FYZIKÁLNY KOREŠPONDENČNÝ SEMINÁR

2. kolo letnej časti 19. ročníka
A – kategória (starší)
školský rok 2003/2004
termín príchodu riešení
7. 4. 2004

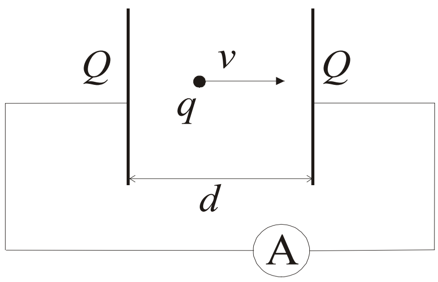
www. **.sk**

FKS, KZDF FMFI UK
Mlynská dolina
842 48 Bratislava
`riesenia@fks.sk`
`info@fks.sk`

A–2.1 Nepresný čas (5 bodov)
Mnoho ľudí dnes rozpráva o roztápaní ľadovcov. Málokto však vie, ako to ohrozí švajčiarskych výrobcov hodiniek...
Predpokladajte, že v najbližších rokoch sa roztopí toľko polárneho ľadu, že hladina oceánov stúpne o jeden meter. Odhadnite, ako to ovplyvní dĺžku pozemského dňa!

A–2.2 Vodná planéta (5 bodov)
Vedci objavili zaujímavú novú planétu. Má tvar gule s polomerom R = 6400 km. Celý jej povrch je pokrytý oceánom z obyčajnej vody s hĺbkou H = 15 km. Vedci zistili, že zrýchlenie voľne padajúceho telesa zostáva nezmenené po ponorení do oceánu do rôznych hĺbok. Určte na základe týchto údajov zrýchlenie voľne padajúceho telesa na povrchu planéty, t.j. tesne nad vodnou hladinou. Odporové a vztlakové sily neuvažujte.

A–2.3 Náboj (6 bodov)
Predstavme si situáciu (pozri obrázok): dve rovnobežné kovové dosky kondenzátora (vzdialenosť d) sú vodivo spojené vodičom s ideálnym ampérmetrom. Na začiatku sú dosky nabité rovnakým nábojom Q. V čase t_0 z jednej dosky vytrhneme guličku s nábojom q (q je omnoho menší ako Q) a budeme ju ťahať k druhej doske konštantnou rýchlosťou v kolmou na dosky. Zistite a vysvetlite, aký priebeh prúdu $I(t)$ nameriame na ampérmetri.



A–2.4 Mystické plnidlo (4 body)
Predstavte si nasledujúce zariadenie (budeme ho volať plnidlo). Do plnidla stále priteká voda. Nejaký čas, povedzme 10 minút, sa plnidlo touto vodou plní. Potom naraz v priebehu krátkej chvíle všetka voda vytečie z plnidla von a proces sa opakuje od začiatku, t.j. zase sa 10 minút plní.. Ale pozor! O plnidle vám prezradím, že neobsahuje žiadnu pohyblivú súčiastku (teda, že žiadna súčiastka ani jej časť nemení svoju polohu). Je možné takéto plnidlo skonštruovať? Ak áno, ako?

Tento seminár podporujú
KZDF FMFI UK a
iuventa

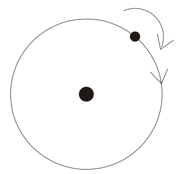
FYZIKÁLNY KOREŠPONDENČNÝ SEMINÁR

3. kolo letnej časti 19. ročníka
A – kategória (starší)
školský rok 2003/2004
termín príchodu riešení
5. 5. 2004

www. **.sk**

FKS, KZDF FMFI UK
Mlynská dolina
842 48 Bratislava
riesenia@fks.sk
info@fks.sk

A–3.1 Dobre sa pozrite (5 bodov)
Ak na slnečnú sústavu nakukneme zhora, vidíme Zem obiehať okolo Slnka. Ak sa pozrieme lepšie, všimneme si aj to, že sa zároveň otáča. Tieto dva pohyby môžu mať smer rovnaký (ako na obrázku), alebo opačný. Pozorovaním (z povrchu Zeme prirodzene) zistite, ktorá z týchto možností je správna. Pomôcka: všimnite si pohyb hviezd a Slnka.



A–3.2 Generačný skok (5 bodov)
Čosi visí vo vzduchu. A sú to 2 vrtuľníky. Otec a syn. Sú úplne rovnakí, vyrobení z rovnakých materiálov. Jediný rozdiel je v tom, že syn je presne polovičná kópia otca (formálne, syn je podobný s otcom s koeficientom ½). Oba vrtuľníky točia vrtuľami akurát tak, aby sa udržali na jednom mieste vo vzduchu. Aký je pomer uhlových rýchlostí, ktorými točia svoje vrtule? Aký je pomer výkonov, ktoré na vznášanie sa vynakladajú?

A–3.3 Neexperimentálka (5 bodov)
Aká je minimálna hustota kvapaliny, v ktorej je ešte schopný plávať človek? Uvažujte, že človek pláva rýchlosťou 2 ms^{-1}.

A–3.4 Krv (5 bodov)
Keď chceme vedieť, koľko krvi má daná osoba, a radi by sme to zistiť bez ujmy na jej zdraví, dá sa to aj takto: Do jej krvného obehu vstrekneme tekutinu s objemom $V_1 = 10\ cm^3$ obsahujúcu rádioaktívne atómy ^{24}Na s aktivitou $A_1 = 2500\ s^{-1}$. Jeho polčas rozpadu je T = 15 hod. Po čase t = 10 hod odoberieme vzorku krvi s objemom $V_2 = 4\ cm^3$ a aktivitou $A_2 = 1\ s^{-1}$. Aké množstvo krvi obsahuje naša osoba?

Tento seminár podporujú
KZDF FMFI UK a
iuventa

FYZIKÁLNY KOREŠPONDENČNÝ SEMINÁR

vzorové riešenia 1. série
A – kategória (staršia)
19. ročník
letný semester
školský rok 2003/2004

www.fks.sk

FKS, KZDF FMFI UK
Mlynská dolina
842 48 Bratislava
riesenia@fks.sk
info@fks.sk

A – 1.1 Ťahanica na *N*-tú (opravoval Čermo)

Na dostatočne dlhom vodorovnom stole je položených N kvádrov o hmotnosti m, ktoré sú navzájom spojené pružinami s rovnakou tuhosťou k, pričom posledný je spojený pomocou kladky s visiacim závažím o hmotnosti M (na obrázku). Na začiatku sú pružiny nenatiahnuté. O koľko sa zväčší vzdialenosť krajných kvádrov, keď sa sústava ustáli v rovnomerne zrýchlenom pohybe? Trenie medzi kvádrami a podložkou je zanedbateľne malé.

Čafte, no aj keď to podľa zadania vyzerá dosť odstrašujúco, na riešenie problému v skutočnosti stačí správne odpovedať na dve otázky:

a) Akým zrýchlením sa sústava pohybuje?
b) Aké veľké sú sily pôsobiace na pružiny?

Takže pekne po poriadku. Pretože je sústava v ustálenom stave, budú sa všetky závažia pohybovať s rovnakým zrýchlením. Podľa Newtonovho pohybového zákona potom platí

$$Nma + Ma = Mg. \qquad (1)$$

Odpoveď na druhú otázku taktiež priamo vyplýva z predpokladu, že sa každý kvádrik pohybuje rovnakým zrýchlením → na každý pôsobí rovnako veľká výsledná sila. Ak označíme silu, ktorou je napínaná i-ta pružina F_i a jej predĺženie x_i, platí: $F_i = kx_i$. Výsledná sila pôsobiaca na i-ty kvádrik je potom $F_i - F_{i-1}$. Preto máme

$$F_i - F_{i-1} = ma. \qquad (2)$$

Zjavne na prvé závažie (od konca) pôsobí iba jedna pružina, čo nám umožňuje priamo vypočítať jej predĺženie

$$x_1 = \frac{ma}{k}$$

Dosadením do (2) dostávame podmienku pre jednotlivé predĺženia

$$x_i = \frac{ma}{k} i \quad \mathrm{i} = \{1,2,...,\mathrm{n}-1\}.$$

Sčítaním týchto $n - 1$ rovníc dostaneme celkové predĺženie Δx

$$\Delta x = \frac{N(N-1)}{2}\frac{ma}{k}.$$

Dosadením rovnice (1)

$$\Delta x = \frac{N(N-1)}{2k}\frac{mM}{Nm+M}g.$$

HOWGH.

A – 1.2 Niečo (opravoval Matúš)

Na okraji stola je položené malé niečo. Trochu do toho drcneme (fyzikálne: udelíme „tomu“ nejaký impulz) a malé niečo sa dá do pohybu, pričom presne po dvoch sekundách dosiahne okraj stola vzdialený jeden meter. Zistite, či má malé niečo kolieska.

Niektorí z vás založili riešenie na slovách „trochu do toho drcneme“, ktorých úlohou bolo objasniť fyzikálnejšie spojenie „dodáme tomu nejaký impulz“. Potom uvažovali, či rýchlosť cca 6 m/s tomuto zodpovedá, či to nie je príliš silné drcnutie. Tu však narážame na problém. Do ľahkého predmetu stačí strčiť slabo a získa to značnú rýchlosť! (Jano Lalinský dokonca zistil, že podobnými drcnutiami získala minca rýchlosť 6 m/s a nožnice ani nie 1 m/s.) Nuž a aké ťažké je „niečo“? To v zadaní nebolo povedané! Preto nechajme toto hranie so slovíčkami a nájdime naozaj fyzikálne riešenie. Detektívka môže začať…

Načo vymysleli ľudia koleso? No predsa na to, aby nemuseli prekonávať veľké šmykové, ale iba menšie valivé trenie. Ak teda môžeme nejako rozlíšiť niečo s kolieskami od niečoho bez koliesok, tak podľa veľkosti koeficientu trenia medzi niečím a podložkou. Označme ho f. Pri pohybe po podložke pôsobí na teleso brzdná trecia sila veľkosti

$$F_T = f \cdot F_N = mgf.$$

Tu sme F_N označili prítlačnú silu medzi podložkou a niečím (rovnú mg). Takejto veľkej sile trenia zodpovedá spomalenie telesa veľkosti $a = F_T/m = gf$.

Nuž a teraz nám už nič nebráni napísať povestnú rovnicu pre rovnomerne spomalený pohyb. Ak označíme počiatočnú rýchlosť niečoho ako v_0, pre dráhu s prejdenú za čas t platí

$$s(t) = v_0 t - \frac{1}{2}at^2 = v_0 t - \frac{1}{2}fgt^2.$$

Okrem toho ešte vieme, že rýchlosť čohosi sa s časom mení ako

$$v(t) = v_0 - at = v_0 - fgt.$$

Podľa zadania vieme, že niečo prejde za dve sekundy jeden meter. To znamená, že pre $t = 2$ s je $s = 1$ m. Podľa hore napísaných rovníc

$$1 = 2v_0 - 2fg,$$
$$v(2) = v_0 - 2fg.$$

A teraz prichádzajú problémy. Z prvej rovnice je jasné, že nech si navolíme ľubovoľnú hodnotu trenia f, pre nejakú štartovaciu rýchlosť v_0 bude rovnosť splnená, na ten druhý koniec stola sa za dve sekundy dostaneme. Napríklad pre $f = 0{,}6$ je $v_0 = 6{,}5$ m/s (pre jednoduchosť počítame s $g = 10$ m/s^2). No a keď môže byť f hocijaké, tak tie kolieska neodhalíme. Alebo?

Veru veru, na niečo sme zabudli. Skúsme napríklad pre už spomínané $f = 0{,}6$ vypočítať rýchlosť po dvoch sekundách. Rovnicu na to máme, dosadením dostaneme $v(2) = -5{,}5$ m/s. Tak. Tam je pes zakopaný. Čo znamená záporná rýchlosť? Že teleso sa už vracia. Teda že už raz prebehlo za okraj stola a teraz, po dvoch sekundách mieri naspäť. To je nezmysel, hneď kvôli dvom veciam. Predstava telesa, ktoré vybehne za okraj stola a potom sa vráti späť je prijateľná akurát tak v kreslenej rozprávke (spomeňte si na Toma a Jerryho!).

Druhá námietka spočíva v tom, že ak by aj hneď za okrajom stola bol nejaký druhý stôl a teleso by sa bez vyrušenia šmýkalo ďalej po ňom, mali by sme problém. Jeho pohyb by sa spomaľoval, až by nakoniec teleso zastalo. Nezačalo by sa teda vracať tak, ako to slepo predpovedala naša rovnica. To preto, lebo my sme do nej dosadili spomalenie a konštantné a od ničoho nezávislé. Trecia sila však nie je taká. Vždy pôsobí proti smeru pohybu, občas teda mení smer. Preto nám rovnica predpovedala niečo nezmyselné.

Keď už vieme, čo je vo veci, je zvyšok úlohy ľahký. Zjavne nesmie byť rýchlosť niečoho v čase $t = 2$ s záporná, teda

$$v(2) = v_0 - 2gf \geq 0 \;\;\Rightarrow\;\; v_0 \geq 2gf.$$

Ak vyjadríme v_0 z rovnice pre prejdenú dráhu, dostaneme

$$v_0 = \frac{1+2gf}{2}.$$

Spojením posledných dvoch vzťahov máme

$$\frac{1+2gf}{2} \geq 2gf \;\;\Rightarrow\;\; 1 \geq 2gf.$$

Hodnota koeficientu trenia f teda nesmie presiahnuť $1/2g = 0{,}05$. Pri pohľade do tabuliek je jasné, že koeficienty šmykového trenia medzi bežnými látkami sú omnoho väčšie. Napríklad aj taká guma na ľade má hodnoty 0,1–0,2, bežný kov na dreve okolo 0,5. Na základe toho všetkého sa dá malé niečo podozrievať, že má kolieska. A to je všetko, milý Watson...

A – 1.3 Koleso, koleso, okolesilo si sa (opravoval Juro)

Odmerajte hmotnosť predného kolesa bicykla bez jeho odmontovania. Skúste vymyslieť čo najviac rôznych spôsobov a jeden zrealizujte. Ťažké? Trochu pomôžeme: Čo tak zmerať moment zotrvačnosti?

Ahojte cyklisti. Verím, že ste využili príležitosť a dali ste si po zimnej prestávke do poriadku svojich dvojkolesových tátošov. Zima a pár mesiacov v pivnici im určite neurobilo dobre. Hádam si každý z vás poľahky zohnal bicykel a s elánom sa pustil do riešenia úlohy.

Vo vašich riešeniach sa našlo mnoho zaujímavých nápadov, ako „odvážiť" koleso. Ako bolo naznačené v zadaní, veľmi schodnou cestou sa ukázalo meranie momentu zotrvačnosti kolesa, z ktorého potom určíme hmotnosť. Najjednoduchší spôsob bol dodať kolesu známe množstvo energie a využiť vzťah

$$E = \frac{1}{2} J\omega^2.$$

Energiu dodáme najľahšie tak, že na obvod kolesa namotáme motúz a na jeho koniec upevníme závažie. Ak potom necháme závažie padať, napr. zo stola dole, potenciálna energia závažia sa premení na kinetickú energiu závažia a rotačnú energiu kolesa.

Kolesu sa dala energia aj odobrať, napríklad trením, a využiť to isté. Iný prístup cez moment zotrvačnosti je popísaný podrobnejšie o pár riadkov nižšie. Medzi neuskutočnenými experimentmi sa našlo veľa ozaj zaujímavých. Od otáčania kolesa v magnetickom poli až po váženie podobného kolesa či podobného bicykla bez predného kolesa. Najviac sa mi však páčila myšlienka odhadnúť tepelnú kapacitu kolesa a dodať mu známe množstvo tepelnej energie. Stačí už len odmerať rozdiel teplôt a je to. Až na to, že tento postup je realizovateľný asi ako vypustenie sondy na obežnú dráhu Pluta, je to ozaj pecka.

Ja som zvolil veľmi jednoduchý spôsob merania, ktorý si vybralo aj veľa z vás. Na ráfik kolesa som pripevnil závažie a celé som to nechal kmitať ako fyzikálne kyvadlo. Vieme, že pre periódu jeho kmitov platí vzťah

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{m\,g\,a}}, \tag{1}$$

kde I je moment zotrvačnosti celého telesa vzhľadom na os otáčania, m jeho hmotnosť a a je vzdialenosť ťažiska telesa od osi otáčania. Koleso stotožníme s tenkou obručou s polomerom R a hmotnosťou M. Závažie bolo pripevnené k „obruči" vo vzdialenosti l od stredu a malo hmotnosť m. Ťažisko takéhoto telesa je vo vzdialenosti

$$a = \frac{m}{m+M} l \qquad (2)$$

od stredu obruče. Moment zotrvačnosti nášho telesa vzhľadom na os obruče je súčtom momentu zotrvačnosti vzhľadom na túto os obruče a závažia, ktoré zjednodušíme na hmotný bod. Na základe vzťahov pre momenty zotrvačnosti hmotného bodu a obruče

$$I = I_{závažia} + I_{obručb} = ml^2 + MR^2 . \qquad (3)$$

Zo vzťahov 1, 2 a 3 potom dostávame vzťah pre hmotnosť obruče

$$M = \frac{g}{4\pi^2} \frac{m l T^2}{R^2} - \frac{m l^2}{R^2} . \qquad (4)$$

Meral som hmotnosť plne nafúkaného 26 palcového kolesa z horského bicykla zloženého z častí od rôznych výrobcov. Vzdialenosť vonkajšej hrany ráfiku od stredu kolesa R = 30 cm. Ako závažie som použil časti menšej činky, ktorých vzdialenosť od stredu kolesa bola l = 35 cm. Uskutočnil som 3 krát po 5 meraní s rôznou hmotnosťou závaží. Po dosadení nameraných hodnôt mi vyšla hmotnosť celého kolesa 1,39 kg.

Aká bola nepresnosť môjho merania a čo ju spôsobilo? Pri výpočte som urobil niekoľko zjednodušení, ktoré skresľujú výsledok. Zanedbal som trenie v oske kolesa (ktoré nebolo až tak veľké, lebo som predtým koleso poriadne namazal), závažie som pokladal za hmotný bod a predstava kolesa ako tenkej obruče tiež nebola dobrá. Z hry úplne vyradila časť kolesa v blízkosti osi otáčania.

Ako som chyboval pri samotnom meraní? Dĺžkové údaje som meral relatívne presne a meranie času sa dá spresniť tým, že odmeriame čas trvania niekoľkých kmitov. Dalo by sa teda predpokladať, že výsledok 1,39 kg bude celkom odpovedať realite.

Niet nič jednoduchšieho, ako presvedčiť sa o jeho skutočnej hmotnosti. Kladiem ho na váhu a s hrôzou zisťujem, že jeho hmotnosť je takmer presne 1,72 kg. To je však mimo aj toho najširšieho intervalu, ktorý určujú moje merania. Studený pot mi zalieva tvár. Ako pozriem účastníkom do tváre? Kde sa stala chyba?

Našťastie mám aj pre toto rozumné vysvetlenie. Ako som už spomínal, vo výsledku nie je zarátaná hmotnosť strednej časti kolesa, náboja. Na internete som sa dozvedel, že ten na predné koleso má podľa výrobcu a kvality hmotnosť od 250 do 350 g. Hmotnosť kolesa bez náboja je teda asi 1,4 kg, čo naopak (prekvapujúco) dobre sedí s mojim meraním.

Pri hodnotení som dával dôraz na experimentálnu časť riešenia. Dôležitá bola diskusia o presnosti výsledku a prekvapilo ma, koľkí z vás koleso po experimente neodmontovali a neodvážili. Málo kto tiež uviedol, aký mal pred sebou bicykel. Určite uznáte, že cestný bicykel, horský a BMX-ka budú mať inak ťažké kolesá.

Šťastlivo ste sa dočítali až na koniec vzoráku. Verím, že ste si pri meraní užili aspoň toľko srandy ako ja a nezašpinili pri ňom pol bytu ako ja. Na záver by som chcel poďakovať mojej sestre za pomoc pri experimente, ktorý spájal dve veci, ktoré nemá rada. Bicykel a fyziku. Majte sa krásne a veľa šťastia.

A – 1.4 Počúvaj smäd (opravoval Tomáš)

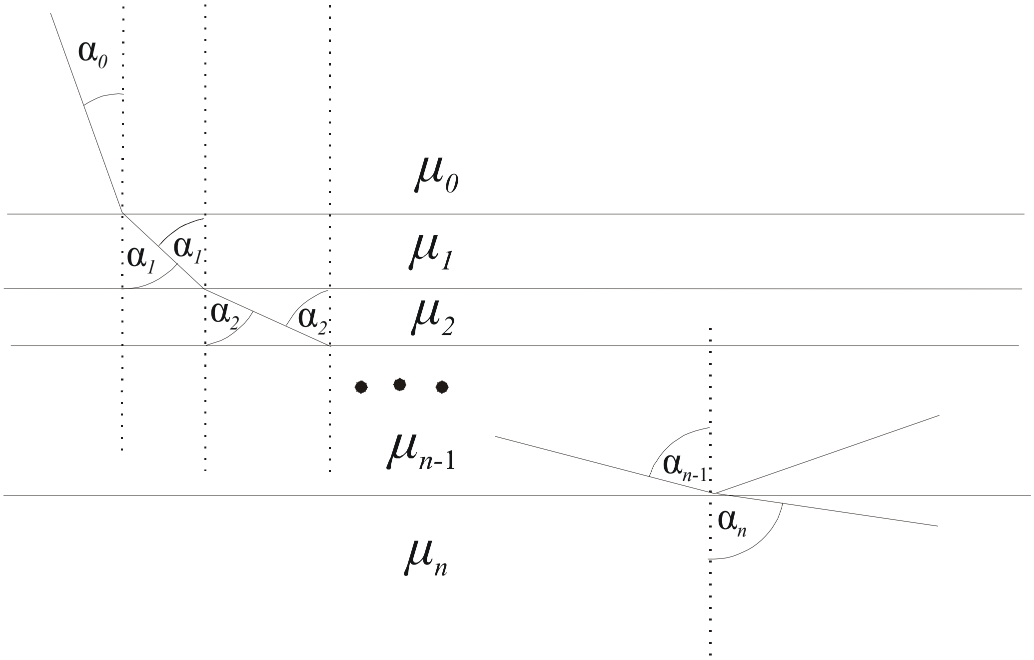
Len tak sa prechádzam so svojou ešte smädnejšou ťavou po púšti, keď tu, ľaľa, jazierko. Neprepadám radostnému idealizmu, som predsa fyzik a o fatamorgáne čosi viem… Viem, že jazero nie je nič iné ako obraz oblohy, ktorý vidím na piesku. Ako tento zákerný jav funguje? Vzduch tesne pri zemi má teplotu 70°C (s indexom lomu η_1 = 1,000235), vzduch vo výške mojich očí má teplotu 35°C (s indexom lomu η_2 = 1,000262). V akej vzdialenosti vidím jazero? (Okolo je rovina.) Ukážte, že vzdialenosť nezávisí od rozloženia teploty vzduchu medzi zemou a výškou očí.

Ako fatamorgána funguje, sme už v zadaní približne popísali. Lúč z neba vplyvom prostredia ohne svoj charakter tak, že skončí v oku – a navyše doň príde zdola, takže budí dojem „ľaľa voda“. V celom vzoráku sa budeme na tento jav pozerať odzadu, t.j. lúč vyletí z oka, postupne sa láme na vzduchu až nakoniec narazí do slnka, modrej oblohy, alebo mŕtvoly v piesku. A farbu tohto objektu budeme v danom smere pozorovať. Nechám na vás, aby ste si rozmysleli, že tento pohľad na pohľad (pozeranie sa) je úplne korektný (oko síce nevysiela žiadne lúče, ale v tomto modeli uvidíme presne to, čo by sme mali vidieť). Zákerné fatamorgánové lúče sú práve tie, ktoré vyštartujú z oka pod dostatočne veľkým uhlom α (pozri α_0 na obrázku). Keďže takýto lúč prechádza do stále redšieho a redšieho prostredia, bude sa lomiť tak, že pôjde stále viacej rovnobežne so zemou. Nakoniec, keď pôjde dostatočne rovnobežne, nastane úplný odraz a lúč sa odrazí. Následne sa zase bude lámať trochu „dohora“ – a nakoniec skončí v modrej oblohe. Naivné ľudské oko si myslí, že v smere ktorým vyslalo lúč sa ozaj nachádza čosi modré. A vysmädnutý pútnik rád uverí, že je to jazierko plné Spritu.

Mechanizmus sme teda vysvetlili, ako však porátať niečo tak slizké a spojité, ako je práve to „postupné“ ohýbanie lúča? Veľa z vás zvolilo intuitívny pštrosí prístup – akosi predpokladali, že na problém sa môžeme pozrieť tak, ako keby sa teplota vzduchu menila skokom, t.j. tesne pri zemi máme teplotu zeme, potom sa teplota naraz zmení. Takto tam máme iba jediné optické rozhranie. Lúč naň dopadá pod uhlom α a láme sa pod uhlom β, pričom

$$\sin\beta = (\eta_2/\eta_1)\sin\alpha.$$

Lúč sa odrazí vtedy, keď $\sin\beta > 1$, a teda $\alpha > \arcsin(\eta_1/\eta_2)$. Tento postup by bol úplne fajn, keby ste mali jednu informáciu navyše – že môžete predpokladať hocijaké rozloženie teploty vzduchu a vyjde to rovnako (vtedy môžem predpokladať moje švihlé schodovité rozvrstvenie vzduchu a rátať s ním). Čiže vtedy, keby ste vedeli práve to, čo ste mali dokázať. No a ako to teda malo vyzerať?



Budeme predpokladať, že lúč prechádza postupne cez n optických rozhraní, pričom i-te rozhranie oddeľuje vzduchy s indexmi lomu μ_i a μ_{i+1} (rozhrania číslujeme pekne od nuly, t.j. $\mu_0 = \eta_2$, $\mu_n = \eta_1$). Ďalej označíme α_i uhol, pod ktorým lúč dopadá na i-te rozhranie. Treba uvedomiť, že uhol lomu na i-tom rozhraní sa rovná uhlu dopadu na i+1 rozhraní. Preto máme: $\sin\alpha_{i+1} = (\mu_i/\mu_{i+1})\sin\alpha_i$. Čisto pre cvik zrátajme $\sin\alpha_1$, $\sin\alpha_2$:

$$\sin\alpha_3 / \sin\alpha_1 = (\mu_0/\mu_1)\sin\alpha_0,$$

$$\sin\alpha_2 = (\mu_1/\mu_2)\sin\alpha_1 = (\mu_0/\mu_2)\sin\alpha_0\,, \quad \sin\alpha_3 = (\mu_2/\mu_3)\sin\alpha_2 = (\mu_0/\mu_3)\sin\alpha_0.$$

Už je asi každému jasné, že smerujem k vzorčeku $\sin\alpha_n = (\mu_0/\mu_n)\sin\alpha_0$ (kompletný dôkaz by bol matematickou indukciou). Keďže posledné rozhranie má index n – 1, α_n je uhol lomu na poslednom rozhraní. Ak lúč prejde aj týmto rozhraním, definitívne to napikuje do piesku a žiadna fatamorgána sa nekoná. Aby sa to nestalo, musí nám vyjsť sin α_n > 1, toto je nesplniteľné pre žiadne α_n, a preto to signalizuje úplný odraz. Vtedy sa lúč od najspodnejšieho rozhrania odrazí a v jeho kariéristickom ohybe do neba mu už nič nezabráni. Zo sin α_n > 1 dostávame sin $\alpha_0 > \mu_n/\mu_0$, čo je presne ten výsledok, ktorý sme dostali pri uvažovaní skokového rozhrania.

Dorátať je to už jednoduché – dosadením zistíme α > 89,6°, teda pre všetky uhly väčšie ako táto hodnota budeme v danom mieste vidieť spásonosné jazero. A keďže mozog automaticky predpokladá, že jazero bude na úrovni okolitého terénu uvidíme ho vo vzdialenosti 230 m (pre 1,7 m vysokého dlháňa). V ideálnom prípade ho vidíme nekonečne veľké.

Na záver sa ostáva zamyslieť nad tým, čo sme to vlastne porátali. Problém spojitého lámania sa sme zamenili za rátanie lomu na n rozhraniach. Dôležité je to, že výsledok závisí iba od hodnôt μ_0 a μ_n. A preto, nech už sa teplota vzduchu mení akokoľvek zákerne, môžeme sa uvažovaním dostatočne veľkého n dostať k reálnemu prípadu s ľubovoľne veľkou presnosťou.

FYZIKÁLNY KOREŠPONDENČNÝ SEMINÁR

výsledková listina A – kategórie po 1. sérii letného semestra 19. ročníka

	Priezvisko	Meno	Trieda	Škola	A-1.1	A-1.2	A-1.3	A-1.4	☠	Σ
1.	Ďurák	Michal	4 C	G BST Lučenec	5.0	4.0	5.0	6.0		20.00
	Maták	Peter	4 E	G VBN Prievidza	5.0	4.0	5.0	6.0		20.00
	Závodný	Jakub	ok.	G BA Grösslingova	5.0	4.0	5.0	6.0		20.00
4.	Šoltésová	Mária	4 B	G BA Grösslingova	5.0	3.0	5.0	6.0		19.00
5.	Lalinský	Ján	se. A	G Varšavská cesta	5.0	2.0	5.0	6.0		18.54
6.	Štolc	Miroslav	ok.	G Nitra Párovská	5.0	4.0	4.5	5.0		18.50
	Trubenová	Barbora	4 A	G BA J. Hronca	5.0	3.0	4.5	6.0		18.50
8.	Neilinger	Pavol	4 A	G Dunajská Streda	5.0	4.0	3.0	6.0		18.00
9.	Astaloš	Róbert	3 A	G Rimavská Sobota	2.5	4.0	4.0	6.0		17.37
	Simančík	František	se.	G BA Grösslingova	4.0	2.0	4.5	6.0		17.37
11.	Baník	Dušan	4 A	G Poprad Popr. nábr.	5.0	4.0	4.0	4.0		17.00
12.	Kysel	Róbert	4 A	G BB Š. Moyzesa	5.0	3.0	4.5	3.5		16.00
13.	Molnárová	Katarína	3 D	G KE Šrobárova	5.0	4.0	3.0	6.0	-3	15.54
14.	Lauko	Martin	ok. A	G JL Martin	1.0	3.5	4.5	6.0		15.00
	Mánik	Tomáš	4 C	G BST Lučenec	2.5	4.0	2.5	6.0		15.00
16.	Dzetkulič	Michal	3 A	G PH Michalovce	5.0	0.5	2.5	5.5		14.82
17.	Batmendijnová	Zuzana	ok.	G T. Vansovej	1.0	4.0	3.5	6.0		14.50
	Mikulík	Andrej	4 B	G BA Grösslingova	2.0	3.0	5.0	4.5		14.50
19.	Brutovská	Eva	ok.	G Kežmarok	2.0	1.5	5.0	5.5		14.00
20.	Kováč	Adrián	3 A	G PH Michalovce	1.5	0.5	4.5	6.0		13.91
21.	Glaus	Peter	4 A	G BA J. Hronca	5.0	2.0	4.0	3.5	-1	13.50
22.	Krššák	Martin	ok. A	G Piaristické Nitra	0.5	2.0	4.5	6.0		13.00
23.	Sasák	Róbert	3 D	SPŠE Piešťany	1.5	0.5	3.5	5.0		12.00
24.	Vojtko	Andrej	se. A	G Skalica	1.5	4.0	2.5	–		9.44
25.	Ruman	Ján	se.	G BA Grösslingova	4.0	2.0	3.0	3.5	-5	8.91
26.	Džunko	Ján	se.	G Spišská Stará Ves	0.5	2.5	1.5	2.5		8.37
27.	Rušin	Michal	se.	G Spišská Stará Ves	0.5	2.5	1.5	1.0		6.70
28.	Imriška	Jakub	2 A	G BA J. Hronca	5.0	–	–	–		6.13
29.	Šibík	Juraj	3 D	G Považská Bystrica	0.5	2.0	2.5	–	-1	5.13
30.	Kubová	Miška	3 A	G Vrbové	0.5	1.0	0.0	0.5	-2	0.54