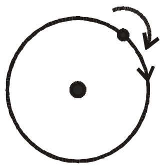
FYZIKÁLNY KOREŠPONDENČNÝ SEMINÁR

vzorové riešenia 3. série
A – kategória (staršia)
19. ročník
letný semester
školský rok 2003/2004

FKS, KZDF FMFI UK
Mlynská dolina
842 48 Bratislava
riesenia@fks.sk
info@fks.sk

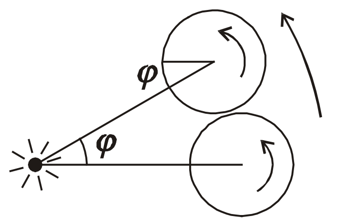
www.fks.sk

A – 3.1 Dobre sa pozrite (opravoval Matúš)



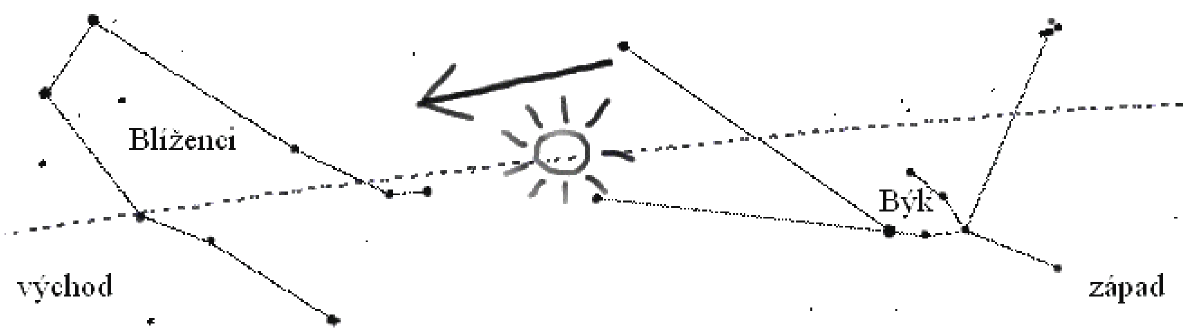
Ak na slnečnú sústavu nakukneme zhora, vidíme Zem obiehať okolo Slnka. Ak sa pozrieme lepšie, všimneme si aj to, že sa zároveň otáča. Tieto dva pohyby môžu mať smer rovnaký (ako na obrázku), alebo opačný. Pozorovaním (z povrchu Zeme prirodzene) zistite, ktorá z týchto možností je správna. Pomôcka: všimnite si pohyb hviezd a Slnka.

V tomto vzoráku bude viac obrázkov než nejakých ťažkých výpočtov (presnejšie povedané, tie budú chýbať úplne). Ale však vy sa snáď nenahneváte. Nenahneváte sa, že?
Spôsobov ako riešiť je viac, spomeniem dva. Najprv ten výpočtovejší. Kto zoberie do rúk múdru knihu (Encyklopédia astronómie, Tabuľky...), zistí, že perióda rotácie Zeme je zhruba 23 hodín 56 minút. Ako to, že náš deň má 24 hodín a všetko funguje perfektne? Je to jednoduché, v dôsledku obehu Zeme okolo Slnka prejde naša rodná planéta za deň akurát takú dlhú dráhu, že dotočenie sa o chýbajúci uhol jej trvá štyri minúty. Na obrázku vpravo je pokus o obrázok, akurát ten chýbajúci uhol φ je tam pre názornosť zveličený (v prípade Zeme totiž chýba to, čo prejde za jeden deň, teda zhruba jeden stupeň).

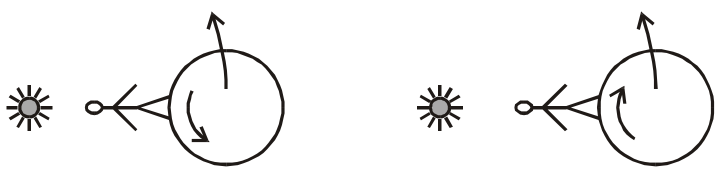


Nuž a ako vidieť aj z obrázka, na ňom Zem otáčajúca sa znázorneným smerom potrebuje tiež dobiehať ten chýbajúci uhol, takže to je presne náš prípad. Porovnaním s nakresleným smerom obehu okolo Slnka vidíme, že tieto dva pohyby majú rovnaký smer (proti smeru hodinových ručičiek).

Druhé riešenie je krajšie v tom, že sa pri ňom pozrieme na oblohu. Všetko je na nasledujúcom obrázku. Slnko sa počas roka pohybuje po ekliptike (čiarkovaná čiara) medzi súhvezdiami. Práve teraz napríklad mieri z Býka do Blížencov. Naproti tomu rotácia Zeme spôsobuje opačný denný pohyb Slnka z východu na západ. Dobre, toľko fakty.



Teraz príde ďalší názorný obrázok. Na oboch sa človek pozerá na Slnko nad hlavou, líšia sa však smermi otáčania Zeme. Treba si predstaviť, ktorým smerom sa bude z pohľadu pozorovateľa Slnko hýbať vplyvom rotácie Zeme a ktorým vplyvom jej obehu.



Na obrázku vľavo sú tie smery opačné, na obrázku vpravo rovnaké. Ak si spomenieme na to, ako je to v skutočnosti (o tom bol predchádzajúci odstavec), je jasné, že situácia vľavo je tá pravá :-) A, veľké to prekvapenie, opäť na nej vidíme smer rotácie zhodný so smerom obehu.

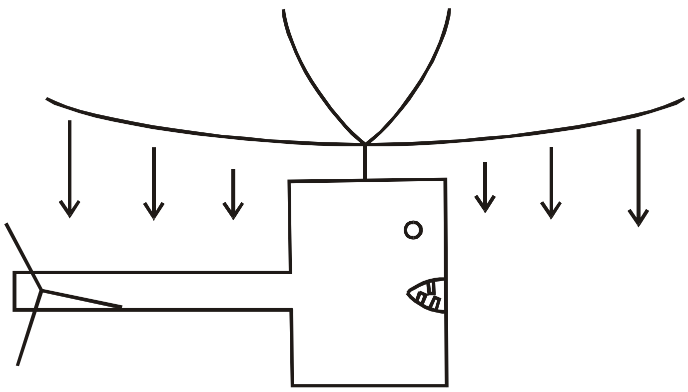
A je to!

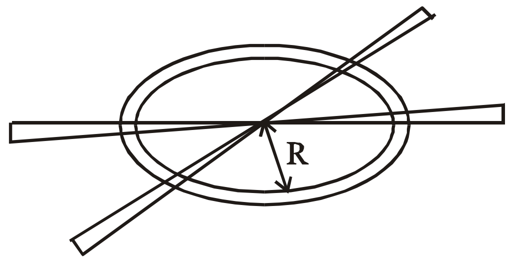
A – 3.2 Generačný skok (opravoval Tomáš)

Čosi visí vo vzduchu. A sú to 2 vrtuľníky. Otec a syn. Sú úplne rovnakí, vyrobení z rovnakých materiálov. Jediný rozdiel je v tom, že syn je presne polovičná kópia otca (formálne, syn je podobný s otcom s koeficientom ½). Oba vrtuľníky točia vrtuľami akurát tak, aby sa udržali na jednom mieste vo vzduchu. Aký je pomer uhlových rýchlostí, ktorými točia svoje vrtule? Aký je pomer výkonov, ktoré na vznášanie sa vynakladajú?

V riešení sa budete často stretávať s označením $x \sim y$. Myslí sa tým, že x je priamo úmerné y, teda $y = kx$, pričom konštanta úmernosti nezávisí od toho, aký veľký vrtuľník použijeme. Môže to byť napr. gravitačná konštanta, sklon vrtule, množstvo mlieka, ktoré si babička kúpila ráno v potravinách, ale nie objem nádrže vrtuľníka.

Keď sa pozrieme tesne nad alebo pod vrtuľu, zistíme, že vzduch prúdi smerom dolu nejakou v čase približne nemennou rýchlosťou v. Vodorovná zložka pohybu nás zaujímať nebude. Rýchlosť v samozrejme závisí od toho, kde presne nad vrtuľou meriame – či v strede alebo na kraji (pozri obrázok).





Predstavme si teraz kružnicu v rovine, v ktorej obiehajú lopatky vrtule, so stredom v strede vrtule a druhú takú istú kružnicu s polomerom o máličko väčším. Tieto dve kružnice nám ohraničia uzučké medzikružie, ktorého polomer označíme R a plochu S. Vzduch sa v tomto medzikruží pohybuje nadol rýchlosťou v. Plochou S za časový interval Δt pretečie množstvo vzduchu s hmotnosťou $\Delta t v S \rho$, kde ρ je hustota vzduchu. Tento vzduch zvýšil svoju hybnosť v kolmom smere z nuly na v, a preto jeho zmena hybnosti je $p \sim \Delta t v^2 S \rho$. Sila, ktorou naň musí pôsobiť vrtuľa, je $F\Delta t = p$, a teda $F \sim v^2 S \rho$. Ďalej si treba uvedomiť, že $v \sim R\omega$, kde ω je uhlová rýchlosť otáčania vrtule.

Prečo toto platí? Môžeme uvažovať 2 limitné prípady. V prvom prípade vzduch v danom mieste prúdi nadol len keď je na danom mieste lopatka vrtule. V tomto prípade by v prudko oscilovala – z nuly na hodnotu približne $R\omega\tan(\alpha)$ (α je sklon listu vrtule), v ktorej by sa držala nejaké percento celkového času. Preto aj pre priemernú hodnotu v by platilo $v \sim R\omega$. V druhom prípade je v stále konštantná, bez ohľadu na to, kde sa nachádza vrtuľa. Čo môžeme povedať o v teraz? Určite nie je väčšia ako $R\omega\tan(\alpha)$, pretože pri tejto rýchlosti už vrtuľa vôbec nezaberá o vzduch (porátajte si to). Realita je samozrejme niekde medzi týmito dvoma prípadmi a tvári sa namyslene, aká je ona zložitá. My ale vieme, že sa musí vtesnať medzi naše dva odhady, obidva úmerné $R\omega$.

Po dosadení do F máme

$$F \sim (R\omega)^2 S\rho.$$

Keď túto silu vyrátame pre všetky malé medzikružia a posčitujeme, musí sa výsledok rovnať tiaži vrtuľníka (alebo chystáme padáky), ktorá je v prípade veľkého 8-krát väčšia. Veľký vrtuľník bude v porovnaní s malým dosadzovať do vzorca 4-krát väčšie S a 2-krát väčšie R. Ak má byť teda vzťah splnený, musí dosadiť

$$\sqrt{2}$$

krát menšiu ω ako malý vrtuľník. Vtedy a len vtedy bude súčet všetkých síl presne 8-krát väčší a to vďaka tomu, že každá zo síl bude 8-krát väčšia. Prekvapuje vás že to bude menej ako pre malý vrtuľník? Uvedomte si, že aj malý hmyz alebo malé vtáctvo kmitá krídlami pomalšie než veľký hmyz a veľké vtáctvo.

A ako je to s výkonmi? Počas okamihu Δt zvýšil vrtuľník kinetickú energiu vzduchu s hmotnosťou $\Delta tvS\rho$ z nuly na $\Delta tv^3S\rho/2$, a teda výkon je úmerný výrazu

$$(R\omega)^3 S\rho \sim FR\omega.$$

Samozrejme, zase sčitujeme cez všetky medzikružia. Podobnou úvahou ako predtým zistíme, že výkon narástol $8\sqrt{2}$ krát. Čo myslíte, keby veľký vrtuľník mal dostatočne veľkú vrtuľu, mohol by levitovať na mieste pri rovnakom výkone ako malý? Odpoveď sa dozviete na záver.

No a vaše riešenia. K správnemu výsledku ste sa dopracovali viacerí. Ak na svojom riešení napriek správnym chrobákom nevidíte 5 bodov, je to kvôli nesprávnym zdôvodneniam, ktoré ste použili (niektorí dostali správny výsledok ozaj len čistou náhodou a odporúčam im kúpiť si športku, kým šťastie drží). Iné úvahy neboli až tak odveci, ale o ich správnosti ste ma tiež nepresvedčili (teší ma, ja som Tomáš paranoik). Nemyslím si napríklad, že použitie Newtonovho vzorca pre odporovú silu by tu bolo namieste. Po prvé, pri vysokých rýchlostiach závisí odporová sila až od tretej mocniny rýchlosti, po druhé, uvedomte si, že vrtuľa prichádza do vzduchu, ktorý sa už pohybuje smerom nadol – pred okamihom ním totiž prešla druhá lopatka vrtule. A veruže mohol.

A – 3.3 Neexperimentálka (opravoval Juro)

Aká je minimálna hustota kvapaliny, v ktorej je ešte schopný plávať človek? Uvažujte, že človek pláva rýchlosťou 2 ms^{-1}.

Ahojte plavci, plavkyne, plavčatá. Vyzerá to tak, že ste si všetci zobrali názov úlohy ozaj k srdcu a pojali túto úlohu čisto teoreticky. Bez strát na riešiteľoch sa teda poďme ponoriť do problému.

Na úvod si povedzme, čo budeme rozumieť pod slovným spojením „ešte schopný plávať“. Nebude to uháňanie vpred ako na olympiáde, ale skôr niečo, čo sa podobá na topenie. Človek vtedy bude stále na jednom mieste a iba najväčším úsilím zabráni tomu, aby sa ponoril. Bude teda celý ponorený vo vode. Ústa a nos, ktoré za takých okolností vyčnievajú nad hladinu, aby mohol dýchať, môžeme zanedbať.

Aké sily v tom momente pôsobia na nášho úbožiaka? Tiažová sila, ktorá ho nemilosrdne ťahá k zemi, vztlaková sila, ktorá ho nadnáša a sila, ktorou sa sám drží pri živote. Človek bude ešte schopný plávať, ak ich výslednica bude smerovať nahor, alebo bude v krajnom prípade nulová. Teda

$$F + F_{vz} \geq F_G,$$
$$F + V\rho g \geq mg.$$

Z toho

$$\rho \geq \frac{mg - F}{Vg},$$

kde V je objem človeka, ρ hustota našej neznámej kvapaliny a F spomínaná sila. Vyzerá to tak, že problémom bude určenie práve tejto sily.

Keď sa nejaké teleso pohybuje v kvapaline, tá na neho pôsobí odporovou silou veľkosti

$$F = C\frac{1}{2}\rho_0 S v^2,$$

kde C je súčiniteľ odporu, ρ_0 hustota kvapaliny, S plocha kolmého prierezu telesa v smere pohybu a v rýchlosť tohto pohybu. Prečo to spomínam? Však v danom prípade je náš človek v pokoji. Tento vzorec nám pomôže určiť silu F. Vieme totiž, že vo vode je človek schopný plávať rýchlosťou $v = 2\ \mathrm{ms^{-1}}$. Keďže môžeme povedať, že pri normálnom plávaní ide o rovnomerný pohyb, sila, ktorou vtedy človek pôsobí, je presne rovnaká ako odpor vody. Môžeme uvažovať, že človek má rovnakú hustotu ako voda. Potom je tiažová sila kompenzovaná vztlakovou a človek nemusí na jej prekonávanie „plytvať“ silami a môže sa sústrediť na pohyb vpred. Dostávame teda vzťah pre hľadanú hustotu kvapaliny:

$$\rho = \frac{mg - C\frac{1}{2}\rho_0 S v^2}{Vg}.$$

Kolmý prierez človeka v smere plávania je asi 0,08 m^2 (0,4.0,2). Súčiniteľ odporu bude asi 0,2 až 0,3, človek je vo vode celkom dobre aerodynamický, či skôr hydrodynamický (pre porovnanie vypuklá guľa 0,34, aerodynamický tvar 0,055). Náš človiečik má hmotnosť 80 kg a teda objem 80 l. Dosadením dostávame číselnú hodnotu asi 900 kg.m^{-3}.

Náš odhad asi nebude príliš presný. Niektoré veličiny sme museli odhadnúť, no najväčších nepresností sme sa asi dopustili preto, lebo sila, ktorou je schopný človek vo vode „hnať sa dopredu“, je závislá od rýchlosti, ktorou sa mu to darí. Môžeme predpokladať, že v stojatej vode človek vyvinie silu ešte o čosi väčšiu ako keď pláva 2ms^{-1}. Hodnota bude samozrejme závisieť aj od konkrétneho človeka, od jeho hmotnosti a hustoty.

Vaše porozumenie úlohy sa, bohužiaľ, často končilo pri jej názve, napriek tomu, že zadanie bolo také krátke. Rozlične ste si vysvetľovali, čo je to „byť ešte schopný plávať“, zadanú rýchlosť plávania... Máloktorí ste správne využili rýchlosť, ktorá bola daná v zadaní. Viac sa na tomto mieste k vašim riešeniam nebudem vyjadrovať, obsiahlejšie som ich okomentoval pri opravovaní, nakoľko skoro každý z vás postupoval inak.

Doplávali sme až na koniec vzoráku. Ostáva mi už len poblahoželať víťazom, tretiakom popriať veľa síl do konca školského roku, štvrtákom šťastia na prijímačkách a všetkým krásne a veselé prázdniny. Majte sa krásne.

A – 3.4 Krv (opravovala Rebro)

Keď chceme vedieť, koľko krvi má daná osoba, a radi by sme to zistiť bez ujmy na jej zdraví, dá sa to aj takto: Do jej krvného obehu vstrekneme tekutinu s objemom $V_1 = 10\ cm^3$ obsahujúcu rádioaktívne atómy ^{24}Na s aktivitou $A_1 = 2500\ s^{-1}$. Jeho polčas rozpadu je $T = 15$ hod. Po čase $t = 10$ hod odoberieme vzorku krvi s objemom $V_2 = 4\ cm^3$ a aktivitou $A_2 = 1\ s^{-1}$. Aké množstvo krvi obsahuje naša osoba?

Milo ma prekvapilo, že väčšina z vás nemala s týmto príkladom problémy. Ako každý príklad, aj tento sa dal riešiť niekoľkými spôsobmi, ktoré však tentokrát boli veľmi podobné. Poďme teda k príkladu.

Bolo si potrebné uvedomiť nasledujúce. Po desiatich hodinách sa rádioaktívna látka dokonale premieša s krvou. Ďalej nám tu platí zákon rádioaktívneho rozpadu. Rádioaktivita A nejakej látky s objemom V_r sa rovná počtu vyžiarených častíc (či už α, β alebo γ) z danej látky za sekundu. Keď toto množstvo látky rozmiešame s nerádioaktívnou látkou s objemom V_n, dostaneme množstvo zmesi s objemom $V_r + V_n$, ale jej rádioaktivita bude stále A (počet vyžiarených častíc za sekundu sa nezmení). Ak teda do človeka s objemom krvi V vstrekneme rádioaktívnu látku s aktivitou $A_1 = 2500\ \mathrm{s}^{-1}$ a objemom $V_0 = 10\ \mathrm{cm}^3$, bude mať človek v žilách zmes krvi a našej látky s objemom $V + V_0$ a rádioaktivitou A_0. Po desiatich hodinách to bude už inak, lebo rádioaktívna látka sa nám rozpadá a platí $A_{10} = A_0 e^{-\lambda t}$, kde A_{10} je aktivita našej zmesi krv + rádioaktívna látka po desiatich hodinách, λ je rozpadová konštanta, pričom $\lambda = \ln 2 / T$, T je polčas rozpadu. A_{10} si teda vieme dopočítať. Tiež zo zadania vieme, že ak človeku po desiatich hodinách odoberieme vzorku krvi s objemom $V_2 = 4\ \mathrm{cm}^3$, bude mať aktivitu $A'_{10} = 1\ \mathrm{s}^{-1}$. Keďže aj tu funguje priama úmera, môžeme pokračovať jednoduchou, ale zato šikovnou trojčlenkou, ktorá je vždy poruke:

$$\frac{A_{10}}{V + V_0} = \frac{A'_{10}}{V_2}.$$

Dosadíme, upravíme, vyjadríme a máme

$$V = V_2 \frac{A_0}{A'_{10}} e^{-\frac{\ln 2}{T}t}.$$

Po dosadení hodnôt zo zadania $V = 6{,}3\ \mathrm{l} = 6300\ \mathrm{cm}^3$-taký väčší chlap.

Na záver ešte pár úvah. Táto metóda je len približná. Jednak časť rádioaktívnej látky by mohli z tela človeka vylúčiť obličky, jednak časť by mohli absorbovať orgány...priznávam, že neviem, ale možno zistím od jadrovákov. Ďalej ma tak napadlo, či sa tento izotop sodíka rozpadá na niečo stabilné alebo nie. Čerpám informácie od Peťa Matáka (týmto ho pozdravujem a ďakujem), že rozpadom ^{24}Na vzniká ^{24}Mg a ten je stabilný, t.j. ďalej nevyžaruje. Ak by vyžaroval, museli by sme započítavať aj jeho „aktivitu“. A úplne nakoniec, pravdepodobne táto metóda sa na určenie množstva krvi už dnes nevyužíva, ale v medicíne napríklad pri diagnostikovaní nádorových ochorení, vám do tela vstreknú rádioaktívnu látku určitých vlastností a potom vás „presvecujú“ a rádioaktívna látka im zviditeľní, čo potrebujú. Po nejakom čase sa však rozpadne, t.j. nemá škodlivé účinky na telo (ľudovo volané CT-čko).

FYZIKÁLNY KOREŠPONDENČNÝ SEMINÁR

výsledková listina A – kategórie po 3. sérii letného semestra 19. ročníka

	Priezvisko	Meno	Trieda	Škola	②	A-3.1	A-3.2	A-3.3	A-3.4	☠	Σ
1.	Maták	Peter	4 E	G VBN Prievidza	38.0	5.0	5.0	5.0	5.0		58.00
2.	Závodný	Jakub	ok.	G BA Grösslingova	37.0	5.0	5.0	5.0	5.0		57.00
3.	Neilinger	Pavol	4 A	G Dunajská Streda	32.0	2.5	4.0	5.0	5.0		48.50
4.	Astaloš	Róbert	3 A	G Rimavská Sobota	29.4	5.0	4.0	4.0	5.0		47.90
5.	Lauko	Martin	ok. A	G JL Martin	26.5	5.0	4.0	5.0	5.0		45.50
6.	Dzetkulič	Michal	3 A	G PH Michalovce	29.6	2.5	2.5	4.5	5.0	-1	44.33
7.	Ruman	Ján	se.	G BA Grösslingova	27.8	5.0	0.5	4.5	5.0		43.94
8.	Baník	Dušan	4 A	G Poprad Popr. nábr.	31.5	4.0	0.5	4.5	3.0		43.50
9.	Brutovská	Eva	ok.	G Kežmarok	24.0	5.0	4.0	5.0	5.0		43.00
10.	Mikulík	Andrej	4 B	G BA Grösslingova	26.5	1.5	4.0	5.0	5.0		42.00
11.	Molnárová	Katarína	3 D	G KE Šrobárova	27.0	4.0	3.5	3.0	5.0	-2	41.59

12.	Sasák	Róbert	3 D	SPŠE Piešťany	23.0	5.0	1.0	4.0	5.0		39.12
13.	Krššák	Martin	ok. A	G Piaristické Nitra	23.5	5.0	0.5	5.0	5.0		39.00
	Kysel	Róbert	4 A	G BB Š. Moyzesa	29.0	1.5	3.0	1.5	5.0	-1	39.00
15.	Šoltésová	Mária	4 B	G BA Grösslingova	28.5	–	4.0	–	5.0		37.50
	Trubenová	Barbora	4 A	G BA J. Hronca	18.5	5.0	4.0	5.0	5.0		37.50
17.	Lalinský	Ján	se. A	G Varšavská cesta	34.2	–	–	–	–		34.24
18.	Vojtko	Andrej	se. A	G Skalica	20.4	2.0	1.0	3.5	5.0		33.40
19.	Simančík	František	se.	G BA Grösslingova	32.2	–	–	–	–		32.18
20.	Imriška	Jakub	2 A	G BA J. Hronca	16.1	5.0	4.0	–	5.0		31.35
21.	Ďurák	Michal	4 C	G BST Lučenec	31.0	–	–	–	–		31.00
22.	Džunko	Ján	se.	G Spišská Stará Ves	16.7	4.0	2.0	1.5	5.0		30.64
23.	Rušin	Michal	se.	G Spišská Stará Ves	14.5	4.5	3.5	1.5	5.0		30.21
24.	Batmendijnová	Zuzana	ok.	G T. Vansovej	26.0	–	–	–	–		26.00
25.	Šibík	Juraj	3 D	G Považská Bystrica	16.1	4.0	1.0	–	–	-1	21.25
26.	Štolc	Miroslav	ok.	G Nitra Párovská	18.5	–	–	–	–		18.50
27.	Mánik	Tomáš	4 C	G BST Lučenec	15.0	–	–	–	–		15.00
28.	Kováč	Adrián	3 A	G PH Michalovce	13.9	–	–	–	–		13.91
29.	Glaus	Peter	4 A	G BA J. Hronca	13.5	–	–	–	–		13.50
30.	Kubová	Miška	3 A	G Vrbové	12.0	–	–	–	–		12.04

Milá naša mládež!

Tak je to tu. Koniec tretej série, a tým aj letného semestra. Iste ešte nostalgicky spomínate na to, ako ste pri okienku na pošte alebo s ukazovákom na entry posielali prvú sériu. Nasledujú 2 mesiace trpkého odlúčenia, ktoré dúfam prežijet(m)e v zdraví a do školy sa vrátite plní elánu a chuti riešiť FKS. S tými úspešnejšími z vás sa ešte stretneme na sústredku, menej úspešní im môžu iba závidieť, lebo tentoraz to naozaj bude stáť za to! Je pravda, že vedúci ešte nemajú celkom jasno v tom, že za čo, ale na vyjasnení týchto pojmov sa intenzívne pracuje. (kto by túto vetu nepoznal, v diplomatických kruhoch znamená.. veď viete..) V každom prípade sústredko určite v každom z vás zanechá hlboké, nezmazateľné dojmy.. keď raz budete 80 roční starci a starenky, zuby žiadne, rúk len pár, z úst vytekajú nazelenalé sliny (toto mi asi vycenzurujú, ale realita je krutá! Teraz pred ňou ešte môžete zatvárať oči, ale v 80-ke už ani nebudete mať čo zatvárať). Každé ráno vstanete, zanadávate na politiku, do kávy si nalámete rohlík a vyjdete na terasu vyhrievať sa na slnko. Vonku je idyla, vtáčiky štebotajú, tráva je zelená, z blízkeho jazera počuť volanie o pomoc. Zvonku hreje Oskar a vás zrazu napadne: veď ja som bol voľakedy mladý! Prekvapený týmto zistením vás začnú zvnútra hriať spomienky na všetky šibalstvá, ktoré ste za mladi stvárali a všetky haluze ktorých ste sa zúčastnili. Aj sústredko FKS je medzi nimi. Aj ono hreje. A tak sa minie deň. A príde ďalší. Aby 80 - ročnú skleroticú myseľ zase šokovalo poznanie – veď ja som bol voľakedy mladý...

A preto, poďte na sústredko, a tí čo nebudete pozvaní, neprepadajte panike, kým budete 80 roční, máte ešte toľko príležitostí… Poniektorí ešte aj 2. Tak vážne. Pamätajte na staré fyzikálne porekadlo – „Kto má v hlave, ten má v hlave“ (je to s ním ako s pranostikou – nikto nevie celkom presne prečo, ale je to tak).

Fyzika a počítače III. – pohyb pri zadanej sile

Máme pre sebou poslednú časť seriálu o tom, ako môže fyzik využívať počítač. Tentoraz bude témou to, ako skúmať pohyb telesa na ktoré pôsobí voľajaká sila. Možno sa to nezdá, ale nie je to jednoduchý problém. Sily sú totiž všakovaké a veľmi často sa s nimi ťažko počíta.

No ale pomaly. Najjednoduchšou silou je „žiadna sila“. Ako všetci vieme, teleso sa vtedy pohybuje rovnomerne priamočiaro s počiatočnou rýchlosťou. Pre jednoduchosť budeme zatiaľ skúmať jednorozmerný prípad (pohyb po priamke) – polohu telesa označíme x, jeho rýchlosť v. Ak počiatočná rýchlosť telesa je v^0 a počiatočná poloha je x^0, tak

$$x(t) = x^0 + v^0 t.$$

Ak chceme toto naprogramovať pomocou počítača, najjednoduchšie je „nasekať“ čas na dieliky dĺžky Δt a opakovať nasledovnú slučku (druhý riadok znázorňuje zvýšenie času o Δt)

$$\begin{gathered} x(t+\Delta t) = x(t) + v^0 \cdot \Delta t. \\ t \to t + \Delta t. \end{gathered}$$

Problém je, že nejaké sily väčšinou predsa len pôsobia. Taká sila môže závisieť od rýchlosti telesa v (takou je napríklad sila aerodynamického odporu), ale tiež od polohy telesa x (tak je to napríklad pri závaží na pružine) či od času t (trebárs rozhojdávame hojdačku, sila ktorou na ňu pôsobíme závisí nejako od času). Označme teda našu silu $F(x, v, t)$. Podľa Newtonovho zákona vieme, že teraz už nebude pohyb telesa rovnomerný, ale objaví sa zrýchlenie $a = F/m$.

Nuž a na čo je dobré zrýchlenie? Na to, že mení rýchlosť v. K súradnici telesa x preto nemôžeme pripočítavať vždy tú istú hodnotu $v\,\Delta t$ tak, ako pri pohybe bez sily. Preto treba osobitne počítať aj to, ako sa vyvíja rýchlosť samotná. No a keďže vieme, že zrýchlenie je $a = \Delta v/\Delta t$, máme

$$v(t+\Delta t) = v(t) + a(t) \cdot \Delta t.$$

Teraz už môžeme zapísať celý algoritmus pre pohyb telesa pri danej sile, je to

$$\begin{gathered} a(t) = F(x, v, t)/m, \\ v(t+\Delta t) = v(t) + a(t) \cdot \Delta t, \\ x(t+\Delta t) = x(t) + v(t) \cdot \Delta t, \\ t \to t + \Delta t. \end{gathered}$$

Podobne ako pri pohybe bez sily sme potrebovali zadať počiatočnú polohu a rýchlosť, ani teraz sa bez nich nezaobídeme.

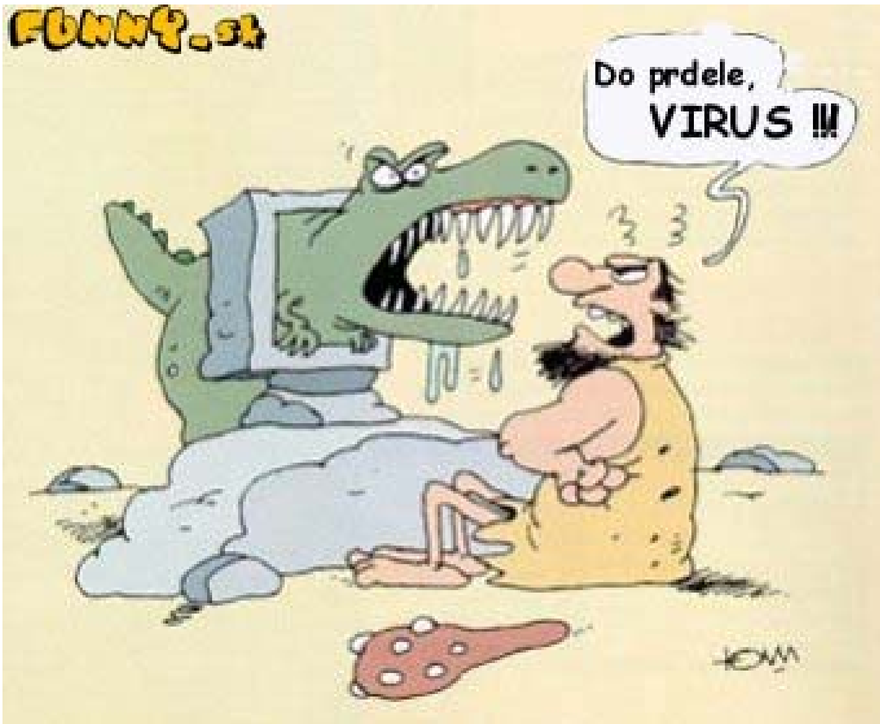
Ešte treba povedať, že rozumné výsledky dostaneme iba vtedy, ak zvolíme dostatočne malú veľkosť Δt (väčšinou sa nazýva časový krok). To je pochopiteľné – ťažko môžeme očakávať dobré priblíženie k nerovnomernému pohybu, ak ho skladáme pomocou jednu sekundu trvajúcich rovnomerných pohybov! Zaujímavé je (vyskúšajte si to!), že ak zvolíme dosť malý časový krok, na poradí jednotlivých výpočtov v našom algoritme prakticky nezáleží. Kľudne môžeme najprv vypočítať novú rýchlosť a potom pomocou nej posunúť teleso, alebo naopak – najprv ho posunúť, až potom zistiť novú rýchlosť. To je dobré – ten algoritmus si vďaka tomu netreba pamätať tak presne.

Aby sme neboli takí teoretickí, skúsme si príklad nejakého výpočtu. Napríklad také závažie na pružine. Nech na začiatku je jeho výchylka $x^0 = 0$, rýchlosť v^0 nejaká. Pružina naň pôsobí silou $F = -kx$ (teda sila závisí iba od polohy, nie od rýchlosti). Bude teda $a = -kx/m$ a vyššie uvedeným algoritmom môžeme nakŕmiť bársaký počítač. Skúste si to!

Je mnoho iných zaujímavých úloh, ktoré sa počítať takmer nedajú, ale numerické riešenie sa dá urobiť krásne. Napríklad také kyvadlo, kde pevnú niť vymeníte za pružinu. Alebo strieľanie z dela s odporom vzduchu – zistíte, že ideálny uhol už nie je 45°...

Je toho veľa, tak hor sa k počítaču!


FUNNY.sk
OK, tlač!


FUNNY.sk
Do prdele, VIRUS !!!