FYZIKÁLNY KOREŠPONDENČNÝ SEMINÁR

vzorové riešenia 3. série
B – kategória (mladší)
19. ročník
zimný semester
školský rok 2003/2004

www. **.sk**

FKS, KZDF FMFI UK
Mlynská dolina
842 48 Bratislava
riesenia@fks.sk
info@fks.sk

B – 3.1 Gravitačná úloha (opravovala Saša Saxová)

Polomer planéty Jupiter je asi R = 71800 km. Štvrtá Jupiterova družica Kalisto je od stredu planéty vzdialená približne 26R a jej obežná doba je T = 16,7 dňa. Určite gravitačné zrýchlenie na povrchu Jupitera.

Milí astronómovia! Tento príklad väčšine z vás nerobil problémy. Najdôležitejšou myšlienkou riešenia celého problému je uvedomiť si, že Kalisto je družica Jupitera a to, že obieha okolo Jupitera, majú na svedomí dve sily, ktoré pôsobia na družicu. Konkrétne - *gravitačná sila*, ktorou na Kalisto pôsobí Jupiter a *odstredivá sila*, ktorá pôsobí na družicu pri obiehaní Jupitera. Na to, aby družica obiehala (obežnú dráhu považujeme za kruhovú), neodbehla a ani „nespadla“, je potrebné, aby tieto dve sily boli v rovnováhe. Tu je potrebné spomenúť, že zanedbávame pôsobenie síl, ktoré sú v porovnaní s týmito dvoma silami malé – napr. pôsobenie Slnka, planét, či iných vesmírnych telies.

Označme M hmotnosť Jupitera, m hmotnosť Kalista, κ je gravitačná konštanta, polomer Kalista zanedbávame. Ďalej obežná doba je T, obehovú rýchlosť označíme v. Pre obehovú rýchlosť Kalista, ktoré obieha Jupiter po kruhovej dráhe s polomerom $26R$, máme $v = 2\pi(26R)/T$. Teraz už máme všetko pripravené a môžeme sa vrátiť ku spomínanej rovnováhe gravitačnej a odstredivej sily a dosadiť, čo vieme

$$F_g = F_o,$$

$$\kappa \frac{Mm}{(26R)^2} = m\frac{v^2}{(26R)}.$$

Po úprave dostávame vzťah

$$\kappa M = \frac{4 \cdot 26^3 \pi^2 R^3}{T^2}. \tag{1}$$

Teraz sa pozrime na to, ako sa vypočíta gravitačné zrýchlenie a_J na povrchu Jupitera. Predstavme si na povrchu Jupitera nejaké živé stvorenie (čo ak tam naozaj nejaké je?:) o hmotnosti m_0. Akou gravitačnou silou naň pôsobí Jupiter? Na jednej strane si túto silu môžeme vyjadriť pomocou gravitačného zrýchlenia ako $m_0 a_J$, na strane druhej ako gravitačnú silu pôsobiacu medzi telesom hmotnosti M a hmotnosti m_0 vo vzdialenosti R ako $\kappa M m_0/R^2$. Stále ide o tú istú silu, a teda tieto dva vzťahy môžeme dať do rovnosti:

$$m_0 a_J = \kappa \frac{M m_0}{R^2}.$$

Po využití nášho vzťahu (1) a úprave uvedenej rovnosti dostaneme vytúžené vyjadrenie gravitačného zrýchlenia na povrchu Jupitera

$$a_J = \frac{4 \cdot 26^3 \pi^2 R}{T^2}.$$

Ostáva nám už len správne dosadiť hodnoty, ktoré boli uvedené v zadaní, premenené do správnych jednotiek. Teda $R = 71800$ km $= 7{,}18.10^7$ m a $T = 16{,}7$ dňa $= 1442880$ s. Po vyčíslení dostávame výsledok $a_J = 23{,}9\ \mathrm{ms}^{-2}$. Pre porovnanie, tabuľky uvádzajú hodnotu $23{,}12\ \mathrm{ms}^{-2}$, takže naše zanedbania iných síl nenarobili príliš veľa škody.

Mhm, tak to by sme sa riadne „držali pri zemi“ na tom Jupiteri:) a nevyskakovali, že sa nám už nezadržateľne blížia prázdniny... Ale na Zemi môžeme od radosti skákať, koľko len chceme a s ľahkosťou vybehnúť do prírody. Pekné leto vám prajem!

B – 3.2 Trabantovica (opravoval Džony)

Po diaľnici uháňajú dva trabanty rýchlosťou 100 km/h. Zrazu si jeden z nich povie tak už dosť a zvýši rýchlosť na 200 km/h. Akú zmenu kinetickej energie pri tom pozoruje vodič druhého trabanta, akú pozoruje človek stojaci na zemi a akú ujo, ktorý celú situáciu s nadhľadom pozoruje zo Slnka? Ktorý pozoruje skutočnú zmenu kinetickej energie a prečo? Koľko benzínu naozaj minul trabant pri zrýchlení?

Ahojte.

Táto úloha bola náročnejšia, ako sa na prvý pohľad zdalo. Poďme na to teda od konca. Koľko benzínu minie trabant pri zrýchlení? Presne toľko, aby jeho spálením získal energiu na zrýchlenie. To znamená, že jeho množstvo by malo byť priamo úmerné rozdielu kinetických energií pred a po zrýchlení. A aký je veľký tento rozdiel? Označme v = 100 km/h, m hmotnosť trabantu a pozrime sa na situáciu: pomalšie frčiacemu trabantu sa zdá, že zmena energie by mala byť: $\Delta E_1 = mv^2/2 - 0$. Človek stojaci na Zemi zase vidí zmenu energií

$$\Delta E_2 = m(2v^2)/2 - mv^2/2 = 3mv^2/2.$$

Toto je situácia, ktorú skúsenejší fyzici nazývajú prúúúúser. Keby sme sa zmierili s takýmto výsledkom, znamenalo by to, že trabant spáli napr. 1 dcl benzínu vzhľadom na pomalší trabant a 3 dcl benzínu vzhľadom na ujka pri ceste. Znie to ako dosť veľká haluz a aj to ňou je. Niektoré veličiny môžu byť v rôznych sústavách iné (napríklad rýchlosť), objem spáleného benzínu ale ťažko. A tu je to miesto, kde sa treba filozoficky zmyslieť a odpovedať si na otázku, čo to vlastne kinetická energia je? Keď poviem, že autíčko má v nejakej inerciálnej vzťažnej sústave nejakú rýchlosť a jej odpovedajúcu kinetickú energiu napr. 2 Jouly, znamená to, že ak by som dokázal auto zastaviť v danej vzťažnej sústave na nulu bez toho aby som porušil inercialitu sústavy, získam energiu presne 2 Jouly. Teda môžem hovoriť, že Zem má na rýchlo letiacu molekulu vzduchu ohromnú kinetickú energiu. Túto energiu samozrejme v praxi nikdy nevyužijeme, ale rátať s ňou môžeme.

No a ako je možné, že zmena energií vychádza v rôznych sústavách rôzne? Nasleduje kľúčová myšlienka, na ktorú, bohužiaľ, mnohí z vás neprišli. Okrem zrýchľujúceho trabantu zmení svoju rýchlosť aj matka Zem. Možno ste trochu šokovaní, čo sem ťahám Zem. Veď pri väčšine klasických energetických výpočtov zmenu rýchlosti Zeme vôbec neuvažujeme a vychádza to. Tak prečo zrazu? V ďalšom texte budem uvažovať, že Zem je plochý nerotujúci disk (pozdravujem priaznivcov Pratchetta) s hmotnosťou M. Pravda to síce nie je, ale pokiaľ nám ide len o vysvetlenie paradoxu, je to postačujúci model a ráta sa s ním oveľa ľahšie ako s rotujúcou Zemou. Pozrite sa na výraz:

$$((h + V)^2 - V^2)M/2 = (h^2 + 2hV)M/2,$$

V reprezentuje rýchlosť Zeme, h nejakú malú zmenu tejto rýchlosti. Ak je h maličké a $V = 0$, tak tento výraz v zátvorke je len h^2, čo je ozaj veľmi málo. Ak by ale V bolo niečo veľké, tak $2hV$ začína byť celkom dosť a nedá sa len tak zanedbať. A to je presne náš prípad: Vzhľadom na pomalší trabant sa pohybuje Zem rýchlosťou $V = v$. Zo zákona zachovania hybnosti je malá zmena jej rýchlosti rovná

$$h = mv/M$$

a zmena energie Zeme (vzhľadom k úvahám uvedeným vyššie) je približne

$$2VMh/2 = mv^2/2.$$

A to je presne rozdiel medzi zmenami energií, ktoré pozorovali pomalší trabant a do Zeme zasadený pozorovateľ. Celá chyba v úvahe teda spočívala v tom, že pomalší trabant nemôže pri výpočtoch zanedbať zmenu rýchlosti Zeme. Môžete si energie zrátať aj presne – bez zanedbania zmeny rýchlosti Zeme pri stojacom pozorovateľovi a členu h^2 pri úprave vyššie uvedeného výrazu – energie sa zase budú rovnať.

Príjemné leto a oddýchnite si na chvíľku od fyziky. Ale dúfam, že v septembri sa "uvidíme" o5. Ciao.

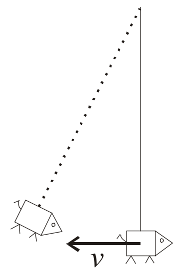
B – 3.3 Veselé prasa (opravoval Škrek)

Prasa si hovie na ideálnej niti dĺžky l a je mu dobre (viď obrázok). V jednom okamihu chytíme horný koniec nite a začneme ho ťahať: a) v smere šípky rýchlosťou veľkosti v, b) v smere šípky so zrýchlením a. V ťahaní pokračujeme donekonečna. Zrátajte maximálnu výšku, do ktorej sa prasa počas svojho pohybu dostane! Prasa aproximujte hmotným bodom.

Našťastie väčšina z vás pochopila, že táto úloha nie je experimentálna a teda nehrozí, že by sa vedenie FKS malo zodpovedať za nabádanie k rituálnym vraždám prasiat v tomto ročnom období. Tak či onak som istú chvíľku strávil hompáľaním fiktívneho prasiatka na špagátiku neveriac výpočtom. Nutné poznamenať, že experiment mi nevyšiel. No ale poďme k samotnému riešeniu.

a) Z pohľadu prasaťa, ktoré ma navyše všetko na ideálnej nitke dĺžky l, to nevyzerá veľmi pochopiteľne. Radšej sa na úlohu pozrime z pohľadu závesu. Teda, prenesme sa do inerciálnej vzťažnej sústavy spojenej s najvyšším bodom lana. Odtiaľ to vyzerá až veľmi jednoducho: to, že začneme ťahať niťou sa prejaví presne tak, akoby niekto náhle drcol do prasiatka a to sa začalo pohybovať rýchlosťou v opačným smerom, pričom vrch lana je samozrejme stále v pokoji. Kam až prasiatko vystúpi? Zákon zachovania energie nám poslúži ako vhodný nástroj. Potenciálnu energiu v hĺbke l pod závesom označme za nulovú. Kinetická energia v tomto mieste je $E_{k1} = mv^2/2$. Najvyššiu potenciálnu energiu dosiahne prasiatko vtedy, keď kinetická energia bude nulová, a teda $mgh = mv^2/2$, z čoho

$$h = \frac{v^2}{2g}.$$



obr.1

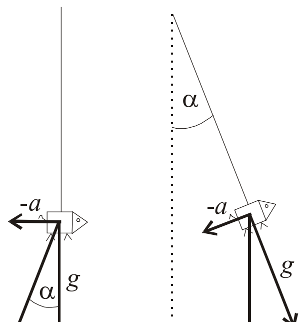
Čiže maximálna výška je h, pokiaľ je rýchlosť v menšia ako kritická rýchlosť

$$v_k = 2\sqrt{gl}\ .$$

Inak je maximálna výška h automaticky rovná $2l$ (kvôli obmedzeniu dĺžky lana). Kto neverí, nech si to vypočíta.

b) Tak, a teraz ťaháme prasa s konštantným zrýchlením a v smere šípky. Zase sa prenesme do sústavy – tentokrát neinerciálnej – spojenej s vrchným koncom lana. Na prasa pôsobí sila (a teda aj zrýchlenie) proti zmene jeho rýchlosti (tak ako je naznačené na obrázku 2), a samozrejme gravitačné zrýchlenie (taktiež zaznačené). Výslednica vektorov $\vec{g} + (-\vec{a})$ je teda celkovým (konštantným) zrýchlením pôsobiacim na prasa a z jeho pohľadu má takú istú funkciu ako pre nás gravitačné zrýchlenie. Táto výslednica zviera so zvislicou uhol

$$\mathrm{tg}(\alpha) = a/g \Rightarrow \alpha = \mathrm{arctg}(a/g).$$



obr.2

Ak teraz celú situáciu otočíme o uhol α tak, aby sa nám výslednica $\vec{g} + (-\vec{a})$ zdala kolmá, dostávame vlastne klasické kyvadlo, len s inak veľkým zrýchlením. Toto ale isto nebude meniť výšku, do ktorej sa prasa dostane – v otočenej situácii kmitalo medzi uhlami $\pm\alpha$, takže v pôvodnej situácii musí kmitať medzi uhlami 0 a 2α. No a výšku v tejto krajnej polohe už zrátame ľahko: nakreslíme si obrázok (obr.3). Z neho vidíme, že

$$h = l - s \quad \text{a} \quad s = l\cos(2\alpha).$$

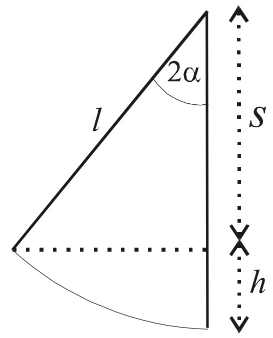
Z toho dostávame

$$h = l(1 - \cos(2\alpha))$$

a nakoniec

$$h = l(1 - \cos(2\mathrm{arctg}(a/g))).$$

Dajme tomu prasaťu už pokoj! Šunke zdar.



obr.3

B – 3.4 Maťkove guličky (opravoval Fajo)

Maťko má dve guličky a potrebuje sa ich zbaviť. Za najrozumnejší spôsob považuje hodiť ich spodným susedom, preto prevŕta podlahu a pustí prvú guličku hmotnosti 2m *do diery. Počká čas* t *a pustí do diery z rovnakého miesta aj druhú guľku s hmotnosťou* m. *Do akej výšky vyletí druhá gulička po prvom odraze? Vráti sa Maťkovi alebo nie? Vzdialenosť podláh je* H. *Všetky zrážky považujte za dokonale pružné a rozmery guličiek zanedbajte.*

Čo sa vlastne udeje s Maťkovými guličkami? Padajú z rovnakého miesta, teda sa budú (aj po zrážke) obe pohybovať na jednej zvislej priamke. Budeme preto počítať našťastie len jednorozmernú zrážku (uff, mohlo to byť aj v rovine alebo v priestore, čím by sa počet rovníc chutne zdvoj až strojnásobil). Na vzostup a pád guličky sa dá pozerať ako na neustálu premenu jej potenciálnej energie E_p na kinetickú E_k a naopak, pričom jej celková energia $E = E_p + E_k$ sa nemení (zanedbávame trenie vzduchu, nepružnosť zrážok a iné straty). Na začiatku má gulička s hmotnosťou M potenciálnu energiu $E_{p0} = MgH$ vzhľadom na spodnú podlahu a jej kinetická energia E_{k0} je nulová. Ako padá, jej polohová energia sa zmenšuje a premieňa sa na kinetickú, čiže vo výške d nad spodnou podlahou bude

$$\Delta E_p = E_k,\ Mg(H - d) = Mv^2/2, \text{ z toho } v = \sqrt{2g(H-d)}\,.$$

Tu vidno, že rýchlosť voľného pádu v guličky nezávisí od jej hmotnosti.

Maťko pustí prvú guličku s hmotnosťou $2m$. Tá dopadne s rýchlosťou $\sqrt{2gH}$ na spodnú podlahu a s rovnakou rýchlosťou (a chuťou) vyrazí smerom hore. Medzitým Maťko stihne pustiť aj druhú guličku s hmotnosťou m. Rozmery guličiek sú veľmi malé, čiže obe sú pri zrážke prakticky v rovnakej výške h nad spodnou podlahou. A teraz to príde! Rýchlosť v_2 druhej guličky bude v tomto momente

$$v_2 = \sqrt{2g(H-h)}\,.$$

A aká bude rýchlosť prvej guličky v_1 tesne pred zrážkou? Prvá gulička už raz vo výške h bola (keď padala dole) a tiež mala vtedy rýchlosť v_2. Ľahko zistíme, že v oboch prípadoch mala rovnakú potenciálnu energiu. Potom zo zákona zachovania energie vyplýva, že musela mať aj rovnakú kinetickú energiu, čiže rýchlosť prvej guličky má v oboch situáciách rovnakú veľkosť, ale opačný smer (najskôr hore potom dole). Preto

$$v_1 = v_2.$$

Poďme teraz spočítať tú zrážku. Keďže je pružná, musí platiť nielen zákon zachovania hybnosti (ZZH), ale aj energie (ZZE). Sme na priamke, a preto poznáme len dva smery pohybu: smer hore – nech majú takéto rýchlosti znamienko „+" a smer dole – tieto rýchlosti budú so znamienkom „–". Súčet hybností guličiek pred zrážkou sa musí rovnať súčtu hybností po zrážke:

$$p_1 + p_2 = p_1' + p_2',$$

$$2mv_2 - mv_2 = 2mv_1' + mv_2', \text{ z čoho } v_2 = 2v_1' + v_2', \tag{1}$$

kde v_1' a v_2' sú rýchlosti prvej a druhej guličky po zrážke. Súčet kinetických energii guliek pred a po zrážke musí byť rovnaký (potenciálna energia sa nemení, pretože ideálna zrážka trvá nekonečne malý čas, čiže guličky sa nestihnú ani pohnúť z miesta):

$$E_{k1} + E_{k2} = E_{k1}' + E_{k2}',$$

$$2mv_2^2/2 + mv_2^2/2 = 2mv_1'^2/2 + mv_2'^2/2, \text{ z čoho } 3v_2^2/2 = v_1'^2 + v_2'^2/2. \qquad (2)$$

Z rovnice (1) vyjadríme rýchlosť v_1' a dosadíme do vzťahu (2), čím dostaneme kvadratickú rovnicu pre rýchlosť druhej guličky v_2' po zrážke. Očakávame, že gulička sa odrazí smerom hore, teda táto rýchlosť bude kladná. Po vyriešení dostaneme:

$$v_2' = 5v_2/3 = 5\sqrt{2g(H-h)}/3.$$

Ďalšia neznáma je tá výška h, v ktorej sa guličky zrazia. Poďme na to cez čas. Označme t_2 ako čas, ktorý trvá guličke (je to jedno ktorej), kým voľným pádom padne z Maťkových dlaní do miesta zrážky, teda

$$t_2 = \sqrt{2(H-h)/g}\,.$$

Prvá gulička vyštartuje a po čase t_2 sa dostáva do miesta zrážky. Teraz sa samozrejme ešte s ničím nezrazí a padá ďalej. Odrazí sa a za chvíľu znovu prechádza miestom zrážky. Medzitým sa do tohto miesta dostala aj 2. gulička, a preto dráhu miesto zrážky – podlaha – miesto zrážky musela 1. gulička stihnúť presne za čas t. Keby sa teraz guličky nezrazili a počkali by sme si ešte čas t_2, dostala by sa prvá gulička späť k Maťkovi. Tento dej nie je ale časovo nič iné ako dvakrát voľný pád z výšky H a teda

$$2\sqrt{2H/g} = 2t_2 + t.$$

Po dosadení za t_2 a vyjadrení máme:

$$h = H - \frac{g\left(2\sqrt{2H/g} - t\right)^2}{8}.$$

K úplnému šťastiu nám už len ostáva zistiť výšku h_0, do ktorej vystúpi druhá gulička po odraze. Ide vlastne o zvislý vrh guličky nahor z výšky h s počiatočnou rýchlosťou v_2'. Zo známeho vzorca máme:

$$h_0 = h + \frac{v_2'^2}{2g} = H + \frac{2g\left(2\sqrt{2H/g} - t\right)^2}{9}.$$

Na záver ešte treba poznamenať, že t v našom vzorci nie je celkom presne čas, ktorý máme daný v zadaní. My totiž potichu predpokladáme $t < 2\sqrt{2H/g}$. Pokiaľ by čas bol väčší ako táto hodnota, skackanie prvej guličky sa periodicky opakuje a do vzorca treba dosadiť čas medzi posledným návratom prvej guličky k Maťkovi a pustením druhej guličky.

FYZIKÁLNY KOREŠPONDENČNÝ SEMINÁR

výsledková listina B – kategórie po 3. sérii letného semestra 19. ročníka

	Priezvisko	Meno	Trieda	Škola	②	B-3.1	B-3.2	B-3.3	B-3.4	☠	Σ
1.	Imriška	Jakub	2 A	G BA J. Hronca	40.5	4.0	5.0	6.0	5.0		60.50
2.	Fecko	Stanislav	kv. A	G Pankúchova	36.7	4.0	2.0	6.0	–		50.14
3.	Perešíni	Peter	2 F	G BB Tajovského	33.5	4.0	2.5	5.0	3.5		48.50
4.	Bzdušek	Tomáš	kv. A	G Piešťany	34.4	4.0	2.5	2.0	3.5		47.81
5.	Hrdá	Marcela	sx.	G Turčianske Teplice	35.0	4.0	2.0	2.0	1.5		44.50
6.	Kaniansky	Miroslav	sx. A	G Piaristické Nitra	33.0	4.0	2.5	2.0	1.5		43.00
7.	Škrovinová	Katarína	sx.	G Nitra Párovská	32.5	4.0	2.0	2.0	1.5		42.00
8.	Zámečník	Peter	2 D	G MRŠ NMV	31.0	4.0	2.5	2.0	2.0		41.50
9.	Takács	Michal	2 F	G BB Tajovského	32.0	4.0	2.0	2.0	2.0	-1	41.00
10.	Štolcová	Jana	sx.	G Nitra Párovská	29.0	4.0	0.5	4.0	3.0		40.50
11.	Bogár	Ondrej	1 E	G ĽŠ Trenčín	29.8	4.0	2.0	2.0	1.0		40.25
12.	Fačkovec	Boris	kv. A	G Piešťany	29.2	4.0	2.5	2.0	1.0		40.15

13.	Piterka	Tomáš	sx. A	G Piaristické Nitra	29.5	4.0	2.5	2.0	2.0		40.00
14.	Komorovský	Marek	sx.	G Dubnica nad Váhom	28.3	4.0	2.0	4.0	1.0		39.30
15.	Foltin	Miroslav	2 C	G Jána Hollého	27.4	4.0	2.5	2.0	3.0		38.90
	Hergelová	Beáta	2 B	G BST Lučenec	27.4	3.5	2.5	4.0	2.5	-1	38.90
17.	Molčány	Dušan	2 B	SPŠS BA Feinorovo nábr.	28.0	4.0	2.5	2.0	1.5		38.00
18.	Pôbišová	Zuzana	2 F	G BB Tajovského	27.2	4.0	2.5	2.0	2.0		37.70
19.	Berta	Peter	1 A	G Veľké Kapušany	33.4	–	–	–	–		33.36
20.	Mikuláš	Ján	sx.	G BST Lučenec	22.0	4.0	1.5	1.0	4.5		33.00
21.	Regec	Mário	2 A	G PH Michalovce	24.2	0.5	1.5	0.0	0.5		26.70
22.	Švihorík	Róbert	kv.	G Nitra Párovská	20.9	1.0	1.5	2.0	0.5	-1	26.07
23.	Vrbjárová	Michaela	1 A	G BST Lučenec	15.6	4.0	1.0	2.0	–		23.99
24.	Ďurčík	Miroslav	2 C	G BST Lučenec	15.0	3.0	2.5	0.0	2.0		22.50
25.	Kravec	Martin	2 A	G PH Michalovce	18.2	–	–	–	–		18.20
26.	Šomodiová	Kristína	2 A	G Piešťany	16.5	–	–	–	–		16.50
27.	Malčická	Martina	sx.	G Banská Štiavnica	10.2	0.5	1.5	3.0	–		15.20
28.	Uchytilová	Vendula	2 A	G J.K.Tyla	14.0	–	–	–	–		14.00
29.	Melicher	Radoslav	2 A	G BST Lučenec	10.5	–	–	–	–		10.50
30.	Nagy	Jakub	9 C	ZŠ Požiarnicka 3	10.2	–	–	–	–		10.16
31.	Gál	Dárius	2		9.5	–	–	–	–		9.50
	Harmincová	Zuzana			9.5	–	–	–	–		9.50
33.	Beran	Jakub			9.0	–	–	–	–		9.00
34.	Přikrylová	Veronika	kv. A	OG ZA Varšavská cesta	7.8	–	–	–	–		7.82
35.	Dojčák	Lukáš	2 C	G PH Michalovce	7.0	–	–	–	–		7.00
36.	Híreš	Michal	3 F	G VPT Martin	6.0	–	–	–	–		6.00
37.	Pašuth	Ondrej	2 A	G PH Michalovce	5.5	–	–	–	–		5.50

Milá naša mládež!

Tak je to tu. Koniec tretej série, a tým aj letného semestra. Iste ešte nostalgicky spomínate na to, ako ste pri okienku na pošte alebo s ukazovákom na entry posielali prvú sériu. Nasledujú 2 mesiace trpkého odlúčenia, ktoré dúfam prežijet(m)e v zdraví a do školy sa vrátite plní elánu a chuti riešiť FKS. S tými úspešnejšími z vás sa ešte stretneme na sústredku, menej úspešní im môžu iba závidieť, lebo tentoraz to naozaj bude stáť za to! Je pravda, že vedúci ešte nemajú celkom jasno v tom, že za čo, ale na vyjasnení týchto pojmov sa intenzívne pracuje. (kto by túto vetu nepoznal, v diplomatických kruhoch znamená.. veď viete..) V každom prípade sústredko určite v každom z vás zanechá hlboké, nezmazateľné dojmy.. keď raz budete 80 roční starci a starenky, zuby žiadne, rúk len pár, z úst vytekajú nazelenalé sliny (toto mi asi vycenzurujú, ale realita je krutá! Teraz pred ňou ešte môžete zatvárať oči, ale v 80-ke už ani nebudete mať čo zatvárať). Každé ráno vstanete, zanadávate na politiku, do kávy si nalámete rohlík a vyjdete na terasu vyhrievať sa na slnko. Vonku je idyla, vtáčiky štebotajú, tráva je zelená, z blízkeho jazera počuť volanie o pomoc. Zvonku hreje Oskar a vás zrazu napadne: veď ja som bol voľakedy mladý! Prekvapený týmto zistením vás začnú zvnútra hriať spomienky na všetky šibalstvá, ktoré ste za mladi stvárali a všetky haluze ktorých ste sa zúčastnili. Aj sústredko FKS je medzi nimi. Aj ono hreje. A tak sa minie deň. A príde ďalší. Aby 80 - ročnú skleroticú myseľ zase šokovalo poznanie – veď ja som bol voľakedy mladý...

A preto, poďte na sústredko, a tí čo nebudete pozvaní, neprepadajte panike, kým budete 80 roční, máte ešte toľko príležitostí… Poniektorí ešte aj 2. Tak vážne. Pamätajte na staré fyzikálne porekadlo – „Kto má v hlave, ten má v hlave“ (je to s ním ako s pranostikou – nikto nevie celkom presne prečo, ale je to tak).

Fyzika a počítače III. – pohyb pri zadanej sile

Máme pre sebou poslednú časť seriálu o tom, ako môže fyzik využívať počítač. Tentoraz bude témou to, ako skúmať pohyb telesa na ktoré pôsobí voľajaká sila. Možno sa to nezdá, ale nie je to jednoduchý problém. Sily sú totiž všakovaké a veľmi často sa s nimi ťažko počíta.

No ale pomaly. Najjednoduchšou silou je „žiadna sila“. Ako všetci vieme, teleso sa vtedy pohybuje rovnomerne priamočiaro s počiatočnou rýchlosťou. Pre jednoduchosť budeme zatiaľ skúmať jednorozmerný prípad (pohyb po priamke) – polohu telesa označíme x, jeho rýchlosť v. Ak počiatočná rýchlosť telesa je v^0 a počiatočná poloha je x^0, tak

$$x(t) = x^0 + v^0 t.$$

Ak chceme toto naprogramovať pomocou počítača, najjednoduchšie je „nasekať“ čas na dieliky dĺžky Δt a opakovať nasledovnú slučku (druhý riadok znázorňuje zvýšenie času o Δt)

$$x(t+\Delta t) = x(t) + v^0 \cdot \Delta t.$$
$$t \to t + \Delta t.$$

Problém je, že nejaké sily väčšinou predsa len pôsobia. Taká sila môže závisieť od rýchlosti telesa v (takou je napríklad sila aerodynamického odporu), ale tiež od polohy telesa x (tak je to napríklad pri závaží na pružine) či od času t (trebárs rozhojdávame hojdačku, sila ktorou na ňu pôsobíme závisí nejako od času). Označme teda našu silu $F(x, v, t)$. Podľa Newtonovho zákona vieme, že teraz už nebude pohyb telesa rovnomerný, ale objaví sa zrýchlenie $a = F/m$.

Nuž a na čo je dobré zrýchlenie? Na to, že mení rýchlosť v. K súradnici telesa x preto nemôžeme pripočítavať vždy tú istú hodnotu $v\,\Delta t$ tak, ako pri pohybe bez sily. Preto treba osobitne počítať aj to, ako sa vyvíja rýchlosť samotná. No a keďže vieme, že zrýchlenie je $a = \Delta v/\Delta t$, máme

$$v(t+\Delta t) = v(t) + a(t)\cdot \Delta t.$$

Teraz už môžeme zapísať celý algoritmus pre pohyb telesa pri danej sile, je to

$$a(t) = F(x, v, t)/m,$$
$$v(t+\Delta t) = v(t) + a(t)\cdot \Delta t,$$
$$x(t+\Delta t) = x(t) + v(t)\cdot \Delta t,$$
$$t \to t + \Delta t.$$

Podobne ako pri pohybe bez sily sme potrebovali zadať počiatočnú polohu a rýchlosť, ani teraz sa bez nich nezaobídeme.

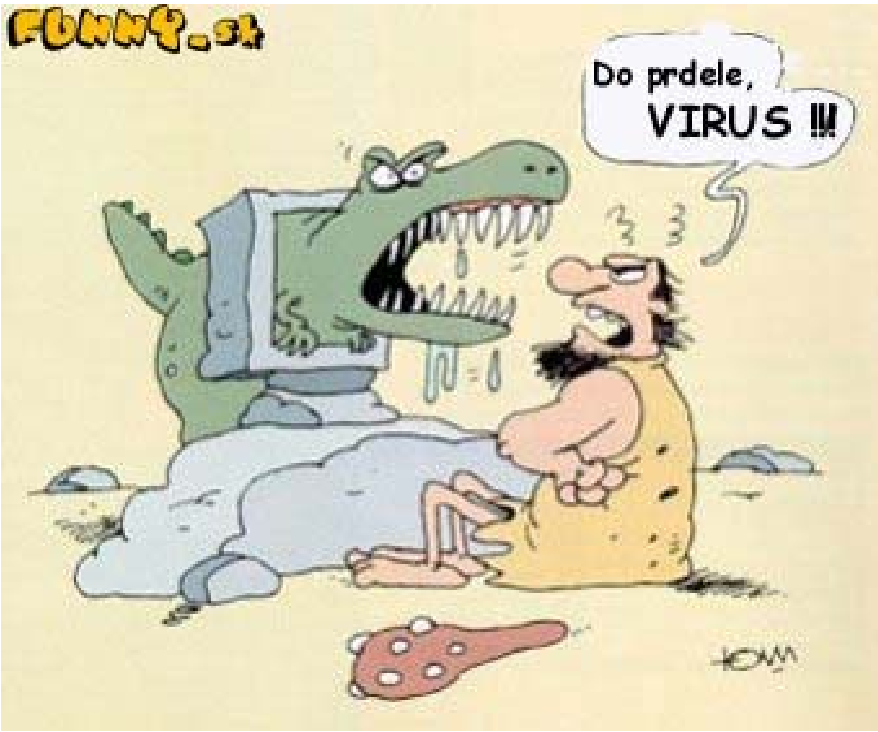
Ešte treba povedať, že rozumné výsledky dostaneme iba vtedy, ak zvolíme dostatočne malú veľkosť Δt (väčšinou sa nazýva časový krok). To je pochopiteľné – ťažko môžeme očakávať dobré priblíženie k nerovnomernému pohybu, ak ho skladáme pomocou jednu sekundu trvajúcich rovnomerných pohybov! Zaujímavé je (vyskúšajte si to!), že ak zvolíme dosť malý časový krok, na poradí jednotlivých výpočtov v našom algoritme prakticky nezáleží. Kľudne môžeme najprv vypočítať novú rýchlosť a potom pomocou nej posunúť teleso, alebo naopak – najprv ho posunúť, až potom zistiť novú rýchlosť. To je dobré – ten algoritmus si vďaka tomu netreba pamätať tak presne.

Aby sme neboli takí teoretickí, skúsme si príklad nejakého výpočtu. Napríklad také závažie na pružine. Nech na začiatku je jeho výchylka $x^0 = 0$, rýchlosť v^0 nejaká. Pružina naň pôsobí silou $F = -kx$ (teda sila závisí iba od polohy, nie od rýchlosti). Bude teda $a = -kx/m$ a vyššie uvedeným algoritmom môžeme nakŕmiť bársaký počítač. Skúste si to!

Je mnoho iných zaujímavých úloh, ktoré sa počítať takmer nedajú, ale numerické riešenie sa dá urobiť krásne. Napríklad také kyvadlo, kde pevnú niť vymeníte za pružinu. Alebo strieľanie z dela s odporom vzduchu – zistíte, že ideálny uhol už nie je 45°...

Je toho veľa, tak hor sa k počítaču!

OK, tlač!



Do prdele,
VIRUS !!!