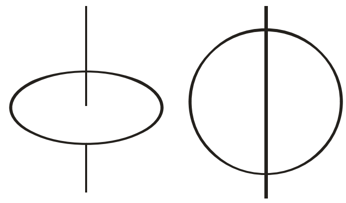
FYZIKÁLNY KOREŠPONDENČNÝ SEMINÁR

2. kolo letnej časti 20. ročníka
A – kategória (starší)
školský rok 2004/2005
termín príchodu riešení
6. 4. 2005

www. Fks **.sk**

FKS, KZDF FMFI UK
Mlynská dolina
842 48 Bratislava
riesenia@fks.sk
info@fks.sk

A–2.1 P(a)lacka (5 bodov)
Majme kruh vyrezaný z homogénneho materiálu s hmotnosťou m a polomerom r. Jeho moment zotrvačnosti vzhľadom na os, ktorá prechádza stredom a je kolmá na rovinu kruhu, je $1/2mr^2$ (vľavo). Aký je moment zotrvačnosti vzhľadom na os, ktorá prechádza stredom a leží v rovine kruhu (vpravo)? Skúste úlohu vyriešiť bez použitia integrálov.

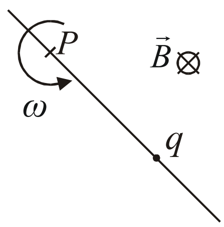


A–2.2 Rádio jádia (5 bodov)
Jadro rádia ${}^{226}_{88}\mathrm{Ra}$, ktoré je v pokoji, sa rozpadá na jadro radónu ${}^{222}_{86}\mathrm{Rn}$ a časticu ${}^{4}_{2}\alpha$ (jadro ${}^{4}_{2}\mathrm{He}$). Vypočítajte akou rýchlosťou sa bude pohybovať častica ${}^{4}_{2}\alpha$ dostatočne dlho po zrážke, keď už môžeme zanedbať vzájomné pôsobenie s ${}^{222}_{86}\mathrm{Rn}$. Všetky rýchlosti sú malé v porovnaní s rýchlosťou svetla. Pokojové energie sú v tabuľke.

$m_{\mathrm{Ra}}c^2$	212253,339 MeV
$m_{\mathrm{Rn}}c^2$	208490,339 MeV
$m_{\alpha}c^2$	3758,132 MeV

A–2.3 PolE na osi (5 bodov)
Vypočítajte veľkosť intenzity E elektrického poľa na osi prstenca s polomerom r nabitého rovnomerne rozmiestneným nábojom Q vo vzdialenosti x od jeho stredu.

A–2.4 Priame kmity (5 bodov)
V medzihviezdnom priestore sa nachádza priamka p ktorá sa otáča okolo svojho bodu P konštantnou uhlovou rýchlosťou veľkosti ω. Celé sa to nachádza v homogénnom magnetickom poli kolmom na rovinu pohybu priamky s indukciou B. Po priamke sa môže bez trenia pohybovať bodový náboj Q s hmotnosťou m. Vedci po dlhom skúmaní zistili, že za istých okolností koná tento náboj harmonické kmity po priamke p s rovnovážnou polohou v bode P. Čo musí spĺňať náboj Q, aby k tomuto javu došlo a aká je perióda týchto kmitov?



Tento seminár podporujú
KZDF FMFI UK a
iuventa

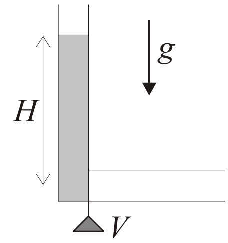
FYZIKÁLNY KOREŠPONDENČNÝ SEMINÁR

3. kolo letnej časti 20. ročníka
A – kategória (starší)
školský rok 2004/2005
termín príchodu riešení
27. 4. 2005

www. **.sk**

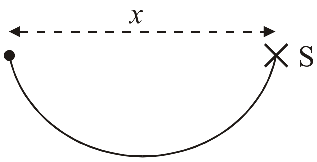
FKS, KZDF FMFI UK
Mlynská dolina
842 48 Bratislava
`riesenia@fks.sk`
`info@fks.sk`

A–3.1 Trubka (5 bodov)
Zvislá trubica je naplnená vodou do výšky H, v spodnej časti je uzavretá ventilom V a ústi do dlhej vodorovnej trubice (táto je na začiatku prázdna). V čase $t = 0$ ventil otvoríme. Ako závisí rýchlosť klesajúcej hladiny od výšky vody ostávajúcej v zvislej trubici h? Ako sa mení zrýchlenie klesajúcej hladiny s časom t? Pri riešení môžete pokladať polomery trubíc za malé v porovnaní so začiatočnou výškou vody H.

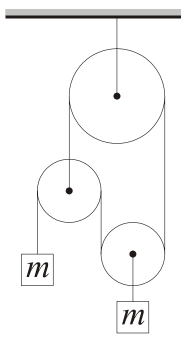


A–3.2 Doska levitation (5 bodov)
Majme sklenenú dosku s hmotnosťou m, na ktorú začneme kolmo svietiť laserom. Koeficient odrazu pri dopade svetla na rozhranie vákuum-sklo, sklo-vákuum je v oboch prípadoch rovný α. Aký je výkon lasera P, aby sa doska v Zemskom gravitačnom poli nehýbala? Doska je vodorovná a svietime rovno do jej ťažiska.

A–3.3 Jednoduchá perióda (5 bodov)
Na nehmotnom, dokonale pružnom, ale nekonečne tuhom vlákne s dĺžkou l, visí hmotný bod, zatiaľ čo druhý koniec vlákna je upevnený v bode S. Hmotný bod zdvihneme do tej istej výšky, v akej sa nachádza bod S a necháme ho voľne padať z vodorovnej vzdialenosti x od S. Nájdite také x rôzne od l, pre ktoré bude náš hmotný bod konať čo najjednoduchší periodický pohyb a vypočítajte jeho periódu.



A–3.4 Kladky (5 bodov)
Na obrázku je sústava kladiek, ktoré sa môžu otáčať bez trenia a pri výpočte ich môžeme považovať za nehmotné. Aké bude zrýchlenie závaží s hmotnosťami m, ak ich necháme voľne sa pohybovať?



Tento seminár podporujú
KZDF FMFI UK a
iuventa

FYZIKÁLNY KOREŠPONDENČNÝ SEMINÁR

vzorové riešenia 1. série
A – kategória (staršia)
20. ročník
letný semester
školský rok 2004/2005

www. Fks **.sk**

FKS, KZDF FMFI UK
Mlynská dolina
842 48 Bratislava
riesenia@fks.sk
info@fks.sk

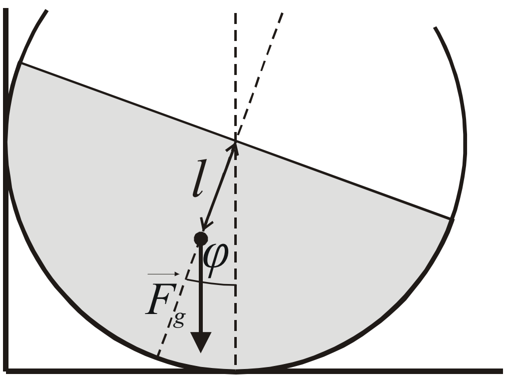
A – 1.1 Nerozhodný valec (opravoval Peťo)

Po vodorovnej podložke sa malou rýchlosťou bez prešmykovania kotúľa nealkoholická fľaša (valec) so zanedbateľnou hmotnosťou a tenkými stenami, v ktorej je presne do polovice jej objemu naliata voda. Zrazu narazí do zvislej steny. Fľaša chvíľu postojí pri stene a potom sa začne kotúľať späť. Prečo je to tak? Popíšte okamih, kedy sa fľaša opäť rozbehne!

Dva body navyše pre odvážnych: Vypočítajte, ako dlho valec čaká pri stene, ak má polomer r*, výšku* h *a na začiatku sa pohybuje malou rýchlosťou* v*. Voda v jeho vnútri však medzičasom stuhla na ľadový polvalec, ktorý má rovnaký objem ako pôvodná voda (zanedbávame rozťažnosť). Jeho hustota je* ρ *a po stenách fľaše sa šmýka s nulovým trením. Vzdialenosť ťažiska polkruhu od stredu pôvodného kruhu s polomerom* r *je* $4r / 3\pi$.

Ahojte. Mnohí z vás si správne uvedomili, že za zdržanie fľaše je zodpovedná zotrvačnosť vody, poďme sa teda spolu poriadne pozrieť ako a prečo.

V ideálnom prípade je počas rovnomerného pohybu trenie medzi stenou valca a vodou pomerne malé, takže väčšina vody si otáčanie vôbec nevšíma a hladina kvapaliny je vodorovná. Keď rozbehnutý valec narazí do steny, zastaví sa, čo však neplatí pre vodu v jeho vnútri. Tá bude strácať svoju hybnosť postupne. V okamihu, keď sa valec zastaví, vode neostane nič iné, len sa prispôsobiť okolnostiam - natlačí sa na ľavú stenu valca, v dôsledku čoho sa celá masa vody trochu nakloní. Počas nakláňania sa zmenšuje hybnosť vody vo vodorovnom smere (uvedomiť si prečo, ako pomôcku si namiesto vody predstavte ľad). Z toho vyplýva, že stena pôsobí na



fľašu silou (jediná vodorovná sila pôsobiaca na valec je reakcia steny). Aby to bolo možné, musí sa fľaša steny dotýkať a pri tom strávi časť (polovicu, ako uvidíme neskôr) čakania. Počas tohto deja sa premieňala kinetická energia vody na potenciálnu, lebo so spomínaným naklonením hladiny súvisí aj zvýšenie polohy ťažiska sústavy. Za druhú polovicu času je zodpovedný presne opačný proces, lebo kvapalina v naklonenej rovine príliš dlho nevydrží, bude sa chcieť vyrovnať. Pritom však získava nejakú rýchlosť (klesá poloha ťažiska, potenciálna energia sa premieňa na kinetickú), tentoraz však opačným smerom. V okamihu, keď ťažisko prestáva zrýchľovať, sa valec odlepí od steny – to je presne vtedy, keď sa hladina stane opäť vodorovnou (rozmyslieť). Tu mnohí spravili chybu – voda sa nenakloní ďalej, ako za vodorovnú polohu. Mnohí z vás si zobrali skutočnú fľašu s vodou a pokúšali sa tento jav pozorovať, na čom nie je nič zlé, až na to, že v zadaní sa nehovorí o celkom skutočnej fľaši. Kývavý pohyb fľaše po odraze je napríklad spôsobený nezanedbateľnou hmotnosťou fľaše a rozvlnením vodnej hladiny, ktoré by bolo zanedbateľné, keby rýchlosť *v* bola dostatočne malá. Takisto úvahy o tom, kedy sa voda „preklopí“ (ako škôlkar-kaskadér na hojdačke), sú kvôli malosti *v* scestné.

Pokúsme sa teraz vypočítať, aký dlhý je čas čakania pre kus ľadu, ktorým sme nahradili vodu iba preto, aby sme sa nemuseli zaoberať vlnami a nerovnosťou hladiny. Keď zamrznutý polvalec narazí na stenu, jediný pohyb, ktorý bude môcť v najbližších okamihoch vykonávať, je otáčavý pohyb okolo osi valca. Na výpočet si stačilo uvedomiť, že polvalec sa bude správať ako fyzikálne kyvadlo. Hľadaný čas T je potom rovný polovici doby kmitu takéhoto kyvadla. Nech moment zotrvačnosti polvalca vzhľadom na os fľaše je J a jeho hmotnosť m. Moment zotrvačnosti valca (na stred) je $mr^2/2$ (čo nájdete v MFChT). Pre moment zotrvačnosti polvalca platí ten istý vzorec (neodpadávajte prekvapením). Ak totiž rozrežeme valec na 2 polvalce, tieto budú mať polovičnú hmotnosť, ale aj polovičný moment zotrvačnosti, ktorý presne dostaneme, keď do vzorca tú polovičnú hmotnosť dosadíme. Použitím tabuľkového vzťahu pre periódu fyzikálneho kyvadla dostaneme

$$T = \frac{1}{2} 2\pi \sqrt{\frac{J}{mgl}},$$

kde $l = 4r/3\pi$ je vzdialenosť ťažiska od osi otáčania, z čoho po úprave

$$T = \pi \sqrt{\frac{3\pi r}{8g}}.$$

Pokiaľ máme sklerózu v pokročilom štádiu a vzorec si nepamätáme, stačí, keď zapíšeme celkovú energiu rozbehnutého polvalca a urobíme analógiu s energiou harmonického oscilátora. Dostávame, prekvapivo, ten istý výsledok. Čas, ktorý sa fľaša bude dotýkať steny je rovný

$$\pi \sqrt{\frac{3\pi r}{8g}}.$$

A - 1.2 Rýchlosť svetla (opravovala Baša)

Rýchlosť svetla vo vákuu je sympatická známa veličina, čo ale robí také svetlo v potravinárskom oleji? Zožeň si stopky a skús túto hodnotu čo najpresnejšie zmerať. Uvítame aj odhad chýb, ktorých si sa dopustil.

Väčšina z vás prišla na to, že existuje niečo ako index lomu a Snellov zákon, v ktorom vystupuje hľadaná rýchlosť svetla a nejaké tie uhly, čiže celkom merateľné veličiny. Tí, ktorí na to neprišli, hold smola, tie stopky boli na oklamanie nepriateľa a medzi nami, dosť veľká blbosť na to, aby ste si to všimli...

Ako viete, svetlo v oleji trošku spomaľuje. Vieme, že pomer rýchlostí svetla vo vákuu a v oleji je rovnaký ako index lomu oleja (index lomu vzduchu je 1). Stačí nám teda zistiť, aký index lomu má náš olej a skoro sme vyhrali. Na to nám je dobrý už spomenutý Snellov zákon, ktorý udáva vzťah medzi indexom lomu a uhlami, pod akými svetlo prechádza rozhraním:

$$n_1/n_2 = \sin\alpha_2/\sin\alpha_1.$$

Len ako zmerať uhly?

Väčšina z vás si vybrala celkom jednoduchý spôsob, a to tak, že vzala dva uhlomery a merala uhol nad a pod hladinou. Aj tak sa dá, ale nemusí to byť celkom presné. Jednoduchšie je zmerať, o koľko sa vám taký lúč pri prechode olejom posunie. Zistíte si napríklad, kam lúč dopadne ak v nádobe nie je olej, a kam dopadne ak tam ten olej je. Stačí si pokus pekne nakresliť a zistiť, ktorý uhol je ktorý.

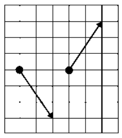
Treba si však uvedomiť, že svetelnému lúču nestojí v ceste len olej, ale aj nádoba. Ak ste merali uhly, bolo to v pohode, pretože nádoba uhol láme pri vstupe do nej (myslím tým ten kúsok umelej hmoty alebo skla, z ktorého je nádoba zhotovená), ale aj pri výstupe, takže konečný uhol zostáva zachovaný. Ak ste však merali posunutie lúča, mohli vám vzniknúť rôzne odchýlky, pretože aj vo fľaši sa lúč o čosi posunie. Pokiaľ však použijeme tenkú umelohmotnú fľašu a volíme rozumný uhol dopadu, posunutie spôsobené fľašou je zanedbateľné…

Celkom zaujímavé by mohlo byť ešte použitie úplného odrazu svetla tak, že by ste svietili na hladinu oleja zo spodku, teda z oleja... Stačilo by vám odmerať jeden uhol – ten, pri ktorom nastane úplný odraz - a tým by sa chyba merania zmenšila. Ale verím, že nikomu sa nechcelo pchať do oleja tie úbohé ukazovátka…

Takže k bodovaniu: Pri experimentoch je potrebné spomenúť, akej chyby ste sa kde mohli dopustiť a tým približne určiť presnosť, s akou ste pracovali. Dobré je tiež ukázať ako strašne ste sa nad experimentom zapotili, a preto ak už nameráte nejaké hodnoty, nebojte sa ich zverejniť. To je pri experimentálnych úlohách dobrý zvyk.. A samozrejme, vždy ma potešil nákres vášho meracieho zariadenia, lebo pochopiť z textu, čo vlastne ste robili, bolo občas celkom náročné...

To by bolo asi tak všetko, stačí si pamätať, že počet bodov stúpa s počtom spravených experimentov a vynaloženej snahy, teda aj s vysvetlením chýb, náčrtom obrázkov a nejakou tabuľkou, iba že by ste nás oslnili nejakým prevratným experimentom...

A – 1.3 Génius Kepler (opravoval Škrek)



Kepler objavil tri zákony pohybu planét. Tak, ako ich poznal on, sa dajú použiť iba vtedy, keď je obežnica omnoho ľahšia ako centrálne teleso. Čo ak máme zrátať periódu obehu dvoch hviezd s podobnými hmotnosťami (zľava doprava) M a 2M? Vyriešte túto úlohu za pomoci tých Keplerových zákonov, ktoré objavil samotný majster, a elementárnej fyziky. Dĺžka jedného dielika je l, rýchlosti hviezd v jednom okamihu sú také ako na obrázku (jeden dielik odpovedá rýchlosti v*). Pritom platí* $\kappa M = 24lv^2$.

Helou hviezdy, tak ako? Rotujete? Počkajte, hneď vám zrátam periódu. Tak sa na to pozrieme, najprv teda zákony súdruha Keplera:

1. *Planéty obiehajú okolo Slnka po elipsách s malou výstrednosťou, pričom Slnko sa nachodí v ich spoločnom ohnisku.*
2. *Plochy opísané sprievodičom tejže planéty, vzťahujúcim sa na stred Slnka v ľubovolných dvoch rovnakých časových intervaloch sú rovnaké. (Tento zákon sa dá prepísať do reči matematiky takto: v.r.sinα = konšt. kde v je rýchlosť obežnice, r je sprievodič a α uhol medzi nimi)*
3. *Druhé mocniny obežných dôb planét pri ich obiehaní okolo Slnka sú úmerné tretím mocninám veľkých poloosí ich eliptických dráh.*

Zdroj : D. Ilkovič, Fyzika, SVTL BA 1957, 808 strán, 481 obrázkov, 45 tabuliek, str. 96

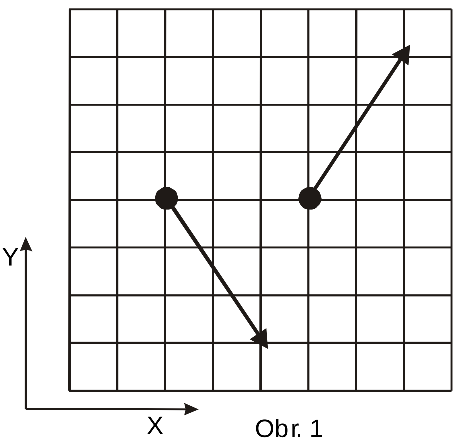
Kepler predpokladal, že stred Slnka je totožný s ťažiskom slnečnej sústavy a ten sa nehýbe. To nás vedie k tomu, aby sme sa venovali najprv ťažisku našej dvojhviezdy.

Označme si rýchlosť prvej hviezdy v_1, druhej v_2 a ťažiska v_t. Pričom v_1 a v_2 vieme odčítať z obrázka 1, kde jeden dielik zodpovedá vzdialenosti l a rýchlosti v. Po zavedení súradnicovej sústavy ako na obrázku vieme že $\vec{v}_1 = (2v\,, -3v)$ a $\vec{v}_2 = (2v\,, 3v)$. Zo zákona zachovania hybnosti vieme, že

$$M\vec{v}_1 + 2M\vec{v}_2 = (M + 2M)\vec{v}_t\,,$$

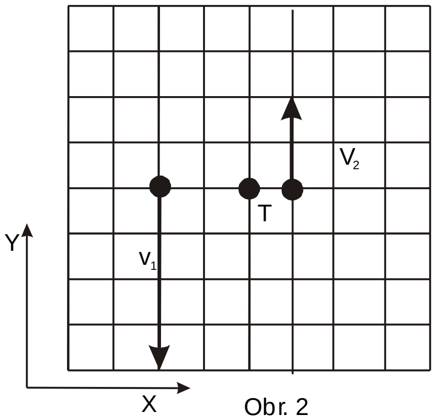
a teda že

$$\vec{v}_t = \frac{M(\vec{v}_1 + 2\vec{v}_2)}{3M} = (2v\,, v).$$



Obr. 1

Pohybujúce ťažisko nám nevyhovuje, ale tento problém sa dá ľahko vyriešiť. Zvolíme si pozorovateľa, ktorý sa bude pohybovať s ťažiskom. Takýto pozorovateľ vníma rýchlosti hviezd v'_1, v'_2 a v'_t, kde $v'_1 = v_1 - v_t = (0\,, -4v)$, $v'_2 = v_2 - v_t = (0\,, 2v)$ a $v'_t = v_t - v_t = 0$. Super, takže ťažisko sa nehýbe. Ale kde je? Aha, už ho vidím, je na spojnici oboch hviezd v dvoch tretinách ich vzájomnej vzdialenosti bližšie k druhej (ťažšej) hviezde. Pre lepšiu orientáciu kuk na obr. 2. Na obe hviezdy pôsobí gravitačná sila veľkosti



Obr. 2

$$F_g = \kappa \frac{2M^2}{x^2},$$

kde κ je gravitačná konštanta a x vzájomná vzdialenosť hviezd. Teraz vymažeme z priestoru hviezdneho hviezdu č.1 (tú ľahšiu, ťažšia sa horšie gumuje) a namiesto nej prišpendlíme do ťažiska hviezdu plachtiacich hrozienok s hmotnosťou $M/9$, ktorá je známa tým že sa v našej vzťažnej sústave nepohybuje. Aká bude gravitačná sila pôsobiaca na druhú hviezdu? Ich vzájomná vzdialenosť je teraz $x/3$, a teda

$$F_g' = \kappa \frac{2M.M/9}{(x/3)^2} = \kappa \frac{2M^2}{x^2},$$

čo je napodiv to isté, ako keď sme tam mali obe hviezdy. Paráda, takže zabudneme na prvú hviezdu a už máme známu úlohu o jednej nepohyblivej hviezde s hmotnosťou $M/9$ a jej obežnici s hmotnosťou $2M$, ktorej máme vyrátať periódu obehu podľa Keplerových zákonov.

Platí zákon zachovania mechanickej energie a zákon zachovania momentu hybnosti (čo je druhý Keplerov zákon v ružovom). Celková mechanická energia sústavy E_0 je súčtom potenciálnej a kinetickej energie v hociktorom čase (takže napríklad aj vo východzej situácií). Nulový potenciál gravitačného poľa hviezdy plachtiacich hrozienok (familiárne hviezda č.3) môžeme voliť v nekonečne, a tak máme:

$$E_0 = E_K + E_P,$$

$$E_k = \frac{1}{2} 2M\vec{v}_2'^2 = M\vec{v}_2'^2 = 4M\vec{v}^2,$$

$$E_p = -\kappa \frac{2M.M/9}{x/3} = -\kappa \frac{2M^2}{3x} = -\kappa \frac{2M^2}{9l},$$

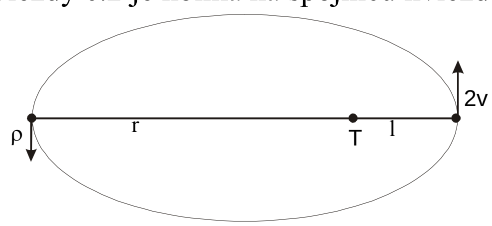
kde $x/3$ je vzdialenosť hviezdy č.2 od hviezdy č.3 a x vzdialenosť hviezd č.1 a č.2. Podľa obr.2 platí $x/3 = l$. Na rad prichádza mnohými diskutovaná a kritizovaná hviezdna podmienka

$$\kappa M = 24lv^2.$$

Je taká preto, aby nám vyšli pekné čísla. Ak to pekne všetko sčítame, dostaneme

$$E_0 = 4Mv^2 - \frac{48lv^2M}{9l} = \frac{12}{3}Mv^2 - \frac{16}{3}Mv^2 = -\frac{4}{3}Mv^2.$$

Ak máme zistiť periódu obehu z 3. Keplerovho zákona, čo aj plánujeme, potrebujeme zistiť dĺžku hlavnej poloosi elipsy, po ktorej hviezda č.2 obieha okolo hviezdy č.3. Keď sa pozrieme na zadanú situáciu v našej sústave, vidíme, že rýchlosť hviezdy č.2 je kolmá na spojnicu hviezd 2 a 3. Takáto situácia môže nastať iba ak je obežnica v perihéliu alebo apohéliu (najbližšie alebo najďalej). Predpokladajme, že sa jedná o perihélium. Súčet vzdialeností hviezd 2 a 3 v perihéliu a aféliu je rovný presne dvojnásobku hlavnej poloosi elipsy, po ktorej 2. hviezda obieha. O5 kuk na obr. 3. V prípade perihélia vieme, že $x = l$ a $|v'_2| = 2v$ v aféliu si označíme vzdialenosť ako r a rýchlosť ako ρ (kuk na obr. 3). Z 2. Keplerovho zákona :



Obr. 3

$$2M\,2vl = 2M\rho r \Rightarrow \rho = 2vl/r. \tag{1}$$

Zo zákona zachovania energie

$$M\rho^2 - \kappa \frac{2M^2}{9r} = E_0 = -\frac{4}{3}Mv^2. \tag{2}$$

Dosadíme (1) do (2)

$$4Mv^2\frac{l^2}{r^2}-\kappa\frac{2M^2}{9r}=-\frac{4}{3}Mv^2,$$

prenásobíme r^2/M a dosadíme hviezdny vzorec $\kappa M = 24lv^2$

$$\frac{4}{3}v^2r^2-\frac{48}{9}v^2lr+4v^2l^2=0.$$

Upravíme to na

$$r^2-4lr+3l^2=0\Rightarrow(r-l)(r-3l)=0.$$

Máme dva korene, pričom vzdialenosť $r_1 = l = x$ zodpovedá počiatočnému stavu a ide o perihélium, a tento stav sme už poznali predtým takže vzdialenosť $r_2 = r = 3l$ a zodpovedá apohéliu. Dvojnásobok poloosi je teda $r + x = 3l + l = 4l$. No a už konečne môžeme zrátať periódu. 3. Keplerov zákon nám prakticky vraví, že hviezdy s rovnako dlhou poloosou obiehajú za rovnaký čas okolo centrálneho telesa. Teda ak poznáme poloos, nezaujíma nás v prípade dĺžky obehu konkrétna trajektória, môžeme si vybrať hocakú (teda hocakú eliptickú) trajektóriu, ktorú vieme zrátať (môžeme aj takú čo nezrátame, ale o tom inokedy... napr. na skúške). Prirodzený výber je kružnica s priemerom $4l$, ktorú vieme pekne spočítať. Takže

$$F_g = F_d, \tag{3}$$

kde F_g je gravitačná sila a F_d je sila dostredivá pri rovnomernom pohybe po kružnici s polomerom $4l/2 = 2l$. Platí

$$F_g=\kappa\frac{2M.M/9}{(2l)^2}\quad\text{a}\quad F_d=2Mw^2\,2l, \tag{4}$$

kde w je uhlová rýchlosť

$$w = 2\pi/T. \tag{5}$$

Spojením (3), (4) a (5) pre T dostaneme

$$T^2=\frac{288\pi^2l^3}{\kappa M}.$$

Opäť dosadíme náš zázračný vzorec $\kappa M = 24lv^2$ a odmocníme, potom dostaneme

$$T=\sqrt{12}\pi l/v.$$

Toto je perióda obehu hviezdy č.2 okolo ťažiska. Logicky ale musí platiť, že za rovnaký čas obehne aj prvá hviezda okolo ťažiska, lebo ťažisko je vždy medzi nimi a nehýbe sa. Takže tešíme sa, sme vo vytržení, ručičky sa nám trasú... No užili sme si svoj hviezdny okamih. Lúčim sa s vami pozdravom „*We are stardust*“.

A – 1.4 Ľahký kondík (opravoval dj ONY)

Kondenzátor s kapacitou C, to je vám vec! Jeho ladné rovnobežné dosky vzdialené d *a je medzi nimi vákuum. Medzi jeho dosky vložíme rovnobežne tretiu dosku hrúbky* l *(ostatné rozmery má také isté ako kondík). Ako ďaleko od stredu kondenzátora ju máme vložiť, aby bola výsledná kapacita sústavy čo najväčšia?*

Bonjour!

Ako je jasné z "výsledkovky", väčšina z vás nemala s týmto príkladom vážne problémy. No aj tak sa vám oplatí prečítať si tento vzorák, pretože okrem búšenia vzorcov snáď pochopíme aj fyziku skrytú za nimi.

Začneme so vzorcom $C = \varepsilon S/d$, čo je známy vzorec pre kapacitu kondenzátora. Ak teraz vložíme dovnútra tretiu dosku a táto bude vodivá, vytvoríme tým vlastne dva nové kondenzátory, ktoré sú zapojené za sebou, takže pre výslednú kapacitu platí

$$1/C = 1/C_1 + 1/C_2.$$

Ak medzera medzi ľavou doskou má veľkosť x, na pravú ostane $d - l - x$. Preto

$$1/C_1 = x/(\varepsilon S),\ \ 1/C_2 = (d - l - x)/(\varepsilon S).$$

Po dosadení dostávame

$$C = \varepsilon S/(d - l),$$

čo je hodnota nezávislá od x. Ďalším zaujímavým pozorovaním je, že pre $l = 0$ sa kapacita kondíka oproti pôvodnej nezmení. Môžeme teda povedať, že kondík si vôbec nevšimne, že mu do útrob strčili vodivú platňu, pokiaľ je táto dostatočne tenká. A čo ak je doska, ktorú do vnútra strčíme, z nevodivého materiálu? V tomto prípade sme vlastne namiesto jedného kondíka vytvorili 3 kondíky – medzera pred doskou, samotná doska, medzera za doskou. Kto má problém s tým, že strednému kondíku chýbajú kovové steny, nech si predstaví strednú dosku potiahnutú tenučkým plechom – vieme už, že toto nezmení vlastnosti kondíka (rozmyslieť). Po krátkom výpočte (sčítame prevrátené hodnoty všetkých troch kapacít) dostávame výslednú kapacitu zase raz ako nezávislú od x. Je teda úplne jedno, kam tretiu dosku vložíme.

Toto ste urobili skoro všetci a aj to stačí, ale kto ma chuť na čosi viac, resp. rozumieť, prečo je to tak, prečítajte si nasledujúci BONUS.

Keď privediem na nenabitú vodivú platňu, ktorá má plochu S, náboj Q, plocha sa nabije na plošnú hustotu $\sigma = Q/S$. Tento privedený náboj spôsobí, že sa potenciál φ dosky zvýši. Čím viac náboja privádzam, tým väčší potenciál (priamo úmerne) platňa má. Teda $Q = C\varphi$. Konštanta úmernosti je tzv. kapacita a závisí od geometrických a materiálových vlastností daného vodiča (platne). Takže kapacitu možno vyjadriť ako $C = Q/\varphi$.

Je známe, že elektrická intenzita pre nekonečne veľkú nabitú platňu nezávisí od vzdialenosti od tejto platne a dá sa vyjadriť ako $E = \sigma/2\varepsilon$, kde ε je permitivita prostredia (miesta, v ktorom určujem túto el. intenzitu). Keď priblížim k tejto platni druhú, nenabitú, indukuje sa na nej opačný náboj, ktorý vytvára rovnakú elektrickú intenzitu. Výsledná elektrická intenzita takejto sústavy (nápadne pripomínajúcej kondenzátor) je daná súčtom oboch intenzít. Teda

$$E = \sigma/\varepsilon. \tag{1}$$

Napätie medzi dvomi platňami je dané ako

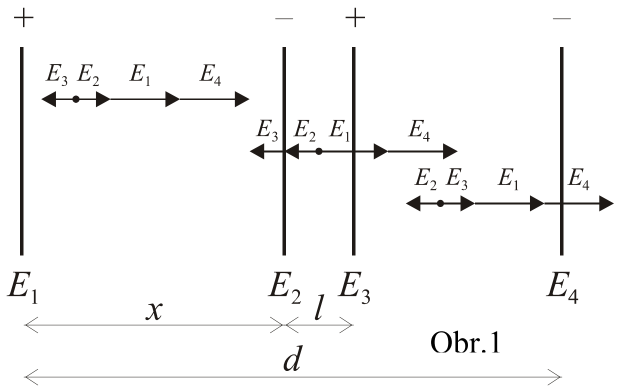
$$U = Ed \tag{2}$$

(d je vzdialenosť platní). Toto napätie je vlastne rozdiel potenciálov $U = \varphi - \varphi_0$. Pred nabitím je potenciál $\varphi_0 = 0$ a po nabití φ.

Takže kapacitu môžeme vyjadriť ako:

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{\sigma S}{Ed} = \frac{\varepsilon S}{d}. \tag{3}$$

V praxi sa nekonečné platne dosť ťažko konštruujú, takže uvažujeme platne (dosky) s plochou S. Využívať pre konečnú platňu vzorec (1) nás oprávňuje fakt, že ak sú platne oveľa bližšie k sebe ako sú ich rozmery, elektrické pole sa naozaj správa tak homogénne ako pri nekonečnej platni. Ostáva nám tomu uveriť, lebo matematický dôkaz je dosť náročný. Predstavte si, že ste chrobáčik na futbalovom ihrisku. Pre vás sa ihrisko javí ako nekonečná platňa. Ak by ste ale lietali kilometer nad ním, vôbec by sa nezdalo nekonečné.



Obr.1

Pozrime sa teraz na obrázok 1. Intenzita E_1 je vytváraná ľavou platňou a intenzita E_4 pravou. Po vložení tretej dosky sa na jej stenách zhromažďujú príslušné náboje (pozri obr.1), a vytvárajú intenzity E_2 a E_3 (toto nie je celkom triviálny fakt, treba si to premyslieť). Ak by bola stredná doska vodivá, náboje by boli rovnaké ako na platniach kondenzátora. Skúsme to ale riešiť všeobecne. Pozrime sa, aká je výsledná intenzita v troch rôznych miestach. Správne smery elektrických intenzít určíme jednoducho z dohody, že elektrická intenzita smeruje von z kladne nabitej oblasti, resp. do záporne nabitej oblasti. Predpokladajme, že vložená doska má všade rovnakú relatívnu permitivitu ε_r. Potom sa zrejme obe jej strany nabijú na rovnaký náboj, a teda $E_2 = E_3$. Z tohto faktu dostávame, že intenzita v oblasti 1 je rovnaká ako v oblasti 2. $E^1 = E^2 = E_1 + E_4$.

Vo vnútri tretej dosky to je $E^3 = E_1 + E_4 - E_2 - E_3$. Označme teraz vzdialenosť prvej a tretej dosky x. Potom celkové napätie medzi doskami 1 a 2 je súčtom napätí v jednotlivých oblastiach. Teda podľa (2) pre napätia môžeme napísať

$$U = (E_1 + E_4)x + (E_1 + E_4 - E_2 - E_3)l + (E_1 + E_4)(d - l - x) \tag{4}$$

$$U = (E_1 + E_4)(d - l) + (E_1 + E_4 - E_2 - E_3)l$$

Použijeme teraz vzťah (1) pre elektrickú intenzitu od dvoch platní.

$$U = \frac{\sigma}{\varepsilon}(d - l) + \left(\frac{\sigma}{\varepsilon} - \frac{\sigma}{\varepsilon\varepsilon_r}\right)l, \tag{5}$$

teda

$$U = \frac{\sigma}{\varepsilon}\left[d - l\left(1 + \frac{1}{\varepsilon_r}\right)\right]. \tag{6}$$

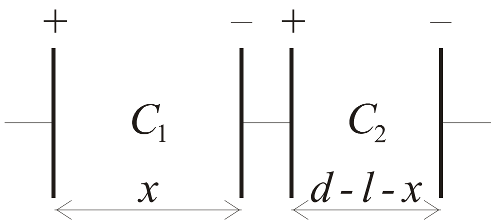
Výslednú kapacitu tejto sústavy určíme podľa (3) ako

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{\varepsilon S}{d - l\left(1 + \frac{1}{\varepsilon_r}\right)}. \tag{7}$$

Tu už vidíme, že kapacita závisí len od parametrov dosky a nie od jej umiestnenia. Maximálnu kapacitu preto dosiahneme v každej polohe. Takýmto štýlom uvažovala len Marcela H., za čo jej patrí pochvala. Ale čo ak bude tretia doska vodivá?

Relatívna permitivita materiálu je definovaná ako podiel vnútornej elektrickej intenzity (u nás je to $E_2 + E_3$) a celkovej elektrickej intenzity ($E_1 + E_2 + E_3 + E_4$). Ak je doska vodivá, celková elektrická intenzita je kompenzovaná vnútornou a tak permitivita ide do nekonečna. Preto $1/\varepsilon_r$ ide k nule. Z toho vyplýva, že pre vodivú dosku dostaneme vzťah

$$C = \varepsilon S/(d - l). \tag{8}$$



Stačilo samozrejme považovať dosku za vodivú, z čoho vyplynula rovnosť nábojov na stenách tretej dosky. Toto sme si mohli predstaviť ako sústavu dvoch kondenzátorov (viď obr.2). Pre výslednú kapacitu takejto sústavy C_v platí $1/C_v = 1/C_1 + 1/C_2$, t.j. $C_v = C_1C_2/(C_1 + C_2)$. Z toho po dosadení za $C_1 = \varepsilon S/x$ a $C_2 = \varepsilon S/(d - l - x)$ dostávame práve vzťah (8). Je to tiež veľmi pekný spôsob, ktorý použila väčšina z vás, ale prvý som uvádzal preto obšírne, aby ste sa viac vnorili do toho, ako to v tých kondíkoch vlastne behá.

A to by už snáď aj stačilo. Pekný koniec zimy.....

FYZIKÁLNY KOREŠPONDENČNÝ SEMINÁR

výsledková listina A – kategórie po 1. sérii letného semestra 20. ročníka

	Priezvisko	Meno	Trieda	Škola	A-1.1	A-1.2	A-1.3	A-1.4	☠	Σ
1.	Závodný	Jakub	ok.	G BA Grösslingova	6,0	5,0	5,0	4,0		20,00
2.	Bzdušek	Tomáš	sx. A	G Piešťany	6,0	5,0	4,5	4,0		19,65
3.	Hrdá	Marcela	3 IB	G BA J. Hronca	5,8	5,0	4,5	4,0		19,50
4.	Perešíni	Peter	3 F	G BB Tajovského	5,0	5,0	5,0	4,0		19,29
5.	Imriška	Jakub	3 A	G BA J. Hronca	5,0	4,5	5,0	4,0		18,92
6.	Dzetkulič	Michal	3 A	G PH Michalovce	6,0	4,0	4,0	4,0		18,54
	Mikuláš	Ján	se.	G BST Lučenec	5,0	4,5	2,5	4,0		16,96
8.	Foltin	Miroslav	3 C	G Jána Hollého	5,0	5,0	2,0	4,0		16,96
9.	Hergelová	Beáta	3 B	G BST Lučenec	3,8	4,5	2,5	4,0		15,95
10.	Petrík	Peter	4 IB	G BA J. Hronca	5,7	4,0	2,0	4,0		15,70

Sasák	Róbert	4 D	SPŠE Piešťany	4,6	5,0	2,0	4,0		15,60
12. Astaloš	Róbert	4 A	G Rimavská Sobota	4,0	5,0	2,5	4,0		15,50
13. Zámečník	Peter	3 D	G MRŠ NMV	4,0	5,0	1,0	4,0		15,26
14. Kravec	Martin	3 A	G PH Michalovce	5,0	5,0	–	4,0		15,26
Pôbišová	Zuzana	3 F	G BB Tajovského	3,2	5,0	1,5	4,0		14,99
16. Kaniansky	Miroslav	se. A	G Piaristické Nitra	4,2	5,0	–	4,0		14,55
17. Veselovská	Lenka	se.	G M.M.Hodžu	3,0	5,0	1,0	4,0		14,37
18. Sudolský	Michal	2 F	G BB Tajovského	4,0	5,0	–	4,0		14,37
Komorovský	Marek	se.	G Dubnica n. Váhom	4,2	5,0	2,0	4,0	-2	14,29
20. Svítková	Lucia	3 B	G VBN Prievidza	4,0	3,0	1,5	4,0		13,91
21. Lalinský	Ján	3		5,8	0,1	2,5	4,0		13,81
22. Šibík	Juraj	4 D	G Považská Bystrica	4,0	5,0	0,5	3,5		13,00
23. Kuchárik	Marcel	3 D	G MRŠ NMV	4,5	2,5	–	4,0		12,49
24. Obžerová	Gabriela	3 B	G VBN Prievidza	2,7	2,5	1,5	4,0		12,19
25. Rušin	Michal	ok.	G Spišská Stará Ves	2,0	5,0	2,5	1,5		11,00
26. Uchytilová	Vendula	3 A	G J.K.Tyla	2,5	3,5	1,5	2,0		11,00
27. Korch	Jakub	7 A	G Piaristické Nitra	4,0	0,1	1,5	3,5		10,59
28. Vojtko	Andrej	ok. A	G Skalica	4,5	4,0	–	1,5		10,00
29. Ladecky	Martin	4 B	G VOZA	4,0	–	1,5	4,0		9,50
30. Berta	Peter	2 A	G Veľké Kapušany	4,0	–	–	4,0		9,44
31. Bachratá	Alenka	3 B	G VOZA	4,0	–	–	4,0		9,44
32. Piják	Peter	4 B	G VOZA	5,5	–	–	3,5		9,00
33. Petruchová	Zuzka	se.	G BA Grösslingova	4,0	–	–	0,5		8,37
34. Švihranová	Ivana	3 C	OA Hrobákova 11	2,5	0,3	–	–		3,52

Mráz ma štípe v tvári,
zima telo kvári.
Vietor besne zavýja,
umrzne mi celý Ja.
V duši mi však rastie
nekonečné šťastie.
Prečo tento protiklad?
Mám päť bodov za príklad.
Je to zázrak, zjavenie?
Čo mám chybné videnie?
Hm, vidím, že zjavne nie,
veď mám správne riešenie!

Toľko úryvok z eposu FKSelanky.

Ahojte mládež,
vonku povieva príjemný severák, zubaté slniečko sa len rozpačito usmieva a snehu stále pribúda. Veru tak, konečne k nám zavítala jar. A keď sa jar nachýli k letu, pomaly tu máme sústredko. To bude tentokrát (POZOR ZMENA!) **2.6. – 9.6.2005 v Oravskej Lesnej**.

No a ešte máme pre vás informáciu ohľadom jednej medzinárodnej fyzikálnej súťaže pre mladých ľudí, ktorí chcú vyskúšať svoje schopnosti a zručnosti. Kliknite na stránku http://www.wyp2005.at/glob2-talent.htm (alebo http://sfs.savba.sk/) a nájdete odkaz na súťaž *Physics talent search* v rámci Svetového roku fyziky.

P.S.: Cítite sa umelecky nedocenení? Chýba vám priestor na realizáciu? Uznávame, že sme uvedeným krátkym dielkom nasadili latku riadne vysoko, ale ak máte nutkanie, napíšte nám.