keďže sa nám voda po ceste nikde „nestráca“, toto bude aj objem vody dopadajúci za čas Δt na platňu. Dôležité je však uvedomiť si, že rýchlosť vody *v*, ktorou naráža na platňu, bude menšia. Zo zákona zachovania energie (pre vodu na hladine, vodu vytekajúcu z trysky a vodu narážajúcu na platňu) máme

$$MgH = \frac{1}{2}Mv_0^{\ 2} = Mgh + \frac{1}{2}Mv^2.$$

Z toho hneď vidno, že Toricelliho vzorec je priamym dôsledkom zákona zachovania energie pre „kúsok vody“.

Teraz prichádza kritický moment. Ako zistiť silu, ktorou pôsobí prúd vody na platňu? Podľa Newtona je sila daná zmenou hybnosti za čas, $F = \Delta p/\Delta t$. Vieme, aké množstvo vody nám za čas Δt na platňu dopadne. Táto voda so sebou prináša hybnosť

$$p = Mv = \rho Vv = \rho\left(Sv_0\Delta t\right)v.$$

Táto hybnosť má smer zvislo nahor. Keďže po náraze na platňu sa voda rozstrekuje do bokov, úplne stráca hybnosť v zvislom smere – a odovzdáva ju platni. Pre zmenu hybnosti Δp platí $\Delta p = p - 0 = p$. Voda teda pôsobí na platňu silou

$$F = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \rho S\sqrt{2Hg}\sqrt{2\left(H-h\right)g},$$

za v_0 a *v* sme dosadili vyjadrenia zo zákona zachovania energie.

Keďže platňa si kľudne hovie na vrchole vodotrysku, je jasné, že sila *F* sa musí rovnať jej tiaži. Zo vzťahu $F = mg$ nakoniec ľahko vyjadríme výšku *h* ako

$$h = H\left(1 - \frac{m^2}{4\rho^2S^2H^2}\right).$$

To by bolo takmer všetko, môžeme si ale ešte všimnúť, že výška *h* môže výjsť aj záporná. Znamenalo by to, že prúd vody platňu neudrží. Stane sa to vtedy, ak je priťažká. Teda ak

$$m > 2\rho SH.$$

A to je teda všetko.

A – 2.3 Podpaľač (opravoval Tomáš)

Ujo Archimedes bol veľký filozof a matematik a ešte k tomu sa aj dobre rozumel zrkadlám. V bitke o Syrakúzy zapaľoval pomocou naleštených štítov celé lode... Odhadnite koľko potrebujeme vojakov s naleštenými štítmi, aby sa nám za slnečného dňa podarilo podpáliť lode natreté čiernou farbou. Je teda legenda o Archimedovi pravdivá, alebo je to len výmysel?

Ahoj podpaľači. Na začiatok jedno upresnenie – v staršej verzii zadaní sa uvádzalo, že ten ujo, ktorý údajne podkuroval Rimanom v podpalubí, sa volal Aristoteles. Samozrejme, ide o omyl a myslel sa tým ujo Archimedes.

Poďme sa teda nad tým trochu zamyslieť. Loď chceme zapáliť v podstate iba slnečným svetlom. Slnko, ako ste mnohí z tabuliek zistili, nám v ideálnom prípade (pravé poludnie, bezoblačnosť, atď) svieti žiarivým výkonom približne w = 1,4 kJ.m^{-2}.s^{-1}. Tento údaj ste mnohí vyrátali z celkového výkonu Slnka a zo vzdialenosti Slnko-Zem. Predstavme si namiesto štítu ideálne rovinné zrkadlo. Ak odraz Slnka z takýchto n zrkadiel nasmerujeme na 1 miesto na lodi, bude situácia v tomto nešťastnom bode lode presne taká, ako keby na ňu svietilo n Slnc celkovým žiarivým výkonom $n.w$. Zápalná teplota suchého dreva je čosi okolo 300 ^{0}C, teda približne 570 K.

Drevo, ktoré je dosť vysoko nad hladinou, bude už suché a navyše môže byť na povrchu nejaká smola alebo čosi také, čo zápalnú teplotu len zníži. Drevo, ktoré začneme ohrievať, sa začne ochladzovať, a to hlavne dvoma spôsobmi: vyžarovaním a prestupom tepla do vzduchu. Vedenie tepla v dreve môžeme zanedbať, lebo drevo má relatívne nízku tepelnú vodivosť. Prestup tepla do vzduchu je ale hrôza, až sa mi pred očami zatemnilo a porátať čosi také je určite nad rámec tejto úlohy.

Hm. Ak neviem niečo zrátať, neviem to náhodou zmerať? Zavolám chalanov z vchodu, vezmeme nejaké štíty… no vážne. Možno ste skúšali niekedy zapaľovať oheň lupou. No a to je vlastne zapaľovanie lode v malom. (Nasledujúci experiment mám od Kubusa Závodného) Ak lupou s polomerom 2 cm viem za nejaký rozumný čas zapáliť drevo, pričom ten krúžok, ktorým to zapaľujem, má polomer asi 0,5 mm, tak je v ňom sústredený výkon $(20 / 0{,}5)^2\, w = 1600w$, čiže 1600-krát väčší ako prichádza zo Slniečka. Podľa tohto experimentu by sme teda potrebovali okolo 1600 zrkadiel. Je tento údaj premrštený alebo podhodnotený?

Tu sa na chvíľu zastavme a skúsme sa zamyslieť: Koľko z tepelných strát je spôsobených vyžarovaním a koľko stratami do vzduchu? Vyžarovanie vieme celkom jednoducho zrátať. Nech na loď mieri n zrkadiel, pričom kritické miesto je zohriate na spomínaných T = 570 K a sústava je v rovnováhe, t.j. vyžiari sa práve toľko tepla, koľko tam štítmi nasmerujeme. Ak loď vyžaruje ako ideálne čierne teleso, vieme, že jej vyžarovaný výkon na jednotku plochy je rovný kT^4, kde k sa nazýva Stefan -Boltzmannova konštanta a T je termodynamická teplota objektu. Z rovnosti

$$kT^4 = n.w$$

zrátame, že by nám stačilo čosi okolo 5 (slovom päť) štítov. Ak nám 5 štítov stačí na udržanie rovnováhy pri maximálnej teplote, tak na zapálenie v nejakom rozumnom čase potrebujeme povedzme 10.

Načo teda potrebujeme zvyšných neviemkoľko zrkadiel? Zrejme ich potrebujeme kvôli tepelným stratám do okolitého vzduchu, ktoré, ako náš výpočet ukázal, budú ozaj veľké. Aké veľké budú ale straty, keď namiesto malého fliačika lupou sústredeného svetla budeme zapaľovať relatívne veľkým odrazom zo štítu? Predstavme si malý fliačik lupou sústredeného Slnka, ktorý sa snaží zapáliť kus dreva. Po chvíľke sa zrejme v okolí zapaľovanej plochy vytvorí vzdušné prúdenie, ktoré bude dosť efektívne "ovievať" zapaľované miesto, čo náš fliačik zbytočne deprimuje a zapaľovanie nápadne sťaží. Ak ale budeme zapaľovať veľkými štítmi väčšiu (uvažujme zvislo orientovanú) plochu, prúdenie nám už toľko vadiť nebude. Vyššie umiestnené časti bude ofukovať vzduch, ktorý sa už predtým ohrial od spodnejších horúcich častí zapaľovaného dreva. Relatívne tepelné straty môžu byť teda pri zapaľovaní vo veľkom o dosť menšie ako pri zapaľovaní lupou. Odhad 1600 zrkadiel sa z tohto pohľadu zdá byť značne nadsadený.

Proti pravdivosti tejto legendy sa stavajú teda hlavne argumenty technického typu. Vojaci nemohli byť úplne dokonale zorganizovaní a určite sa im nepodarilo naraz všetkým presne zamieriť na to isté miesto. A hlavný argument proti je, že štít predsa len nie je rovinné zrkadlo. Okrem toho, že môže určité percento žiarivého výkonu zachytávať, môže svetlo aj dosť nechutne rozptyľovať, čo nám vadí najviac. Takže aj keď by také zapálenie teoreticky nebolo nemožné, v praxi je prudko závislé na "kvalite" miestnych štítov. Ešte k riešeniam: vašou úlohou nebolo rozhodnúť, či sa to ozaj stalo alebo nie. O tom, či je takéto zapálenie realizovateľné sa už dlho diskutuje v kruhoch tuhých fyzikálnych nadšencov a názory sa rozchádzajú. Skôr sa od vás čakalo, že predostriete nejaký váš, fyzikou podporený, názor.

A – 2.4 **Čierna skrinka** (opravoval Roman)

Čierna skrinka je krabička, v ktorej môžu byť elektronické prvky (rezistory, kondenzátory a cievky) a na povrchu sú štyri dierky, označme ich 1,2,3,4. Keď chceme zistiť, čo sa ukrýva vo vnútri, vyberieme dve dierky a spojíme ich cez zdroj napätia (najskôr striedavý s frekvenciou $f = 50$ Hz, potom jednosmerný) a ampérmeter. Takto systematicky premeriame prúdy pre všetky dvojice dierok (tabuľka - ac znamená striedavé napätie, dc jednosmerné napätie). Prvky v čiernej skrinke sú zapojené v sérií, tzn. že netvoria uzavretý obvod. Nakreslite zapojenie vnútri čiernej skrinky a vypočítajte parametre elektronických prvkov.

		dierky	1 ; 2	1 ; 3	1 ; 4	2 ; 3	2 ; 4	3 ; 4
ac	u = 5,0 V	i [mA]	5,00	13,9	7,07	6,87	7,07	13,9
dc	U = 5,0 V	I [mA]	0,00	25,0	10,0	0,00	0,00	16,7

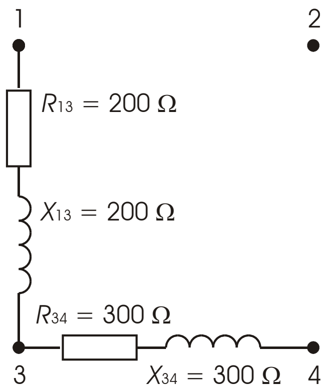
Na začiatok si ujasnime, čo znamená, že prvky netvoria uzavretý obvod. Zoberme si tri dierky 1, 2, 3 a uvažujme, že sú priamo prepojené každá s každou. Za predpokladu, že samotná dierka nebráni prechodu prúdu (aj keď v nej nie je umiestnený spojovací vodič), tvorí naša sústava uzavretý obvod a pri počítaní impedancie Z_{12} alebo rezistancie R_{12} musíme vziať do úvahy aj paralelný príspevok Z_{13} a Z_{23}, resp. R_{13} a R_{23}. Takže hor sa počítať. Podľa zadanej tabuľky určíme impedancie $Z_{ij} = u/i_{ij}$, rezistancie $R_{ij} = U/I_{ij}$ a reaktancie

$$X_{ij} = \sqrt{Z_{ij}^2 - R_{ij}^2}$$

pre príslušné časti obvodu.

		dierky	1 ; 2	1 ; 3	1 ; 4	2 ; 3	2 ; 4	3 ; 4
ac	u = 5,0 V	Z [Ω]	1000	360	707	728	707	360
dc	U = 5,0 V	R [Ω]	∞	200	500	∞	∞	300
		X [Ω]	1000	300	500	728	707	200

Pre elektronické prvky v našej čiernej skrinke platia pravidlá: Ak je v obvode prítomný iba *kondenzátor* – prúd pri jednosmernom prúde je nulový,
rezistor – prúd je rovnaký pri striedavom aj jednosmernom prúde,
cievka – prúd pri striedavom prúde je menší oproti jednosmernému.
Prvý pohľad na tabuľku hovorí, že R_{13} a R_{34} sú zaradené za sebou (200 Ω + 300 Ω = 500 Ω) a medzi ne nie je zaradený kondenzátor. Reaktancie X_{13} a X_{34} sa taktiež rovnajú X_{14}.



Z tohoto dostávame informácie pre časti obvodov 13 a 34:
13 – induktancia 200 Ω (cievka) a rezistancia 300 Ω (samotný odpor cievky a prípadne ďalšie rezistory)
34 – induktancia 300 Ω (cievka) a rezistancia 200 Ω (samotný odpor cievky a prípadne ďalšie rezistory)

Keďže prvky nemajú tvoriť uzavreté obvody, ostáva už iba jedna možnosť z možných Z_{12}, Z_{23}, Z_{24}, kam umiestniť kondenzátor. Postupným vypočítaním všetkých sériových impedancií nám vyjde, že tejto podmienke vyhovuje Z_{12}.
12 – kapacitancia 1000 Ω (kondenzátor)
Príslušné hodnoty induktancií, kapacitancií a rezistancií sú v nasledovnej tabuľke.

dierky	1 ; 2	1 ; 3	1 ; 4	2 ; 3	2 ; 4	3 ; 4
X_L [Ω]	-	300	500	300	500	200
X_C [Ω]	1000	-	-	1000	1000	-
R [Ω]	-	200	500	200	500	300

Výsledná schéma by sa dala nakresliť podľa nasledovného obrázka. Potom parametre elektronických prvkov, ktoré vypočítame zo známych vzťahov $X_C = 1/\omega C$ a $X_L = \omega L$, $\omega = 2\pi f$, $f = 50$ Hz, sú:

$$C_{12} = 3{,}2\ \mu\text{F}\ ,\ L_{13} = 0{,}96\ \text{H}$$
$$R_{13} = 200\ \Omega\ ,\ L_{34} = 0{,}64\ \text{H}$$
$$R_{34} = 300\ \Omega.$$