FYZIKÁLNY KOREŠPONDENČNÝ SEMINÁR

vzorové riešenia 3. série
A – kategória (starší)
19. ročník
zimný semester
školský rok 2003/2004

www.fks.sk

FKS, KZDF FMFI UK
Mlynská dolina
842 48 Bratislava
riesenia@fks.sk
info@fks.sk

A – 3.1 Chladnička (opravoval Juro)

Rodinka sa vybrala na výlet. Pozatvárali všetky okná, povypínali všetky spotrebiče a vyrazili. Zabudli však na chladničku, ktorú nechali otvorenú bežať. Ako sa zmenila teplota vzduchu v kuchyni keď sa na druhý deň vrátili z výletu? Chladnička má výkon P, účinnosť η a v kuchyni je vzduch s objemom V. Kuchyňu považujte za tepelne izolovanú. Najprv uvažujte, že kuchyňa je prázdna a potom sa pokúste zistiť, ako tento výsledok ovplyvnia bežné predmety v nej.

Chladnička vám mnohým narobila nejednu vrásku na čele. Poďme sa teda na začiatok pozrieť, čo to taká chladnička je a čo vlastne robí.

Chladnička pracuje s médiom, s ktorým vykonáva určitý cyklický dej. V ňom toto médium, ktoré sa v danej chvíli nachádza v plynnom skupenstve, stlačí, čím ho skvapalní. Kvapalné médium následne prejde cez mriežku na zadnej strane chladničky. Tu odovzdá okolitému vzduchu teplo, ktoré sa predtým odobralo vzduchu v chladničke. Médium potom ďalej putuje do výparníka, kde sa zníži jeho tlak a vyparí sa. Na to potrebuje odniekadiaľ tepelnú energiu. Tú si zoberie od vzduchu v chladničke. Vyparený plyn putuje na miesto, kde sa začalo naše rozprávanie o chladničke, t.j. do kompresora, kde je plyn opäť stlačený a všetko sa opakuje.

Teraz, keď vieme, ako to v chladničke funguje, pozrime sa, čo sa v miestnosti dialo, keď chladnička zostala otvorená. Chladnička odobrala vzduchu, ktorý sa v nej nachádzal, určité teplo. Onedlho ho však „vypľula“ späť cez mriežku v jej zadnej časti. Celková tepelná energia vzduchu v miestnosti sa nezmenila. Chladnička však za ten čas nasávala z elektrickej siete elektrickú energiu. Príkon chladničky označme P_0. Platí $P_0 = P/\eta$. Chladnička za čas Δt načerpá z elektrickej siete energiu

$$E = P_0 \Delta t. \qquad (1)$$

Na základe zákona zachovania energie sa táto energia nemôže len tak stratiť. Premení sa na tepelnú energiu predmetov v miestnosti. Ak za jediný predmet v miestnosti považujeme vzduch, ktorý má hustotu ρ, mernú tepelnú kapacitu c a objem V, platí

$$Q = \rho V c \Delta T = P_0 \Delta t, \qquad (2)$$

kde ΔT je rozdiel teplôt, ktorý vznikne za čas Δt. Platí teda

$$\Delta T = \frac{P_0 \Delta t}{\rho V c} = \frac{P \Delta t}{\eta \rho V c}. \qquad (3)$$

Podľa zadania Δt = 86400 s, z tabuliek $\rho \cong$ 1,27 kg.m-3 a $c \cong$ 1000 J.kg^{-1}.K^{-1}, objem kuchyne dajme V = 2,5m x 3m x 4m = 30 m^3, výkon chladničky P_0 = 100 W. Chladnička má spotrebu elektrickej energie rádovo 1 kWh za 24 hodín. Dostávame potom rozdiel teplôt $\Delta T \cong$ 55 K. To je teda veľa. To by boli členovia rodinky poriadne prekvapkaní pri návrate domov. Našťastie sú v miestnosti predmety, ktoré odoberú veľkú časť tepla. Označme tepelnú kapacitu všetkých predmetov v miestnosti C. Vzťah (2) potom prejde do tvaru

$$Q' = (\rho V c + C)\Delta T = P_0 \Delta t, \qquad (4)$$

čo vedie k vzťahu

$$\Delta T' = \frac{P_0 \Delta t}{\rho V c + C} = \frac{P \Delta t}{\eta(\rho V c + C)}. \qquad (5)$$

Vidíme, že $\Delta T' < \Delta T$, nakoľko $C > 0$. Skúsme odhadnúť, koľko to asi môže byť. Mnohí z vás, ktorí ste skúsili odhadnúť túto hodnotu, zjednodušili predmety v miestnosti na drevo a železo. Prečo nie, však ono to tak v skutočnosti skoro je. Povedzme teda, že je v miestnosti asi 150 kg železa s $c_{Fe} \cong 450$ J.kg^{-1}.K^{-1} a tak isto 150 kg dreva s $c_{Dr} \cong 1000$ J.kg^{-1}.K^{-1}. Tepelná kapacita predmetov v miestnosti je potom $C = 217{,}5$ kJ.K^{-1}. Pri použití tých istých hodnôt ako predtým dostávame rozdiel teplôt $\Delta T' \cong 8$ K. To už je rozumnejšie. Ani táto hodnota však nie je realistická. V skutočnosti by strašne veľa tepla ušlo cez okná a steny, nakoľko kuchyňa je všetko, len nie tepelne izolovaná. Nakoniec jediné, čo by si výletníci všimli, by bol zvýšený účet za elektrinu.

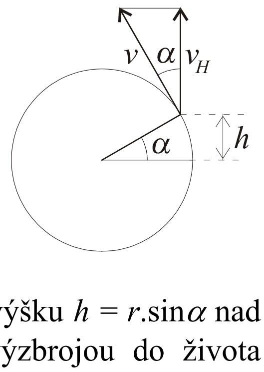
K vašim riešeniam len niekoľko slov. Najčastejšou chybou bol predpoklad, že na tepelnú energiu sa premení iba tá časť príkonu, ktorá sa nepremení na výkon, teda straty. Na čo by sa premenil výkon? Na niečo sa musí premeniť všetka energia, ktorá príde do kuchyne cez káble v stene. A keďže chladnička žiadnu mechanickú prácu nekoná, musí sa na tepelnú energiu premeniť celý príkon. Mnohí z vás tiež došli k podobným vzťahom ako sú tie hore. Súčasťou úlohy však bolo aj odhadnúť nejaké konkrétne hodnoty a napísať o vašich výsledkoch diskusiu.

Dúfam, že sa vám príklad páčil a že ste sa pri jeho riešení dozvedeli mnoho nových vecí o tak často používanej, užitočnej a pritom tak neznámej veci, akou je chladnička. Veľa šťastia a uvidíme sa na sústredku.

A – 3.2 Koleso (opravovali Priky a Tomáš)

Bicykel ide po mokrej podložke. Zrátajte do akej maximálnej výšky odfrkne kvapka z kolesa (voda odlieta od všetkých bodov kolesa v smere dotyčnice v danom bode), ak polomer kolesa je r a bicykel ide rýchlosťou v. Odpor vzduchu zanedbajte.

Najprv niekoľko slov k vašim riešeniam:
Verte vedúcim! Ak je v zadaní napísané, že kvapky odletujú od kolesa všade, je naozaj zbytočné zamýšľať sa nad vecami ako „voda sa určite nedostane až sem, lebo všetka odstrekne už tu a skončí na tvári prekvapeného chodca“. Jednoducho voda špliecha všade. Ďalej, ak sú v zadaní napísané hodnoty r a v, tak chceme riešenie, ktoré bude fungovať pre hocijaké hodnoty r a v. Nemá teda zmysel riešiť úlohu pre nejaké „rozumné“ hodnoty, pre ktoré platí čosi. Tak a teraz už dlho očakávaný vzorák:



Toto bol úplne typický príklad zo série find&maximize. Máme zrátať, do akej výšky odletí kvapka. Keby nám dobrá víla Amálka prezradila niečo typu „najvyššie sa dostanú kvapky, ktoré sa odtrhnú presne pod uhlom 0°“ (pozri obr.), určite by výslednú výšku nebol problém zrátať. My však túto zázračnú informáciu nemáme (kto si myslí, že 0° je ideálny uhol pre kvapku, nech sa zamyslí nad prípadom, keď je v strašne malá a r dosť veľké, vtedy je ideálny uhol 90°...) Tak čo s tým? Predpokladajme, že kvapka, ktorá vyhrá cenu za najvyšší dolet, sa odtrhne od kolesa v uhle α. Táto kvapka dostane do vienka počiatočnú výšku $h = r.\sin\alpha$ nad stredom kolesa a rýchlosť v zvislom smere $v_H = v.\cos\,\alpha$. S touto výzbrojou do života dosiahne výšku

$$H = h + \frac{v_H^2}{2g} = r.\sin\alpha + v^2\frac{\cos^2\alpha}{2g},$$

vysmeje sa všetkým sokyniam, lebo práve ONA je najvyššie a vráti sa späť. Označme $s = \sin\alpha$, teda $\cos^2\alpha = 1 - s^2$ a dosaďme:

$$H = -\frac{v^2}{2g}s^2 + rs + \frac{v^2}{2g}.$$

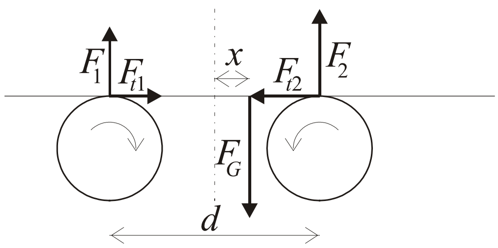
No a my musíme určiť také α, aby H bolo maximálne. Niektorí ste na vyšetrenie funkcie $H(s)$ použili derivácie. No toto – čo neveríte svojim vedúcim? Predsa by sme vám nedali rátať derivácie! $H(s)$ je obyčajná kvadratická funkcia, ktorej maximum nájdeme klasickou úvahou: konštantný člen zrejme nemá na polohu maxima vplyv. Zvyšok, t.j. $-v^2s^2/(2g) + rs$ má korene $s = 0$ a $s = 2gr/v^2$ Pohliadnime s vďačnosťou na parabolu, ktorá vďaka svojej symetrickosti bude mať maximum presne medzi koreňmi, teda pre $s_m = gr/v^2$. Treba si uvedomiť, že my môžeme za s dosadzovať iba čísla od –1 po 1 (lebo s je sínus čohosi), kým s_m môže nadobúdať všetky kladné hodnoty. Preto ak $s_m \le 1$ (tj. $gr \le v^2$) bude maximálna výška dosahovaná pre $s = s_m$ a teda:

$$\alpha = \arcsin\left(\frac{gr}{v^2}\right) \quad \text{a} \quad H = \frac{gr^2}{2v^2} + \frac{v^2}{2g}.$$

Ak $s_m > 1$, bude maximálna výška pre $s = 1$ (lebo funkcia $H(s)$ až po s_m rastie) $\alpha = 90°$ a $H = r$ (H je merané nad stredom kolesa). Tí, čo maximum našli derivovaním, by mali túto úlohu dokončiť presne touto istou úvahou.

A – 3.3 Netradičné oscilácie (opravoval Stano)

Predstavte si, že dva kotúče umiestnené v tej istej horizontálnej rovine, ktorých osi otáčania sú vo vzájomnej vzdialenosti d*, sa otáčajú v navzájom opačných smeroch. Na nich je položená homogénna tyč dĺžky* l*, ktorej ťažisko je bližšie k jednému z kotúčov. Okrem toho vieme, že koeficient šmykového trenia medzi kotúčmi a tyčou je* f*. Mohli by ste skúsiť uhádnuť, čo sa s tyčou bude diať. Ale keďže vedúci FKS sú veľmi dobrí a majú vás radi, prezradíme vám to. Tyč začne kmitať. Zostáva teda už len ľahučká úloha, vypočítať periódu jej kmitov. A to je na vás.*



Základ úspechu riešenia tohto príkladu je nakreslenie pekného obrázka. Tyč na obrázku nakreslíme v polohe, v ktorej je jej ťažisko vychýlené od rovnovážnej polohy (stred medzi kotúčmi) o x.

Na obrázku je už naznačené, že na našu tyč pôsobí päť síl. Dve trecie sily F_{t1} a F_{t2} vo vertikálnom smere a tri sily v horizontálnom smere: gravitačná F_G a sily od kotúčov F_1 a F_2. Posledné dve sú spôsobené reakciou kotúčov na tiaž tyče.

Kmitanie tyče spôsobujú trecie sily od kotúčov a tie sú zas dôsledkom síl F_1 a F_2. Vzťah medzi nimi je

$$F_{t1} = fF_1 \quad \text{a} \quad F_{t2} = fF_2.$$

Našou úlohou je preto zistiť veľkosti síl F_1 a F_2. Keď to budeme mať, bude už cieľ veľmi blízko. To je však ľahké, len si treba uvedomiť dve veci:

1. Tyč sa nepohybuje v zvislom smere, preto bude výslednica vertikálnych zložiek všetkých síl rovná nule. To znamená $F_G = F_1 + F_2$.
2. Tyč sa neotáča, preto bude výsledný moment síl vzhľadom na nami vybraný bod nulový. Ak si vyberieme ťažisko (bod T) bude to znamenať rovnosť $F_1.(d/2 + x) = F_2.(d/2 - x)$.

Z posledných dvoch vzťahov sa po krátkom boji dajú získať hľadané veľkosti síl F_1 a F_2.

$$F_1 = \frac{mg}{2d}(d - 2x), \qquad F_2 = \frac{mg}{2d}(d + 2x). \tag{1}$$

Pre veľkosť výslednej sily vo vodorovnom smere potom platí:

$$F = |F_1 - F_2| = \frac{2mgf}{d} x .$$

Celý čas sme sa bavili iba o veľkostiach daných veličín (síl alebo momentov), aby sme to zbytočne nekomplikovali. Preto sa treba teraz zamyslieť, kam smeruje sila F. To je však zrejmé, lebo ak je ťažisko tyče bližšie k jednému z valcov, tak trecia sila od tohto valca je väčšia (vyplýva to zo vzťahov (1)). Výsledná sila F preto smeruje proti výchylke x od rovnovážnej polohy, čo sa v poslednom vzťahu prejaví pridaním mínusu.

$$F = -\frac{2mgf}{d} x .$$

To je však známa rovnica kmitov, t.j. sila závisiaca priamoúmerne od výchylky $F = - kx$. Tuhosť k je v našom prípade $k = (2mgf)/d$. Perióda kmitov potom je:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{d}{2gf}} .$$

Čo je vzťah, ktorý sme mali nájsť (decentným úsmevom :))) prejavíme našu radosť).

Nakoniec poznámka pre vášnivých záujemcov. Keďže sa jedná o translačný pohyb tyče, mohli sme za m jednoducho dosadiť hmotnosť tyče. Toť fsio.

A – 3.4 Noc je tmavá (opravoval Tomáš)

Ak sa pozrieme na oblohu ďalekohľadom, vidíme viac hviezd, než bez neho. Odhadnite, koľko hviezd môžeme vidieť na oblohe ďalekohľadom s priemerom šošovky 5 cm. Koľkokrát dovidíme takýmto ďalekohľadom ďalej než voľným okom?

Veeeeľa hviezd. Prečo je ich tak veľa? Keď sú také malinké... ? Ešte menšie ako ovečka... Oveľa menšie ako jedna uhlová minúta, čo je podľa kníh fyziky najmenší uhol, pod ktorým sme schopní pozorovať nejaký predmet.. Kto neverí, ráta:

Majme hviezdu so 100-krát väčším polomerom ako Slnko. V akej vzdialenosti môže byť, aby sme ju videli pod uhlom aspoň 1′ ? Slnko je od nás vzdialené asi 8 svetelných minút a pozorujeme ho pod uhlom 0,5°. Potom pre hľadanú vzdialenosť x dostaneme trojčlenkou:

$$x\,.1' = 8\ \text{min}.0{,}5°.100,$$

z čoho x = 17 dní. Keď uvážime, že druhá najbližšia hviezda je od nás vzdialená asi 4 svetelné roky, verdikt je jasný: drvivú väčšinu hviezd na oblohe pozorujeme pod uhlom oveľa menším ako 1′. Prečo ich teda vidíme? Samozrejme ide o to, že hviezdy svietia. Naše oko je konštruované tak, že dostatočne silnú hviezdu uvidíme, aj keby bola strašne malá. Uhol 1′ hovorí iba o tom, že dve hviezdy, ktoré budeme pozorovať pod menším uhlom, nám splynú do jednej.

Ďalekohľad teda iba zväčší veľmi veľmi veľmi malú bodku na veľmi veľmi malú bodku. Dôležité je ale to, že vďaka ďalekohľadu nám do oka príde z hviezdy viacej svetla než bez neho. Pretože namiesto otvoru s priemerom asi 0,5 cm (priemer zreničky človeka pod vplyvom narkotík) zrazu „vnímame“ svetlo z kruhu s priemerom 5 cm. (samozrejme sú tu nejaké straty). Tak dostaneme do oka asi $(5/0{,}5)^2$ = 100-krát viac svetla. To znamená, že hviezda ktorú sme videli voľným okom, teraz môže byť o čosi ďalej a my ju stále uvidíme. Čo zoslabí diaľka, to zosilní ďalekohľad. Vieme, že intenzita svetla klesá s druhou mocninou vzdialenosti. Naša hviezda môže byť teda 10-krát (10^2 = 100) ďalej a my ju stále budeme vidieť rovnako dobre. A to je presne odpoveď na otázku, koľkokrát ďalej dovidíme. Uvedomte si, že toto vôbec neznamená, o koľko ďalej dovidíme ďalekohľadom cez deň. Vtedy nás zaujíma práve zväčšenie ďalekohľadu.

Skúsme na chvíľu predpokladať, že všetky hviezdy žiaria rovnako. Teda to, akú silnú hviezdu vidíme, je spôsobené len jej vzdialenosťou od Zeme. Potom sú viditeľné tie hviezdy, ktoré sú k nám bližšie ako nejaká kritická vzdialenosť – hviezdy ktoré patria do gule s týmto polomerom (a nie sú pod obzorom). No a použitím ďalekohľadu sa tento polomer zväčší 10-krát, objem gule sa teda zväčší 1000-krát. Ak sú hviezdy vo vesmíre rozmiestnené približne rovnomerne, uvidíme asi 1000-krát viac hviezd. No a koľko ich uvidíme bez ďalekohľadu.. To je samozrejme individuálne. Napríklad ja bez okuliarov vidím asi 10, ale inak približne to vychádza na 2000 hviezd. S ďalekohľadom ich teda uvidíme asi 2 000 000.

Nakoniec sa ešte treba zamyslieť nad jedným nepríjemným javom – ak budú hviezdy dostatočne blízko seba, tak nám splynú do jednej hviezdy a my teda jednu hviezdu neuvidíme.. Čo s tým? Rátal som, koľko hviezd sa zmestí na oblohu tak, aby žiadne 2 nesplývali (neboli bližšie ako 1′) a závery sú maximálne upokojujúce – nebo je dosť veľké pre všetky, aj bez použitia ďalekohľadu sa nám doň zmestí asi 120 000 000 hviezd, teda asi 60-krát viac ako potrebujeme. V priemernom prípade teda strácame týmto spôsobom ani nie 1/60 hviezd. Čo nám od začiatku kazí celý výpočet je fakt, že hviezdy nie sú rozložené vo vesmíre rovnomerne, najviac ich vidíme v Mliečnej dráhe. Okrem toho, že číslo 2 000 000 môže byť premrštené, čo môže nechutne zvýšiť počet prekrývajúcich sa hviezd. Napríklad, ak si 1000 hviezd povie, že sa ľúbia veľmi veľmi a natlačia sa blízko seba tak ich vnímame ako jednu hviezdu a pokiaľ sú dosť ďaleko, ďalekohľad nám na ich oddelenie nepostačí.

FYZIKÁLNY KOREŠPONDENČNÝ SEMINÁR

výsledková listina A – kategórie po 3. sérii zimného semestra 19. ročníka

	Priezvisko	Meno	Trieda	Škola	②	A-3.1	A-3.2	A-3.3	A-3.4	☠	Σ
1.	Maták	Peter	4 E	G VBN Prievidza	38.5	5.0	5.0	5.0	5.0		58.50
	Závodný	Jakub	ok.	G BA Grösslingova	38.5	5.0	5.0	5.0	5.0		58.50
3.	Ďurák	Michal	4	G BST Lučenec	35.0	2.5	5.0	5.0	5.0		52.50
4.	Brutovská	Eva	ok.	G Kežmarok	34.0	2.5	5.0	5.0	4.0		50.50
5.	Zalom	Peter	5 G	G Poprad Tatarku	30.5	4.5	5.0	4.5	5.0		49.50
6.	Lalinský	Ján	se. A	G Varšavská cesta	31.6	4.5	5.0	5.0	2.0		48.96
7.	Batmendijnová	Zuzana	ok.	G T. Vansovej	33.0	3.5	5.0	5.0	2.0		48.50
8.	Trubenová	Barbora	4 A	G BA J. Hronca	28.0	5.0	5.0	4.5	5.0		47.50
9.	Glaus	Peter	4 A	G BA J. Hronca	28.0	5.0	5.0	5.0	4.5	-1	46.50
10.	Molnárová	Katarína	3 D	G KE Šrobárova	25.9	4.5	5.0	5.0	5.0	-1	44.55
11.	Sasák	Róbert	3 D	SPŠE Pieštany	31.4	2.0	3.5	4.0	0.5		42.89
12.	Neilinger	Pavol	4 A	G Dunajská Streda	30.5	2.0	3.0	5.0	2.0		42.50
13.	Kysel	Róbert	4 A	G BB Š. Moyzesa	26.5	4.5	2.5	5.0	3.0		41.50
	Mánik	Tomáš	4 C	G BST Lučenec	32.0	1.5	2.0	5.0	1.0		41.50
15.	Dzetkulič	Michal	3 A	G PH Michalovce	23.5	5.0	2.5	4.5	5.0		41.22
16.	Šoltésová	Mária	4 B	G BA Grösslingova	29.0	2.0	5.0	4.5	–		40.50
17.	Štolc	Miroslav	ok.	G Nitra Párovská	25.5	2.5	5.0	4.5	2.0		39.50
18.	Baník	Dušan	4 A	G Poprad Popr. nábr.	26.0	2.0	1.5	5.0	4.0		38.50
	Krššák	Martin	ok. A	G Piaristické Nitra	26.5	2.0	1.5	4.5	5.0	-1	38.50
20.	Džunko	Ján	se.	G Spišská Stará Ves	26.8	4.5	1.0	3.0	1.0		37.81
21.	Vojtko	Andrej	se. A	G Skalica	25.8	1.0	5.0	1.0	3.0		37.31
22.	Mikulík	Andrej	4 B	G BA Grösslingova	26.5	2.5	3.0	4.0	1.0		37.00
23.	Astaloš	Róbert	3 A	G Rimavská Sobota	19.9	1.0	3.5	3.0	1.0		29.89
24.	Rušin	Michal	se.	G Spišská Stará Ves	20.2	2.5	1.0	3.5	1.0		29.67
25.	Domány	Dušan	3 A	G PH Michalovce	21.6	2.0	0.5	–	3.5		28.89
26.	Piják	Peter	3 B	G VOZA	18.9	2.0	4.0	–	–		26.19

27.	Fialka	Vlado	4 E	G K2 Prešov	25.0	–	–	–	–		25.00
28.	Savincová	Katarína	3 E	G PH Michalovce	15.5	1.5	1.0	1.0	1.5		21.64
29.	Svrček	Matúš	ok.	G Terézie Vansovej	19.5	–	–	–	–		19.50
30.	Lauko	Martin	ok. A	G JL Martin	16.5	–	–	–	–		16.50
31.	Kubová	Miška	3 A	G Vrbové	10.5	0.5	0.5	0.5	1.0	-2	11.68
32.	Šimko	Peter	3 C	G BA J. Hronca	4.1	–	–	–	–		4.13
33.	Luptáková	Jozefína	4 C	G BB Sládkoviča	1.5	–	–	–	–		1.50
34.	Michnová	Mária	4 B	G Banská Štiavnica	1.0	–	–	–	–		1.00

No a opäť sú tu Vianoce!

Tretia séria sa šťastne skončila a víťazi sú už známi. Všetkým ďakujeme za účasť, víťazom gratulujeme a tešíme sa na nich na sústredení na Počuvadle. Prajme šťastné a veselé, veľa darčekov, málo cibule a uhlia. Všetko dobré do nového roka a najmä veľa zdaru v letnej časti.

Zajtra lepšie ako dnes, želá všetkým e**FK**áe**S**!