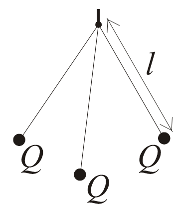
FYZIKÁLNY KOREŠPONDENČNÝ SEMINÁR

2. kolo zimnej časti 20. ročníka
A – kategória (staršia)
školský rok 2004/2005
termín príchodu riešení
10. 11. 2004

www. **.sk**

FKS, KZDF FMFI UK
Mlynská dolina
842 48 Bratislava
riesenia@fks.sk
info@fks.sk

A–2.1 Tetraéder (5 bodov)
V jednom bode sú upevnené tri rovnako dlhé nite visiace nadol. Na ich koncoch sú rovnaké náboje veľkosti Q (pozri obrázok). Aká má byť veľkosť týchto nábojov, aby boli ich vzájomné vzdialenosti nábojov rovné dĺžke nití? Tiažové zrýchlenie je g.



A–2.2 Klada a tráva (5 bodov)
Kvádrová klada dĺžky l a hmotnosti m sa pozdĺžne šúcha s nulovým trením po ľade rýchlosťou v. Zrazu ľad končí a začína tráva, po ktorej sa klada šúcha s trením f. Aký pohyb bude vykonávať klada, keď bude nabiehať na trávu? Určite, ako ďaleko sa klada po tráve dostane.

A–2.3 Prší, prší (5 bodov)
Saška s Prikym sa išli jedného krásneho dňa prejsť. Nepozreli si však predpoveď počasia a prekvapil ich dážď. Keď sa utekali skryť, všimli si, že veľké kvapky padajú rýchlejšie ako malé. Skúste vysvetliť ich pozorovanie a odhadnite, o koľko padá veľká kvapka rýchlejšie ako malá.

A–2.4 Ponorka (5 bodov)
Nautilhumus, ponorka chýrneho Mena, používala silný elektrický reflektor, aby sa mohla bezpečne pohybovať aj vo veľkých hĺbkach. Priehľadný kryt reflektora sa vždy pri dlhšom svietení rozpáli až do teploty 150°C. Ohriata voda v jeho blízkosti nemôže voľne odtekať hore (reflektor je na spodku ponorky a navyše v preliačenine), preto sa vždy ohreje až na maximálnu možnú teplotu. Predstavte si, že ponorka je hlboko pod vodou a pomaly sa začne vynárať. Zrazu voda pri reflektore začne vrieť. Vysvetlite prečo a zistite, v akej hĺbke sa to stalo.

Tento seminár podporujú
KZDF FMFI UK a
iuventa

FYZIKÁLNY KOREŠPONDENČNÝ SEMINÁR

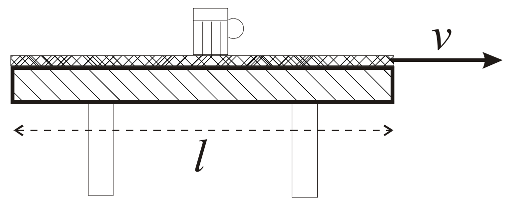
3. kolo zimnej časti 20. ročníka
A – kategória (starší)
školský rok 2004/2005
termín príchodu riešení
1. 12. 2004

www. **.sk**

FKS, KZDF FMFI UK
Mlynská dolina
842 48 Bratislava
riesenia@fks.sk
info@fks.sk

A–3.1 Elektrická pumpa (5 bodov)
Majme doskový kondenzátor. Jeho dosky sú vzdialené l, ich rozmery sú veľmi veľké. Kondík ponoríme do vody doskami kolmo na hladinu. O koľko stúpne voda v kondíku, keď ho pripojíme na zdroj napätia s napätím U? Kapilárne efekty zanedbajte, relatívna permitivita vody je ε_r.

A–3.2 Takmer ho rozb(or)il... (5 bodov)
Rodina Veselá sa túži zúčastniť jednej známej televíznej relácie, a preto poctivo trénuje najnáročnejšiu disciplínu – trh obrusom. Ako to prebieha: na stole dĺžky l je prestretý obrus s rovnakými rozmermi (obr.), takže ho presne pokrýva. V strede stola je položený pohár s hmotnosťou m. Otec Veselý vodorovne ťahá obrus stálou rýchlosťou v. Aká najmenšia môže byť táto rýchlosť, aby pohár zo stola nespadol? Koeficient trenia medzi obrusom a pohárom je f_1 a medzi stolom a pohárom f_2. Rozmery pohára sú oproti rozmerom stola zanedbateľne malé.



A–3.3 3dcl vody (4+1 bodov)
Hrnček tradičných rozmerov (priemer cca 70 mm, výška cca 90 mm) je položený na vodorovnej podložke. Naplníme ho vodou. Experimentom čo najpresnejšie zistite, o koľko percent pritom môžeme presiahnuť jeho vnútorný objem (teda objem hrnčeka až po vrch). Môžete to skúsiť aj vypočítať a potom porovnať tento výsledok s meraniami, bonusový bod vás neminie.

A–3.4 Svetlo na konci tunela (5 bodov)
Janko s Jurkom sa rozhodli že si budú v noci posielať svetelné správy. Jurko kúpil v samoobsluhe FIBUZS*. Aká je najväčšia vzdialenosť, na ktorú bude Janko ešte registrovať Jurkove signály? Citlivosť ľudského oka si zistite.
*Fyzikálne Idealizovaný Bodový Univerzálny Zdroj Svetla, dostať ho vo väčšine obchodov. Pri výpočtoch môžeš použiť ľubovoľný – baterku, klasickú žiarovku, žiarivku, sviečku, atď., podľa toho, čo sa ti zapáči.

Tento seminár podporujú
KZDF FMFI UK a
iuventa

FYZIKÁLNY KOREŠPONDENČNÝ SEMINÁR

vzorové riešenia 1. série
A – kategória (staršia)
20. ročník
zimný semester
školský rok 2004/2005

www.fks.sk

FKS, KZDF FMFI UK
Mlynská dolina
842 48 Bratislava
riesenia@fks.sk
info@fks.sk

A – 1.1 Nerozhodné plyny (opravovala Rebro)

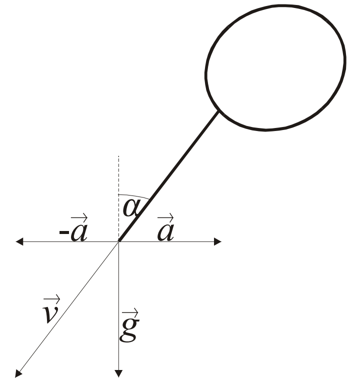
Malá Zuzka cestuje s rodičmi domov v autobuse. Na svojej bugine ma priviazaný balón naplnený héliom, boli na púti vo Višňovom. Balón sa pekne vznáša nad buginou, autobus ešte stojí. A zrazu sa autobus pohne, kam sa pohne balónik vzhľadom na autobus? Ak viete, že tiažové zrýchlenie je g (kolmo na vozovku) a zrýchlenie autobusu je a (vodorovne s vozovkou), určite i sklon šnúrky balónika.

Zdravím všetkých fyzikov po krásnom lete a hor sa na vzorové riešenie.

Nuž, všetci vedia, že vedúci FKS sú fajn ľudia, nerobia podrazy, ale nejaké tie chytáčiky sa nájdu. A preto sa riešiteľ, ktorý si po prvom pohľade na tento príklad povedal: „Jasné, zotrvačnosť, pôjde dozadu, kam by inam šiel?“, mal naň pozrieť druhý raz a povedať si: „Jasné?! Veď to je príklad do B-čka, ak nie ešte nižšie. Také ľahké?! Čosi tu nehrá!“. A dobre by urobil. Kým prejdem k správnemu riešeniu, ešte jedna poznámka. V zadaní síce nebolo vyslovene napísané, že bugina je zaistená, ale zaujímali sme sa o balónik a Zuzkiny rodičia sú zodpovedné osoby, nenechali by svoje dieťa voziť sa po autobuse...

Takže správna odpoveď znie, že balónik sa pohne v smere jazdy autobusu. Znie to síce divne, ale je to tak. A prečo? Hneď sa dozviete. Možné sú dva prístupy, ako to vysvetliť.

Prvý prístup – intuitívny. Vo väčšine príkladov sa píše, niečo ako odpor vzduchu zanedbajte, vzduch zanedbajte, ale tu práve on hrá rozhodujúcu rolu, veď bez neho by balón nelietal, keďže v balóniku je hélium a to je o dosť „redšie“ ako vzduch. Autobus sa pohne, veci s ním spojené sa pohnú s ním, ostatné, ako napríklad vzduch v ňom, majú chuť zotrvať na mieste. My to necítime, ale vzadu v autobuse bude hustejšie ako vpredu a teda aj väčší tlak. Kto to však pocíti, je náš balónik. Balóniky sú už také.



Nasleduje chvíľka poézie s názvom: prečo balóny lietajú. Na balón ako aj na okolitý vzduch pôsobí tiažová sila. Vzduch je ťažší, preto sa natlačí dolu a balón pôjde hore. Je to síce zdôvodnenie na úrovni materskej školy ale postačí. V autobuse sa deje totiž to isté. Vzduch sa natlačí dozadu a balón ide dopredu.

Ak nemáte buginu, balónik s héliom a autobus (o malej Zuzke ani nehovorím), skúste si pokus, ktorý mi opísal Robko Sasák. Na podnos dáte sviečku, prikryjete ju zaváraninovým pohárom a skôr ako zhasne, pohýbte podnosom. Plameň sa bude vychyľovať v smere pohybu. Čo je analógia s naším príkladom.

Druhý prístup – odborný. V sústave spojenej s autobusom pôsobia na všetky predmety vo vnútri dve sily – tiažová a zotrvačná. Môžeme tiež hovoriť o dvoch zrýchleniach – tiažovom a zotrvačnom. Všetky predmety budú „pociťovať“ zložený účinok týchto dvoch zrýchlení. Keď tieto zrýchlenia vektorovo zložíme do jedného výsledného, dostaneme nové zrýchlenie $\vec{v}$.

Jeho veľkosť aj smer vieme ľahko zrátať. Keby sa bohovia zbláznili a namiesto obyčajného $\vec{g}$ nám zapli tiažové zrýchlenie $\vec{v}$, cítili by sme sa presne tak, ako sa cíti Zuzka v rozbiehajúcom sa autobuse. Normálne si balón lieta smerom „hore“ t.j. proti smeru pôsobiaceho $\vec{g}$. Keď budeme mať namiesto zrýchlenia $\vec{g}$ zrýchlenie $\vec{v}$, balón sa ustáli proti smeru $\vec{v}$ t.j. v smere dopredu. Od kolmého smeru sa pritom odkloní presne o toľko, o koľko sa odkláňa $\vec{g}$ od $\vec{v}$, čo je

$$\alpha = \mathrm{arctg}(a/g).$$

A - 1.2 Balónomer (opravoval Juro, vzorák Juro a Tomáš)

Experimentálne určite závislosť tlaku vo vnútri balóna (bežného, z hračkárstva) od jeho polomeru.

Ahojte. Tak sa nám začal nový školský rok a s ním jubilejný, už dvadsiaty ročník vášho obľúbeného FKS. Dúfam, že ste si užili prázdniny, dobre si oddýchli a nabrali kopu energie. Tá sa Vám určite zišla napríklad pri neustálom nafukovaní balónika, tak sa poďme strmhlav pozrieť, ako to všetko vyzerá.

Najskôr trocha teórie. Čo sa deje s balónom, keď ho nafukujete? Guma, z ktorej sa skladá, sa rozťahuje. Keďže sa jej to až tak nepáči a chce sa stiahnuť, spôsobuje vo vnútri určitý dodatočný pretlak. Preto je tlak v balóne o niečo vyšší, ako tlak okolitého vzduchu.

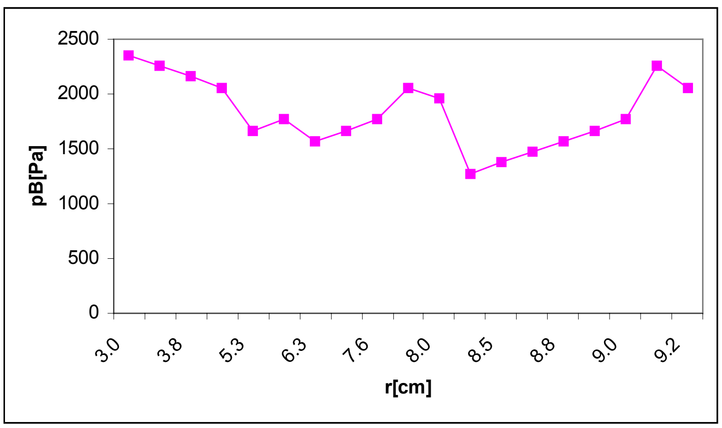
K riešeniu problému ste pristupovali rôzne. Väčšinou ste však merali tlak vo vnútri balónika pomocou porovnania s hydrostatickým tlakom alebo priamo nejakým zariadením na meranie tlaku. Objavilo sa aj pár zaujímavých návrhov, ktoré ale zväčša stroskotali na viac či menej prekonateľných prekážkach. Napríklad konkrétne u mňa pokus o váženie balónika so vzduchom a bez vzduchu narazil na problém nedostatočnej presnosti merania hmotnosti. Meral som teda tak, ako väčšina z Vás.

Z troch slamiek som vytvoril dlhú trubičku, na koniec ktorej som pripevnil balón. Dával som si obzvlášť pozor, aby boli spoje dostatočne vzduchotesné. Z fľaše od nealkoholického nápoja som odstránil etiketu a naplnil ju vodou. Balónik som nafúkol a hadičku ponoril do určitej hĺbky (najväčšej ako sa dalo) a počkal, kým to celé prestane bublinkovať. Odmeral som polomer balóna a zmenšil hĺbku ponoru. Zas som počkal, kým z trubičky prestane unikať vzduch. Opäť meranie polomeru, ktoré som robil nepriamo ako meranie polomeru nitkou.

Použil som nasledujúce vzťahy

$$r = o/(2\pi),\ p_B = \rho g h.$$

Celý postup som opakoval, čím som dostal nasledujúcu krásnu závislosť.



Čo nám to vyšlo? Vyzerá to skôr ako obraz a názvom „prebudenie v Tatrách“ než rozumná závislosť. Nepresnosti v meraní mohli byť síce dosť veľké (napr. balón je škaredé hruškovité teleso), ale predsa..

Poďme sa pozrieť, ako by sa mal balón správať podľa teórie. V prvom rade zanedbáme zmeny hustoty vzduchu v balóne. To preto, lebo keď sa pozrieme na namerané hodnoty, hneď vidíme, že naše pretlaky sú oveľa menšie ako atmosférický tlak. Inšpirujeme sa kvapalinami a ich povrchovým napätím. Balón sa správa ako jedna veľká bublina, pre ktorú platí, že tlak vo vnútri (pretlak) pri polomere R je rovný $2\sigma/R$ (tu sa vyhneme úvahám o tom, či má balón jeden alebo dva povrchy, pretože stále budeme pracovať s „dvojpovrchovým“ balónom). Možno sa vám nepáči, že miešam piate cez deviate (kvapaliny cez balón), nakoniec však ukážeme ako sa k tomuto vzorcu dá dopracovať aj bez použitia slova „povrchové napätie“. Teraz však musíme čeliť vážnejšiemu problému – aká je konštanta σ pre balón? Vezmime balón a zmasakrujme ho, t.j. vyrežeme z neho štvorček balónoviny. Skúmajme teraz silu potrebnú na to, aby sme štvorček natiahli o x (teda keď silou F ťaháme obe strany štvorca, natiahneme ho o x v oboch smeroch). Predpokladajme pritom, že pokojový rozmer štvorčeka je veľmi malý. Potom pre F platí približne

$$F = kx^2 = kS$$

(lebo ťaháme o x pružinu širokú x), kde F je sila, k nejaká konštanta, $S = x^2$. Ak by mal tento kúsok balónu povrchové napätie σ, bola by táto sila rovná σx. Z porovnania týchto výrazov je

$$\sigma = F/x = kx$$

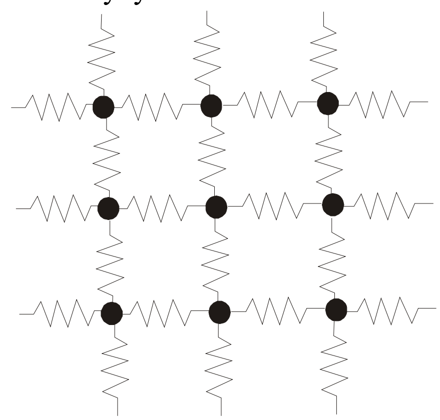
(teda povrchové napätie je závislé od predĺženia x, neprepadajte panike, aj také sa môže stať). Ak zanedbáme rozmery nenafúknutého balónu, tak pre balón s polomerom R platí, že jeho povrchové napätie je

$$\sigma = k\sqrt{S} = k\sqrt{4\pi}\,R,$$

a teda tlak je rovný

$$2\sigma/R = 4k\sqrt{\pi}\,R/R = 4k\sqrt{\pi}\,.$$

Tento pozoruhodný výsledok má dvojaký význam. Jednak dáva priamo návod ako merať závislosť tlaku od polomeru. Nemusíme pritom predpokladať, že k je konštanta, Môžeme merať F ako funkciu x a z toho dorátať $\sigma(x)$. Zároveň, keďže k je plus-mínus konštantné, naša škaredá nameraná závislosť je v podstate konštanta rozhádzaná o chyby merania.



Všetkým, ktorí už pripravujú kampaň s názvom „nemáme radi povrchové napätie“, ponúkam ešte iný spôsob, ako sa popasovať s balónoštvorčekmi a teoretickým odvodením tlaku. Balón budeme aproximovať sústavou bodov pospájaných pružinkami. Pružinky majú nejakú tuhosť k. Túto tuhosť nebude problém určiť. Zároveň budeme vedieť porátať, čo to spraví, keď takúto mriežku bodov a pružiniek zdeformujeme do gule s polomerom R. Bod bude ťahaný do stredu svojimi štyrmi susedmi. Túto silu porátame a musí byť rovná tlaku krát malá plôška prislúchajúca tomuto bodu. Podrobnejšie o tom písať nejdem, hŕstka z vás, ktorých to zaujíma, nech sa radšej ozve mailom.

Z toho je zrejmé, že každý jeden balón sa bude správať inak. A dva rozličné balóny sa môžu správať úplne inak. Preto sa nestrachujte, keď vám to vyšlo trochu odlišne, možno ten váš balón v skutočnosti taký je.

Niečo k vašim riešeniam. Odvodzovačky urobené vyššie neboli potrebné, robil som ich len pre zdôvodnenie škaredej závislosti. Vaše riešenia boli fajn, až na obvyklé nepozornosti – tam chýba jednotka, tam komentár. Tak či tak, chcem vás všetkých pochváliť.

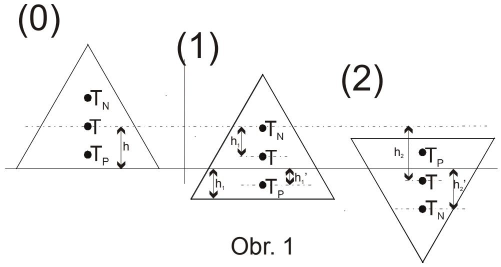
Na záver by som sa chcel poďakovať Baške za požičanie balónikov na experiment a mojej sestričke za ochotnú pomoc pri večernom meraní. Veľa krásnych jesenných dní a šťastia na Náboji. Majte sa krásne.

A – 1.3 Pravý pltnícky problém (opravoval Škrek)

Predstavte si jazero s hustotou vody ρ, na ktorom pláva drevená klada. Klada má tvar hranola s podstavou rovnostranného trojuholníka (dĺžka strany je l) a je dosť dlhá (teda rozmery podstavy sú oveľa menšie ako výška). Hustota dreva je ρ/2. Táto klada môže plávať na jazere napríklad špicom nahor alebo nadol (obrázky). Zrátajte prácu, ktorú je potrebné vynaložiť na to, aby sa klada dostala zo stavu (1) do stavu (2). Je niektorá z týchto polôh stabilná?

Prejdime k zrátaniu práce, ktorá je potrebná na uvedenie klady do druhého stavu. Samozrejme zo stavu prvého, to dá rozum...

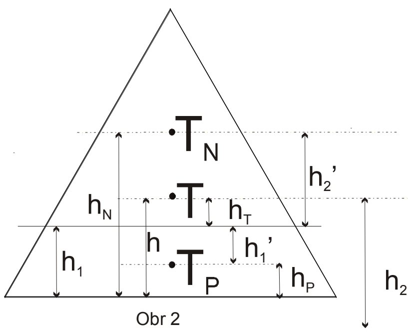
Keďže oba stavy sú rovnovážne, kde klada ostáva v pokoji (alebo rovnomernom priamočiarom pohybe, aby bol ujec Newton spokojný), naša práca bude rovná rozdielu polohových energií oboch stavov.



Obr. 1

Určime si ako referenčný bod hladinu (t.j., hladina je vo výške 0), pre väčšiu názornosť. Samozrejme, mohli by sme zvoliť ako referenčný stav stav 1 alebo stav 2 a nemuseli by sme počítať energiu jedného stavu, ale toľko výpočtov by nám to neubralo (naopak, pribralo). Teda energia v stave 0 je E_0.

Ak ponoríme kladu zo stavu 0 do stavu 1, tak čo sa stane? Znížime polohu ťažiska klady o h_1 od hladiny a zároveň hmotnosť vody, ktorá zaujímala priestor v oblasti ponorenej časti, bude vytlačená na hladinu. Teraz uvažujme, že plocha hladiny je dostatočne široká, a teda hladina sa pri ponorení nezvýši, a teda celá tá hmotnosť vody bude zdvihnutá o h_1'. Čiže polohová energia stavu 1 (E_1) je rovná zmene polohovej energie vody mínus zmena polohovej energie trojuholníka vzhľadom na stav 0 plus energia v stave 0:



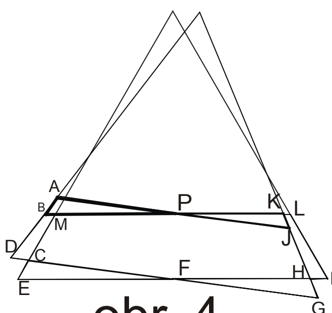
Obr 2

$$E_1 = E_0 + mgh_1' - mgh_1 \qquad (1)$$

Teraz ponoríme kladu zo stavu 0 do stavu 2. Znížime polohu ťažiska trojuholníka o h_2 a podobnou úvahou ako pri výpočte prvej energie rozlejeme hmotnosť vody po hladine, ale tentoraz sme ju zdvihli o h_2'. Teda

$$E_2 = E_0 + mgh_2' - mgh_2 \qquad (2)$$

Pre lepšie porozumenie porovnaj obe rovnice (1) aj (2) s obrázkom 1. No a teraz prídu veľké čachre machre, takže pre istotu si nakreslíme obrázok 2. Máme tam zaznačené všetky dĺžky, ktoré budeme potrebovať. Potrebujeme vypočítať $E_2 - E_1$, t.j. koľko práce potrebujeme na uvedenie klady do druhého stavu z prvého.



obr. 4

$$E_2 - E_1 = mg(h_2' - h_2 + (h_1 - h_1')) \qquad (3)$$

Z obrázka 2 vidíme, že :

$$h_1 - h_1' = h_p \qquad (4a)$$

$$h_2 = h + h_T = h + h - h_1 \qquad (4b)$$

$$h_2' = h_N - h_1 \qquad (4c)$$

Skombinovaním rovníc (3) a (4) dostávame

$$E_2 - E_1 = mg(h_N - h_1 - (h + h - h_1) + h_P) = mg(h_N - 2h + h_P) \qquad (5)$$

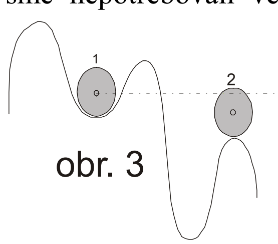
A teraz pozor!! Dĺžka h_N je vzdialenosť ťažiska malého trojuholníka od spodnej (alebo vrchnej) hrany veľkého trojuholníka, h_P je vzdialenosť ťažiska malého lichobežníka od tej istej hrany a h je vzdialenosť ťažiska veľkého trojuholníka od tej istej hrany. Musí platiť:

$$(h_N + h_P)/2 = h, \qquad (6)$$

lebo vieme, že ťažisko T sa nachádza presne v polovici medzi ťažiskom malého trojuholníka N a ťažiskom lichobežníka P. V polovici preto, lebo hmotnosť (plocha...) malého trojuholníka je rovná hmotnosti (ploche...) lichobežníka. Inak vlastne ide o spoločné ťažisko dvoch podčastí veľkého trojuholníka, ktoré je identické s ťažiskom veľkého trojuholníka (tie dve podčasti tvoria veľký trojuholník). No a keď spojíme rovnice (5) a (6), dostaneme

$$E_2 - E_1 = mg(2h - 2h) = 0.$$

Hurrá. Takže odpoveď na prvú otázku je hotová. Nepotrebujeme žiadnu energiu. A taktiež sme nepotrebovali vedieť krvopotne sa máchať v trigonometrických vzorcoch. To je ešte lepšie.



obr. 3

Tak a teraz prichádza otázka stability. Niektorí z vás, hlavne tí, čo nesprávne určili hodnotu energie, odfajčili otázku stability priamym porovnaním hladín energie oboch stavov a ten s menšou energiou ohodnotili ako stabilný. Chyba. Ideme sa hrať s guličkami. Narobíme si kopčeky a budeme sledovať stabilitu guličiek v takomto teréne (obrázok 3). Je evidentné, že aj keď gulička 1 má vyššiu potenciálnu energiu ako gulička 2, aj tak je stabilnejšia. Vidíme to z toho, že ak s kľudom ťukneme do guličky č. 1, tak sa vráti späť a ak ťukneme do dvojky, tak sa hneď skopŕcne dole. Ale musíme ťukať veľmi málo, lebo inak sa môže stať napríklad, že guličku 1 prepinkneme cez okolité kopce a už sa nevráti späť a to by bola škoda. Dúfam, že už vidíte, kam mierim. Takže koniec s guličkami, späť ku kladám.

Takže máličko ťukneme do klady v smere otáčania okolo vlastnej osi. Ale musíme do klady naozaj ťuknúť veľmi málo, aby sa neprehupla do ďalšej stabilnej, prípadne nestabilnej polohy. Ak je klada v stabilnej polohe, znamená to, že sa vráti späť. To znamená, že jej bola daná energia a ona ju vrátila späť. Čiže tým smerom leží energetický kopec, ktorý treba prekonať a na to treba istú dávku energie. Vyskúšame na druhú stranu. Ak aj tam leží energetický kopec, tak táto poloha je energetické údolie, v ktorom sa dobre hovie, a tak tam má klada stabilnú polohu. Ak naopak do klady nejakým smerom ťuknem a ona energiu nevráti (naopak, bude žrať ďalšiu a ďalšiu), tak tým smerom je energetický lyžiarsky svah, ktorý klada poľahky (t.j. bez našej pomoci) zjazdí, a na konci ešte dakoho zramuje. Pôvodná poloha bola teda síce rovnovážna (inak stabilita nemá význam), ale nie stabilná.

Ťukli sme do kladičky v stave 1 a ona sa nám, larva jedna, otočila o maličký uhol $d\alpha$. Pri maličkom pootočení môžeme predpokladať, že obsah ponorenej časti sa nezmenil (resp. že trojuholník, ktorý sa práve ponoril, má rovnaký obsah ako trojuholník, čo sa práve vynoril; treba si pozrieť obrázok č. 4, jedná sa o dva trojuholníky so spoločným vrcholom v bode P). Čo sa teda stalo? {…dostali sme trojuholníkom po hlave…} Toto:

a) ťažisko veľkého trojuholníka sa zmenilo o dh_T vplyvom pootočenia,
b) voda sa dajako preskupila.

Čiže celková zmena energie dE je rovná zmene polohovej energie vody dE_V plus zmene polohovej energie klady dE_K:

$$dE = dE_V + dE_K.$$

Pozrime sa najsamprv na dE_V! Útvary, v ktorých bola *klada*, ale už nie je (podľa obrázka 4): štvoruholník HILK a trojuholník CEF. Útvary, v ktorých bola *voda*, ale už nie je (podľa obrázka 4): štvoruholník CDBM a trojuholník HGF. Pre malé otočenie platí, že obsah HILK sa zhruba rovná obsahu CDBM a obsah CEF obsahu HGF. Výškový rozdiel ťažísk oboch štvoruholníkov je pritom rádovo nulový, takže sa navzájom vymlátia a do zmeny potenciálnej energie vody paprať nebudú (k tomuto sa ešte vrátime). Takže nám ostali iba dva trojuholníky s nezanedbateľným výškovým rozdielom ťažísk. Predpokladajme, že oba trojuholníky sú rovnaké, čo pre dostatočne malé otočenie zodpovedá skutočnosti. Výškový rozdiel ich ťažísk je

$$dh_V = l d\alpha/6,$$

obsah trojuholníka CEF (HGF) sa rovná

$$S = l^2 d\alpha/8,$$

a teda dE_V je po dosadení

$$dE_V = mgh = Sv\rho g dh_V = l^3 d\alpha^2 v\rho g/48.$$

Prejdime na dE_K, to je jednoduchšie, treba zrátať iba dh_T a z toho zmenu energie

$$dE_K = mg dh_T,$$

$$dh_T = dh(1 - \cos(d\alpha)) \approx dh d\alpha^2,$$

kde dh je vzdialenosť ťažiska od hladiny. Posledná uvedená úprava platí iba pre malé $d\alpha$. Vieme, že

$$dh = l\left(\sqrt{3}/6 - \left(2\sqrt{3} - \sqrt{6}\right)/4\right),$$

kde prvý člen je vzdialenosť ťažiska od dolnej hrany a druhý člen zátvorky vzdialenosť hladiny od spodnej strany. Hmotnosť klady je

$$m = Sv\rho/2 = \sqrt{3}\, l^2 v\rho/8, \text{ z toho}$$

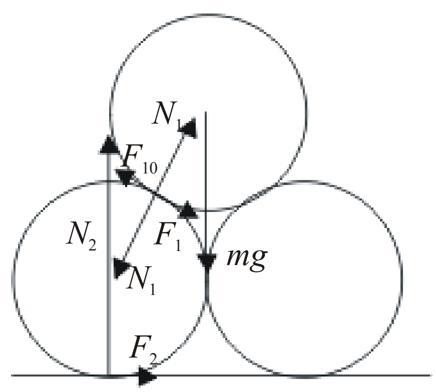
$$dE_K = -\frac{\sqrt{3}}{8} l^2 v\rho g d\alpha^2 l\left(\frac{\sqrt{3}}{6} - \frac{2\sqrt{3} - \sqrt{6}}{4}\right).$$

Treba si uvedomiť, že prácu teraz koná klada a neprijíma ju, tak preto to záporné znamienko. Súčet $dE_K + dE_V < 0$, to znamená, že kladu sme vychýlili do energeticky výhodnejšej (nižšej) polohy, a teda poloha 1 nie je stabilná. Ešte malý odskok k našim zanedbaným štvoruholníčkom. Keď prcneme do klady, ktorá sa týmto otočí o $d\alpha$, zmena energie je úmerná $d\alpha^2$. Čo nie je veľa, je to vlastne pekne málo. Je to ale najviac ako môže byť, keby bola úmerná priamo $d\alpha$, poloha by nemohla byť ani len rovnovážna, nieto stabilná. Zmena energií štvoruholníčkov je úmerná až $d\alpha^3$, čo je ešte oveľa menej ako $d\alpha^2$. Takže zanedbanie bolo OK. Späť k (ne)stabilite. Nestabilita polohy 2 by sa dokázala podobne ako 1, ale my na to použijeme krajšiu úvahu. Stačí si uvedomiť, že energia klady závisí od zvislej vzdialenosti ťažiska pod vodou ponorenej časti a ťažiska celého trojuholníka. Treba si uvedomiť, že pri preklopení trojuholníka okolo hladiny sa táto vzdialenosť nezmení. Toto platí iba pre klady s polovičnou hustotou ako tekutina, v ktorej plávajú. Čiže symetrické polohy okolo hladiny majú rovnakú energiu a to platí aj pre ich zmeny pri vychýlení do nejakého smeru. To značí, že tieto symetrické polohy sú rovnako stabilné, a teda aj poloha č.2 je nestabilná!!! Koniec. Finitto. Tutto capo di capi.

A – 1.4 Valce (opravoval Peťo)

Tri rovnaké valce s polomerom R sú položené na seba, tak ako na obrázku. Medzi valcami, ako aj medzi valcom a podložkou je trenie s koeficientom f. Čo musí spĺňať f, aby bola sústava v rovnováhe?

Ahojte. Zamyslime sa najprv, prečo by mali byť valce za určitých podmienok v pokoji. Keby medzi valcami nepôsobili trecie sily, spodné valce by sa začali šmýkať (nie kotúľať, lebo roztočiť ich môže len trecia sila, keďže ostatné sily smerujú vždy do stredu valcov) a vrchný by po nich klesal na podložku. Aby k tomu nedošlo, musia v dotykových bodoch pôsobiť dostatočne veľké trecie sily, pričom pod trecími silami rozumieme len sily statického trenia, lebo valivý odpor býva oveľa menší (a aj v zadaní sa hovorí len o koeficiente trenia). Na každý valec budú pôsobiť v dotykových bodoch trecie sily, a pretože ony jediné majú nenulový moment vzhľadom na stred každého valca, musia ho mať navzájom opačný, inak by sa valce začali otáčať. Ďalej sa to už ťažšie obkecáva, takže musím napísať aj nejaké rovnice a nakresliť obrázok.



Všetky na obrázku i ďalej použité písmenká sú myslené ako veľkosti síl, nie ako sily samotné (musel by som použiť ďalšie indexy na odlíšenie dvoch rovnako veľkých síl rôzneho smeru, čo by nebolo príliš prehľadné). Na vrchný valec budú okrem tiažovej sily s veľkosťou mg pôsobiť aj reakcie od spodných valcov. Zo symetrie našej sústavy vyplýva, že vodorovné zložky síl pôsobiacich na tento valec budú v rovnováhe, čo nám umožňuje ignorovať jeden zo spodných valcov. Sila reakcie ľavého spodného valca má dve zložky, normálovú s veľkosťou N_1 a tangenciálnu (dotykovú), ktorou je trecia sila F_{10} (je rovnako veľká ako F_1, ale pôsobí na horný valec). Tieto sily zvierajú so zvislým smerom uhly 30° a 60° v tomto poradí. Zapíšeme rovnosť zvislých zložiek síl pôsobiacich na horný valec:

$$N_1\cos 30° + F_{10}\cos 60° - mg/2 = \sqrt{3}\, N_1/2 + F_{10}/2 - mg/2 = 0 \qquad (1)$$

(druhá polovica tiaže prislúcha reakciám od pravého valca). Jediné sily, ktoré pôsobia na tento valec a majú nenulový moment vzhľadom na jeho stred, sú trecie sily s veľkosťou F_{10} od oboch valcov a zo symetrie je jasné, že tieto momenty sú presne v rovnováhe. Pozrime sa ďalej na niektorý spodný valec, napríklad na ľavý. Jediné naň pôsobiace sily s nenulovým momentom vzhľadom na jeho stred sú F_1 (= F_{10}) a F_2 a keďže majú rovnako veľké ramená, musia byť rovnaké aj ich veľkosti. Ďalej pre ne zavediem nové označenie F, teda

$$F_1 = F_2 = F_{10} = F.$$

Teraz treba zapísať rovnice pre vodorovné a zvislé zložky síl pôsobiacich na ľavý valec. Vo vodorovnom smere:

$$F_1\cos 30° + F_2 - N_1\cos 60° = F(\sqrt{3}/2 + 1) - N_1/2 = 0, \qquad (2)$$

v zvislom:

$$N_2 - mg - N_1\cos 30° - F_1\cos 60° = N_2 - mg - \sqrt{3}\,N_1/2 - F/2 = 0. \qquad (3)$$

Máme teda vzťahy (1), (2), (3), čo sú tri rovnice o troch neznámych. My však nepotrebujeme vedieť veľkosť síl N_1, N_2, ani F, ale zaujímajú nás len podiely F/N_1 a F/N_2. Ak má byť sústava v rovnováhe, obe tieto čísla by mali byť menšie nanajvýš rovné koeficientu trenia f. Tu je čas na zamyslenie. Úlohy zo statiky sa totiž často riešia tak, že trecie sily sa položia rovné maximálnej trecej sile (normálová sila krát koeficient), potom vyriešime vzniknutú sústavu. Táto úvaha ale nefunguje vždy. Chcete príklad?

Položíme kvádrik na stôl a on sa nám od radosti rozbehne niektorým smerom, lebo naň pôsobí trecia sila veľkosti fmg, kde význam symbolov je taký ako obyčajne. Akokoľvek som sa snažil, nič podobné sa mi pozorovať nepodarilo, takže alebo je bežný koeficient trenia veľmi malý, alebo je chyba niekde v teórii. Chcel som tým povedať len toľko, že trecia sila nie je vždy maximálna možná, ale je len zložkou reakcie na nejakú inú silu.

Komu nestačí sugestívny kvádrikový experiment, nech si uvedomí, že spolu s rovnicami $F/N_1 = f$ a $F/N_2 = f$ by sme dostali systém rovníc, ktorý by bol neriešiteľný (vyskúšajte prečo!)

Postupovať budeme preto nasledovne: Vyrátame obidva podiely - F/N_1 a F/N_2. Koeficient musí byť väčší nanajvýš rovný ako obidva z týchto podielov. Z druhej rovnice dostaneme podiel F/N_1: $f \geq 1/(2 + \sqrt{3})$ a po úprave zvyšných dvoch rovníc (dosadením za N_1 a vylúčením mg) vznikne podmienka

$$\frac{F}{N_2} = \frac{1}{3(2+\sqrt{3})} \leq f\ ,$$

ktorá je zrejme slabšia ako tá pre silu N_1, takže máme $f \geq 1/(\sqrt{3} + 2)$, čo je správny výsledok. Zistili sme teda, že kritickým miestom, t.j. miestom, ktoré ja najnáchylnejšie na prešmykovanie, je dotykové miesto oboch valcov, a teda z rovníc $F/N_1 = f$ a $F/N_2 = f$ je v kritickom prípade splnená iba prvá. Z tohto vieme tiež povedať, čo sa stane, keby f bolo o trošku menšie než minimálne možné. Valce budú medzi sebou prešmykovať, avšak po podložke sa budú kotúľať bez prešmykovania.

Pri riešení sme nemuseli zostavovať všetky rovnice práve takto, ale dala by sa použiť úvaha ako napríklad: Valce na podložku pôsobia silou $2N_2$ a to by malo byť rovné ich tiaži, t.j. $3mg$. Potom nemusíme písať poslednú z troch rovníc, ale z prvých dvoch vyjadríme mg pomocou F a dosadíme do $N_2 = 3mg/2$. Celá úloha sa dala riešiť aj tak, že ste zapísali rovnice momentov síl pôsobiacich na spodný valec vzhľadom na bod, v ktorom sa dotýka podložky. Jediné dve sily, ktoré majú takýto moment nenulový, sú N_1 a F_1. Aby sa valec neotáčal, mala by byť sila F_1 rovná alebo väčšia ako $N_1 \mathrm{tg} 15°$ (v hraničnom prípade smeruje výsledná sila do bodu dotyku valca s podložkou, takže má nulové rameno). Z toho dostaneme

$$f \geq \mathrm{tg}\ 15° = 1/(2 + \sqrt{3}).$$

Ak ste však príklad riešili takto, zišlo by sa nejako ukázať, že podmienka pre trenie v bode dotyku valca s podložkou je slabšia. Preto za tieto riešenia išli väčšinou body dolu.

Poučenie z tejto úlohy je teda nasledovné - úlohy tohto typu by sa mali riešiť tak, že najprv počítame s nejakou trecou silou (u nás F) a určíme jej veľkosť takú, aby bola sústava v rovnováhe (zapíšeme preto rovnice pre všetky sily a momenty) a až na konci povieme, že $f \geq F/N$. Ak máme viac trecích síl, dostaneme viacero podmienok pre f, pričom výsledkom je tá najsilnejšia z nich.

Najčastejšia chyba, ktorá sa v riešeniach vyskytovala, bolo rozkladanie tiažovej sily pôsobiacej na vrchný valec na dve zložky, ktoré ste potom považovali za normálové sily, ktorými pôsobí vrchný valec na spodné valce. Chyba je v tom, že ste chronicky zabúdali na trecie sily F_{10}, ktoré taktiež pôsobia na horný valec a zapríčinia, že sila N_1 bude trochu menšia, ako by vyšlo bez nich. Možno sa vám podarilo dostať aj tak správny výsledok, ale to len preto, lebo Venuša s Marsom sa dostali do správnej konštelácie a na vás sa usmialo šťastie.

FYZIKÁLNY KOREŠPONDENČNÝ SEMINÁR

výsledková listina A – kategórie po 1. sérii zimného semestra 20. ročníka

	Priezvisko	Meno	Trieda	Škola	A-1.1	A-1.2	A-1.3	A-1.4	☠	Σ
1.	Závodný	Jakub	ok.	G BA Grösslingova	4,0	5,0	5,0	6,0		20,00
2.	Imriška	Jakub	3 A	G BA J. Hronca	1,0	5,0	2,5	6,0		15,70
3.	Simančík	František	ok.	G BA Grösslingova	4,0	–	5,0	6,0		15,00
4.	Dzetkulič	Michal	3 A	G PH Michalovce	4,0	5,0	2,5	3,0	-1	14,70
5.	Burger	Michal	ok.	G BA Grösslingova	2,0	–	5,0	6,0		13,00
6.	Berta	Peter	2 A	G Veľké Kapušany	3,0	4,0	–	4,5		12,97
	Perešíni	Peter	3 F	G BB Tajovského	1,0	5,0	3,5	2,0		12,97
8.	Astaloš	Róbert	4 A	G Rimavská Sobota	1,0	5,0	2,0	4,5		12,50
9.	Kuchárik	Marcel	3 D	G MRŠ NMV	3,0	4,5	2,0	1,5		12,49
10.	Kravec	Martin	3 A	G PH Michalovce	4,0	4,0	2,0	2,0	-1	12,44
	Takáč	Slavomír	3	G Nové Zámky	4,0	2,0	2,5	3,5	-1	12,44
12.	Takács	Michal	3 F	G BB Tajovského	1,0	4,5	2,0	3,0		12,00
13.	Štolcová	Jana	se.	G Nitra Párovská	1,0	3,5	2,0	5,0	-1	11,97
14.	Hrdá	Marcela	3 B	G BA J. Hronca	1,0	5,0	2,0	2,0		11,50
	Pôbišová	Zuzana	3 F	G BB Tajovského	1,0	5,0	2,0	2,0		11,50
16.	Komorovský	Marek	se.	G Dubnica nad Váhom	1,0	3,5	2,0	4,5	-1	11,49
17.	Kováč	Adrián	4 A	G PH Michalovce	1,0	5,0	2,0	3,0		11,00
18.	Sasák	Róbert	4 D	SPŠE Piešťany	3,5	4,5	0,5	1,5		10,00
	Tejiscak	Matus			4,0	–	2,0	4,0		10,00
20.	Foltin	Miroslav	3 C	G Jána Hollého	1,0	5,0	1,5	1,0		9,97
21.	Mikuláš	Ján	se.	G BST Lučenec	1,0	5,0	2,0	2,5	-1	9,50
22.	Fačkovec	Boris	se. A	G Piešťany	1,0	4,0	2,0	1,0		9,44
23.	Zámečník	Peter	3 D	G MRŠ NMV	1,0	3,5	2,0	1,0		8,91
24.	Šibík	Juraj	4 D	G Považská Bystrica	1,5	4,5	2,0	1,5	-1	8,50
25.	Molčány	Dušan	3 B	SPŠS BA Feinorovo nábr.	1,0	4,0	0,0	1,0		7,26
26.	Zitrický	František	E	G PH Michalovce	1,0	1,0	1,5	3,0		6,50
27.	Kaniansky	Miroslav	se. A	G Piaristické Nitra	1,0	1,5	2,0	1,5	-1	6,26
28.	Ďurčík	Miroslav	3 C	G BST Lučenec	1,0	2,5	1,0	0,5		6,13
29.	Vojtko	Andrej	ok. A	G Skalica	1,0	3,0	2,0	–		6,00
30.	Šťastný	Tomáš	3 C	G Poprad Tatarku	1,0	3,0	1,0	0,5	-1	5,70
31.	Korch	Jakub	7 A	G Piaristické Nitra	1,0	2,0	1,5	0,5	-1	5,13
32.	Hergelová	Beáta	3 B	G BST Lučenec	3,0	4,0	2,0	1,5	-7	5,00
33.	Rušin	Michal	ok.	G Spišská Stará Ves	1,0	2,5	1,0	0,5	-1	4,00
34.	Ladecky	Martin	4 B	G VOZA	1,0	0,5	2,0	–		3,50
35.	Korenčiak	Miloš	se. B	OG ZA Varšavská cesta	3,0	2,0	2,0	1,0	-6	3,44
36.	Maslák	Stanislav	5 E		1,0	0,5	1,0	0,5		3,00
	Piják	Peter	4 B	G VOZA	1,0	–	2,0	–		3,00
38.	Bašista	Peter	3 A	G PH Michalovce	–	–	2,0	–		2,00
	Kulik	František	4 E	G Humenné	1,0	0,5	–	0,5		2,00
	Petrík	Peter	4 B	G BA J. Hronca	1,0	–	–	1,0		2,00
41.	Vanyo	Milan	7 A	G Piaristické Nitra	1,0	0,5	–	0,5	-1	1,54
42.	Angus	Michal	4 B	G BA A. Einsteina	–	–	–	1,5		1,50
43.	Kašuba	Mário			1,0	–	–	–		1,00