FYZIKÁLNY KOREŠPONDENČNÝ SEMINÁR

vzorové riešenia 3. série
A–kategória (staršia)
18.ročník
letný semester
školský rok 2002/2003.

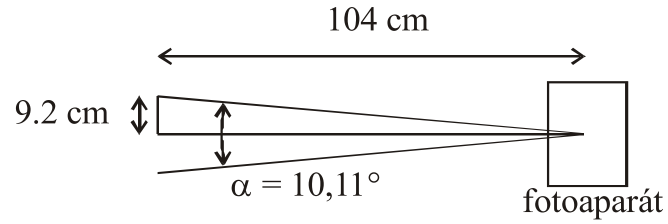
www. **.sk**

FKS, KZDF FMFI UK
Mlynská dolina
842 48 Bratislava
riesenia@fks.sk
info@fks.sk

A – 3.1 Priemerné Slnko (opravoval Roman)

a) Vymyslite a prakticky realizujte experiment, pri ktorom čo najpresnejšie zistíte uhlový priemer Slnka (teda uhol, pod ktorým vidíme slnečný kotúč).
b) Zistite, či je „Mesiac je väčší nízko nad obzorom, než keď ho máme vysoko nad hlavou.“

Vzhľadom na množstvo digitálnych fotografií, ktoré sa mi podarilo vytvoriť, rozhodol som sa využiť tento archív. Vybral som fotografie Mesiaca nízko nad obzorom a vysoko nad obzorom a fotografie Slnka robené pri maximálnom zoome (6×). Pri tomto istom zoome (6×) som odfotografoval pravítko zo vzdialenosti 104 cm. Na širšiu stranu fotografie sa zmestilo 18,4 cm z dĺžky pravítka. Tomu zodpovedá uhol $\alpha = 2\arctan(9{,}2\ \text{cm}/104\ \text{cm}) = 10{,}11°$.



V grafickom programe som prekrýval kotúč Slnka alebo Mesiaca kruhom, pričom som odmeral jeho priemer d. Šírka fotografie bola 722,5 mm. Uhlový priemer ϕ, ktorý zaberali Slnko a Mesiac som vypočítal ako $\phi = \{d\}\ \text{mm} / 722{,}5\ \text{mm} \times 10{,}11°$.

Chyby, ktoré sa prejavujú na výsledkoch, mohli vzniknúť pri fotografovaní pravítka – meranie vzdialenosti a pravítka, pri zakrývaní kotúča kruhom – odhadovaní, kedy je už kotúč zakrytý, ale hlavne pretečením náboja do okolitých buniek rastra na senzore digitálneho fotoaparátu pri fotografovaní takého jasného zdroja ako Slnko alebo Mesiac, čo spôsobilo zväčšenie priemeru kotúča.

a) Slnko, priemerná hodnota $\phi = 34{,}7'$. Údaje sú uvedené v nasledovnej tabuľke.

veľkosť / mm	uhol / '	Čas	miesto
40,4	33,9	27.11.2002 12:59	Bratislava, Dostojevského rad
40,4	33,9	27.11.2002 12:59	Bratislava, Dostojevského rad
39,7	33,3	27.11.2002 12:59	Bratislava, Dostojevského rad
40,8	34,3	27.11.2002 12:59	Bratislava, Dostojevského rad
40,7	34,2	27.11.2002 13:01	Bratislava, Dostojevského rad
41,2	34,6	27.11.2002 13:02	Bratislava, Dostojevského rad
46,4	38,9	12.01.2003 16:11	Bratislava, Jasovská
45,1	37,8	27.02.2003 16:55	Bratislava, Ilkovičova
40,0	33,6	09.03.2003 06:32	Bratislava, Okánikova
39,7	33,3	27.03.2003 17:59	Bratislava, Botanická
40,2	33,7	27.03.2003 17:59	Bratislava, Botanická

Podľa klasických MFCh tabuliek je zdanlivý stredný polomer slnečného kotúča $15'59{,}63''$ čomu zodpovedá priemer približne $32'$. Myslím si, že najväčšiu chybu pri meraní spôsobilo práve pretečenie náboja. Mimochodom, výrobcovia neodporúčajú fotografovať digitálnym fotoaparátom takéto jasné objekty.

b) Mesiac nízko nad obzorom, priemerná hodnota $\phi = 32{,}7'$
Mesiac vysoko nad obzorom, priemerná hodnota $\phi = 32{,}2'$

Údaje sú uvedené v nasledovnej tabuľke.

	veľkosť / mm	uhol /′	čas	miesto
Mesiac nízko	39,7	33,3	19.12.2002 16:18	Bratislava, Mlynská dolina
	37,6	31,6	20.12.2002 16:58	Bratislava, Obchodná
	39,5	33,1	16.04.2003 19:03	Bratislava, Smolenická
Mesiac vysoko	37,4	31,4	17.10.2002 21:38	Bochum, SRN
	37,8	31,7	12.01.2003 16:10	Bratislava, Jasovská
	39,9	33,5	15.03.2003 22:33	Bratislava, Okánikova

Podľa spomínaných tabuliek je zdanlivý polomer mesačného kotúča $15'33''$, čomu zodpovedá priemer $31'$. Namerané hodnoty sú opäť trochu väčšie, čo opäť dávam za vinu senzoru. V oboch prípadoch vyšiel približne rovnaký uhlový priemer. Čo sa teda týka povery, že mesiac nízko nad obzorom je väčší, v tomto prípade ide o optický klam. Mesiac nízko nad obzorom porovnávame s objektmi, ktoré vidíme blízko od neho (stromy, domy, paneláky...). Keď je Mesiac vysoko, tak nám na porovnávanie ostanú napr. prsty, vtáky a podobne.

A – 3.2 Kobylka (opravovala Miška)

Odhadnite výkon kobylky zelenej pri odraze ku skoku do výšky jeden meter.

Kvety kvitnú, slnko svieti, lúka rozvoniava a kobylky plné energie skáču do závratných výšok. Tá naša mala vyskočiť do výšky jeden meter. A my sme chceli vedieť, ako sa jej pri tom bude dariť, však?

Nuž, pristupovať k závažnému kobylkovskému problému sa dalo rôzne. Nie každý z vás však prišiel na to, že aj celkom jednoducho. Ako? Takto...

Kobylka sa má po odraze dostať do výšky 1 meter. Keďže jej výkon iba odhadujeme, stačí, aby skákala zvislo nahor. Dobre vieme, že na to potrebuje energiu $E = mgh$. (Skoky pod uhlami 45, 60 alebo 75 stupňov nám náš výsledok priveľmi nezmenia (skúste si to niekde na lúke spočítať :-). Odhadnutých odhadov totiž pri výpočte ešte bude habadej a všetky naše zdanlivé spresnenia sa tam zaručene stratia. Z toho istého dôvodu sa nebudeme zaoberať ani odporom vzduchu.) Zo ZZE si určíme rýchlosť, ktorú potrebuje mať kobylka na začiatku svojho skoku:

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2 \qquad \Rightarrow \qquad v = \sqrt{2gh}.$$

Túto rýchlosť dosiahne (ako ste mnohí správne vo svojich riešeniach uviedli) pri svojom odraze – teda pri “vystieraní” svojich nôh, ktorých dĺžku si označíme l. Predpokladajme, že kobylka na tejto dráhe rovnomerne zrýchľuje z pokoja až na rýchlosť v. Výkon je práca vykonaná za nejaký ten čas a čas, kedy nôžky kobylky pracovali (kobylka nadobúdala potrebnú kinetickú energiu), dostaneme v našom zjednodušenom prípade z rovníc pre rovnomerne zrýchlený pohyb.

Teda platí

$$l = \frac{1}{2} vt \qquad \Rightarrow \qquad t = 2l / v,$$

a po dosadení za rýchlosť

$$t = 2l / \sqrt{2gh}\,.$$

Vieme, akú prácu kobylka pri skoku vykonala a vieme aj to, ako dlho jej to trvalo. Aspoň trošku fyzikálne uvedomelý občan si hneď uvedomí, že k úspešnému koncu nám už veľa nechýba. Približný výkon kobylky totiž bude

$$P = W / t = mgh / t = mgh\sqrt{2gh} / 2l\,.$$

Po číselnom vyjadrení encyklopedických alebo racionálne odhadnutých hodnôt dĺžok jej končatín a hmotnosti (celkom vhodné sa zdajú byť napríklad hodnoty l = 3 cm = 0,03 m, m = 3 g = 0,003 kg) zistíme, že kobylka podala pri svojom skoku výkon približne

$$P \approx 2\text{W}.$$

Samozrejme, konečný verdikt v nemalej miere závisí od voľby týchto parametrov (teda od druhu kobylky :-). Výkony vašich súkromných kobyliek (vďaka za krásne názorné obrázky) sa pohybovali od 0,2 do 5 W, rádovo však vždy na úrovni niekoľkých wattov.

V úvode tejto rozpravy o skákajúcom hmyze som spomínala, že okrem jednoduchého prístupu volili mnohí z vás aj prístupy zložitejšie. Ako však vidíte, vôbec to nebolo potrebné. Odhad bude totiž vždy len odhad a zaoberať sa nerovnomerným zrýchlením, odporom prostredia (mimochodom, opäť ide o výpočet plný odhadov) a skokom pod rôznymi uhlami si vyžaduje množstvo času navyše. Ak ho však máte, naozaj vám ho mnohí ľudia vrátane mňa môžu iba závidieť:-). Prajem vám všetkým krásny deň a leto plné kobyliek…

A – 3.3 Vlak (opravoval Stano)

Vlak sa pohybuje po priamej ceste. Vnútri vlaku je o podlahu pevne pripevnený stôl. Na stole je zápalková škatuľka. Vlak začne zrazu brzdiť (rovnomerne spomaľovať), čím sa zápalková škatuľka dá do pohybu, až nakoniec padne na zem. Ako ďaleko od stola dopadne? Uvažujte, že vlak brzdí po celý čas pádu zápalkovej škatuľky. Trenie medzi stolom a škatuľkou je nulové.

Pri riešení tejto úlohy ste sa mohli štylizovať do pózy čakajúceho na stanici, alebo cestujúceho vo vlaku. Mohli ste si teda vybrať inerciálnu, alebo neinerciálnu vzťažnú sústavu. Výber je iba otázkou vkusu. V každom prípade, keď ste si už raz vybrali, je vhodné pri tomto výbere ostať. Ak však silou mocou chcete uprostred riešenia meniť sústavu, z ktorej sa na celú vec pozeráte, treba si dať veľký pozor, ako to robíte, lebo to môže celé zle skončiť. Aj keď nič horšie sa vám nemôže stať, ako stratiť pár bodov :-). Poďme však už k samotnému riešeniu.

Pohľad z inerciálnej vzťažnej sústavy (čakajúci na stanici).

Kým sa vzhľadom na krajinu vlak pohybuje rovnomerným priamočiarym pohybom rýchlosťou v, všetky telesá v ňom sa pohybujú vzhľadom na krajinu tou istou rýchlosťou v. Z prvého Newtonovho zákona vyplýva, že kým na veci vo vlaku nezačne pôsobiť nejaká sila, v tomto rovnomernom priamočiarom pohybe aj zotrvajú. To je aj náš prípad, keďže trenie medzi stolom a škatuľkou je nulové, a taktiež zanedbávame odpor vzduchu počas letu škatuľky. Škatuľka sa teda po celý čas pohybuje rýchlosťou v (vo vodorovnom smere), a to aj keď vlak začne brzdiť. Keď teda vlak začne spomaľovať spomalením a, prejaví sa to tým, že škatuľka sa začne pohybovať vzhľadom na vlak zrýchlením a.

Označme:
t_1 – čas, za ktorý škatuľka prejde vzdialenosť l po stole,
t_2 – čas, za ktorý škatuľka prejde vzdialenosť s vzduchom,
s – vzdialenosť bodu dopadu od stola.
Škatuľka prejde od začiatku brzdenia vlaku po dopad na podlahu vzdialenosť $v(t_1+t_2)$. Vlak spomaľuje, prejde teda vzdialenosť $v(t_1 + t_2) - 0{,}5a(t_1 + t_2)^2$. Rozdiel týchto dráh je vzdialenosť, ktorú prejde škatuľka vo vnútri vlaku, a to je $l + s$. Môžeme teda písať:

$$l + s = 0{,}5a(t_1 + t_2)^2. \tag{1}$$

Vzdialenosť l vo vnútri vlaku prejde škatuľka za čas

$$t_1 = \sqrt{2l/a} \quad (\text{lebo } l = at_1^2 / 2). \tag{2}$$

Nakoniec t_2 je čas, za ktorý škatuľka spadne z výšky h. Jedná sa o voľný pád, čiže

$$t_2 = \sqrt{2l/g} \quad (\text{lebo } h = gt_2^2 / 2). \tag{3}$$

Po skombinovaní (1), (2) a (3) dostaneme:

$$s = ah/g + 2\sqrt{ahl/g}\,.$$

Pohľad z neinerciálnej vzťažnej sústavy (cestujúci vo vlaku).
Tu si treba uvedomiť, že ak sme vo vagóne, tak od začiatku brzdenia vlaku začne na všetky veci v ňom pôsobiť zotrvačná imaginárna sila. Imaginárna preto, že jej pôvod je v spomaľovaní vlaku, čím ju cítia len telesá vo vlaku a pre všetkých ostatných mimo vlaku tu žiadna sila nie je. Pod vplyvom tejto sily sa začne pohybovať škatuľka rovnomerne zrýchleným pohybom so zrýchlením a. Vo vodorovnom smere prejde vzdialenosť $s+l$, pričom jej to trvá čas $t_1 + t_2$. Čiže môžeme napísať:

$$l + s = a(t_1 + t_2)^2 / 2.$$

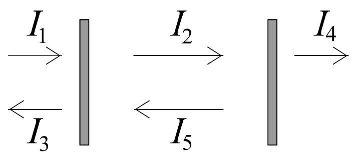
Čo je ale to isté ako vzťah (1), a teda nakoniec počítame to isté ako pred chvíľou, pričom obdržíme ten istý výsledok $s = ah/g + 2\sqrt{ahl/g}$. To však nie je prekvapujúce, veď problém je ten istý, len pohľad naň sme zmenili. Ináč povedané, úvahy môžeme mať rôzne, ale technicky počítame nakoniec to isté. Toť fsio.

A – 3.4 Zrkadielko, povedzže mi.. (opravoval Tomáš, vzorák podľa Kuba Závodného)
Predstavte si polopriepustné zrkadlo. Keď naň zasvietime svetelným lúčom intenzity I, tak zrkadlo prepustí lúč intenzity 2/3I a zvyšok, t.j. lúč intenzity 1/3I odrazí späť. Majme 3 takéto zrkadlá postavené za sebou. Lúč akej intenzity prepustí resp. odrazí táto optická sústava keď na ňu zasvietime lúčom intenzity I?
Pre makačov (bonus bod): riešte túto úlohu pre n zrkadiel postavených za sebou.

Tak tentoraz to bolo o čosi zložitejšie, úlohu ste ale viacerí perfektne zvládli, pričom ste použili niekoľko principiálne odlišných metód. Riešenia boli najčastejšie 2 typov: prvým bolo porátať výslednú intenzitu približne. Nakoľko však existuje presná metóda (a podľa všetkého nebolo až také ťažké na ňu prísť), dával som za tieto riešenia do 2,5 bodu. Správne riešenia vyzerali najčastejšie tak, že ste robili úvahy o lúčoch a nakoniec spočítali geometrický rad. Ja ukážem trochu iný spôsob, pri ktorom nepotrebujeme rátať ani to.

Skúsme najprv vyrátať, lúč akej intenzity prejde sústavou zloženou z dvoch zrkadiel pričom prvé zo zrkadiel prepúšťa k a druhé m z dopadajúceho svetla. (tým pádom odrážajú množstvá $1 - k$ a $1 - m$ z dopadajúceho svetla) Označme intenzity medzi zrkadlami tak, ako je to znázornené nižšie. Potom zrejme platia rovnice popisujúce odrážanie a prepúšťanie svetla jednotlivými zrkadlami. Tie si nájdete na nasledujúcej strane ...

$$I_2 = kI_1 + (1 - k)\, I_3,$$
$$I_3 = (1 - m)\, I_2,$$
$$I_4 = mI_2,$$
$$I_5 = kI_3 + (1 - k)\, I_1.$$

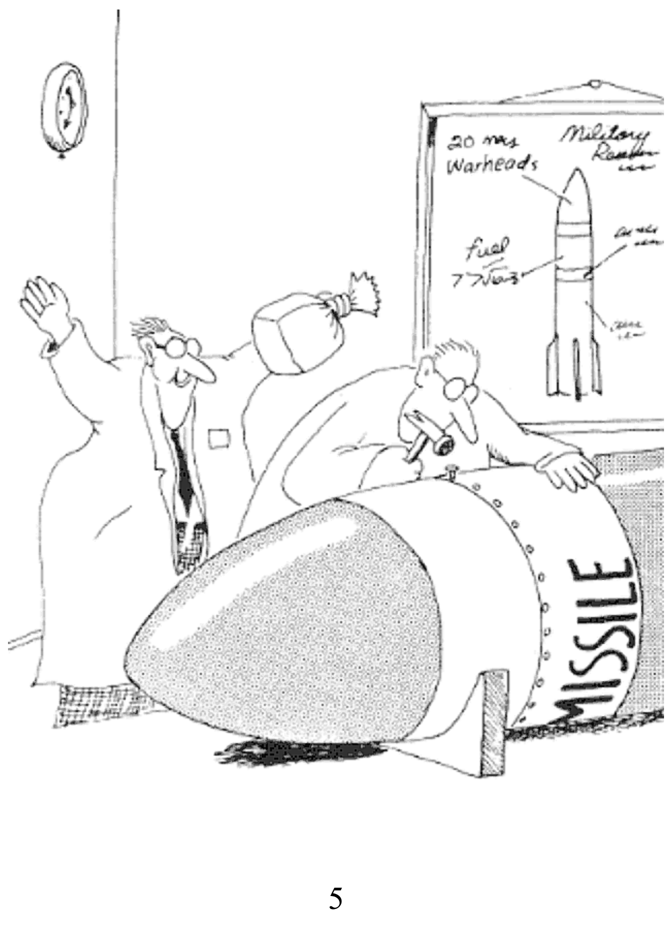


Riešením tejto sústavy dostávame $I_4 = I_1 \times km / (k + m - km)$ a $I_5 = I_1 - I_4$ (čo neprejde, to sa musí odraziť).
Nech koeficient A_n vyjadruje, koľko z dopadajúceho svetla prepustí sústava n zrkadiel. Zrejme $A_1 = 2/3$. Predpokladajme že poznáme hodnotu A_n a skúsme pomocou tejto hodnoty zrátať A_{n+1}. Sústavu $n + 1$ zrkadiel si predstavme ako sústavu n zrkadiel plus jedno na záver. Lenže sústava n zrkadiel sa správa presne tak isto ako 1 zrkadlo ktoré prepustí A_n z dopadajúceho svetla (a zvyšok odrazí). Celé sa to teda správa tak isto ako vyššie zrátaná sústava 2 zrkadiel pre $k = A_n$ a $m = 2/3$. Po dosadení tak dostávame $A_{n+1} = 2A_n / (2 + A_n)$. Keď si dosadíme niekoľko hodnôt, ľahko zrátame $A_2 = 1/2 = 2/4$ a $A_3 = 2/5$. Nech $A_n = p/q$. Potom platí $A_{n+1} = p / (q + p/2)$. Z toho už vidno, že čitateľ zlomku bude stále 2 a menovateľ bude stále rásť o 1, platí teda $A_n = 2 / (n + 2)$.

Na záver

Tak a to už je pre tento rok naozaj všetko. Aj keď ... S týmto konštatovaním určite nesúhlasí tých 32 z Vás, ktorí sa zúčastnia akčného letného sústredenia našich najlepších riešiteľov. To sa uskutoční v malebných horách východoslovenskej Gelnice a čo sa tam bude diať ... No však uvidíte, tí menej šťastní si to časom budú môcť prečítať na našej www-stránke.

Krátko po sústredení nastanú (konečne) pravé a ničím nerušené prázdniny. Užite si počas nich veľa príjemných zážitkov. Veríme, že v septembri sa oddýchnutí vrátite nielen k svojim školským povinnostiam, ale aj k nášmu semináru (terajším štvrtákom veľa zdaru na školách, ktoré si vyberiete). Nech sa darí!



FYZIKÁLNY KOREŠPONDENČNÝ SEMINÁR

výsledková listina A – kategórie po 3. sérii letného semestra 18. ročníka

	Priezvisko	Meno	Trieda		Škola	②	A-3.1	A-3.2	A-3.3	A-3.4	☠	Σ
1.	Závodný	Jakub	se.		G BA Grösslingova	39.3	4.7	5.0	5.0	6.0		60.09
2.	Neilinger	Pavol	3	A	G Dunajská Streda	35.1	4.5	5.0	5.0	2.5		53.11
3.	Baník	Dušan	3	A	G Poprad Popr. nábr.	32.8	3.7	5.0	5.0	6.0		52.91
4.	Maták	Peter	3	E	G VBN Prievidza	31.2	4.0	5.0	5.0	6.0		51.49
5.	Zalom	Peter	4	G	G Poprad Tatarku	30.0	5.0	5.0	5.0	6.0		51.00
6.	Tekel	Juraj	ok.		G M.M. Hodžu	29.0	5.0	5.0	5.0	4.0		48.00
7.	Kvašnáková	Katka	3	E	G K2 Prešov	31.1	3.0	2.5	5.0	5.0		47.87
8.	Fialka	Vlado	3	E	G K2 Prešov	28.1	3.0	5.0	5.0	6.0		47.66
9.	Štolc	Miroslav	se.		G Nitra Párovská	27.2	3.0	5.0	5.0	6.0		46.80
10.	Šoltésová	Mária	3	B	G BA Grösslingova	26.8	4.0	5.0	5.0	5.0		46.38
11.	Batmendijnová	Zuzana	se.		G T. Vansovej	27.6	2.0	5.0	5.0	6.0		46.37
12.	Burger	Michal	se.		G BA Grösslingova	32.7	–	–	5.0	6.0	-1	44.30
13.	Smrek	Ján	ok.	N	1SG BA Bajkalská	28.5	2.5	3.5	5.0	4.0		43.50
14.	Lauko	Martin	se.	A	G JL Martin	22.9	5.0	4.0	5.0	6.0		43.18
15.	Mikulík	Andrej	3	B	G BA Grösslingova	24.3	2.5	5.0	5.0	5.0		42.75
16.	Svrček	Matúš	se.		G Terézie Vansovej	25.7	2.5	3.0	5.0	5.0		42.46
17.	Kysel	Róbert	3	A	G BB Š. Moyzesa	25.0	4.7	3.5	4.5	1.5		40.61
18.	Brutovská	Eva	se.		G Kežmarok	20.2	4.8	5.0	5.0	5.0		40.38
19.	Potočková	Zuzana	se.		G Liptovský Mikuláš	21.8	–	5.0	5.0	4.5		37.72
20.	Krššák	Martin	se.	A	G Piaristické Nitra	13.3	3.5	4.0	5.0	2.5		29.62
21.	Molčány	Michal	3	E	SPŠE BA K.Adlera	10.9	4.0	2.5	0.0	5.0		23.99
22.	Čajka	Jozef	3	A	G Spišská Stará Ves	13.3	2.0	2.0	1.0	1.5		21.24
23.	Trubenová	Barbora	3	A	G BA J. Hronca	11.5	–	–	–	–		11.50
24.	Budáčová	Hana	3	C	G BST Lučenec	11.0	–	–	–	–		11.00
25.	Naď	Miroslav	3	A	G Veľké Kapušany	1.8	0.5	2.5	1.5	2.5		10.24
26.	Žák	Vladimír	3	A	G LS Bardejov	9.5	–	–	–	–		9.49
27.	Dzetkulič	Michal	2	A	G PH Michalovce	8.9	–	–	–	–		8.91
28.	Majorošová	Gabriela	3	A	G Veľké Kapušany	5.7	0.2	1.5	–	–		7.88
29.	Feketeová	Erika	3	A	G Veľké Kapušany	3.2	–	1.0	0.5	–		5.10
30.	Santusová	Iva	3	C	G VPT Martin	5.1	–	–	–	–		5.08
31.	Lakatoš	Pavol	3	A	G Veľké Kapušany	-2.8	–	–	–	–		-2.84