FYZIKÁLNY KOREŠPONDENČNÝ SEMINÁR

vzorové riešenia 3. série
B – kategória (mladší)
20. ročník
zimný semester
školský rok 2004/2005

www. **.sk**

FKS, KTFDF FMFI UK
Mlynská dolina
842 48 Bratislava
riesenia@fks.sk
info@fks.sk

B – 3.1 Kengura okolo sveta (za 80 skokov) (opravovala Baška Trubenová a Peťo Glaus)

Kengura Kátam je veľký športovec. Zo Zeme sa dokáže odraziť maximálnou rýchlosťou 15 ms^{-1}.
a) Koľko skokov bude potrebovať na obskákanie okolo Zeme po rovníku, ak skáče tak, aby doletela čo najďalej?
Koľko skokov potrebuje na obskákanie Mesiaca, ak:
b) Kátam sa odráža stále rýchlosťou 15 ms^{-1}, ako na Zemi.
c) Kátam sa odráža tak, že sa prikrčí koľko len zvládne a potom začne pôsobiť na podložku konštantnou silou F, až kým sa neodrazí.

Čaute čaute! No toto bol skutočne celkom jednoduchý príklad, a tak ste ho väčšinou zvládli. Aj tak sa ale spolu pozrime, ako to malo byť.

a) Vieme, že kengurka sa vie odraziť na Zemi rýchlosťou najviac 15 ms^{-1}. Je to ale kengura - fyzik, a preto z toho dokáže vyťažiť maximum. Vie, že pre vertikálnu zložku jej rýchlosti platí $v_v = v\sin\varphi$, kde φ je uhol jej odrazu od Zeme, a pre horizontálnu zložku $v_h = v\cos\varphi$. Jej skok si môžeme predstaviť ako šikmý vrh. Čas, aký bude skok trvať, je $t = 2v_v/g$, čiže stihne doskočiť do vzdialenosti

$$d = v_h t = 2v^2\sin\varphi\cos\varphi/g.$$

Ak trochu poznáte goniometrické vzorce, viete, že to je to isté ako $d = v^2\sin2\varphi/g$. Tiež by ste mali vedieť, že sínus môže nadobúdať hodnoty od -1 po 1, pre maximálne d musíme teda dosadiť uhol $\varphi = 45^\circ$ ($\sin(2.45^\circ) = 1$). Dĺžka jedného skoku našej kengurky je

$$d = v^2/g = 22{,}7 \text{ m}$$

(to je ale Superkengura, že?). A ak poznáme obvod Zeme $o = 2\pi r = 2.3.14.6378.10^3$ m, zistíme, že na svoju cestu potrebovala 1 757 028 skokov. Samozrejme, ak ste dosadili trochu iné g alebo polomer Zeme, no váš výsledok sa dostatočne podobal tomuto, bol prirodzene tiež správny.

b) V tomto prípade Kátam skáče po Mesiaci a jediné dve veci, čo sa menia, je gravitačné zrýchlenie a polomer mesiaca. Beda prebeda, ak ste na niečo z toho zabudli! Takže dĺžka skoku pre $g_m = 1{,}6$ ms^{-2} (približne) je 140 m a počet skokov pre $r = 1738000$ m je 77961. Tiež platí, že nám stačil približný výsledok. Ak ste si nezistili polomer Mesiaca alebo gravitačné zrýchlenie, smola, je to v každej lepšej encyklopédii, stačilo zájsť do knižnice.

c) Tak s týmto ste mali trochu problémy. Na zemi kengura skáče *maximálne* 15 ms^{-1}. Neexistuje nič ako obmedzená rýchlosť pre kengury v uzavretej obci, ona to proste rýchlejšie nezvláda. Na takom Mesiaci je ale slabšia gravitácia, nepodarilo by sa jej teda odraziť trochu rýchlejšie? Chceli sme teda vedieť, koľko skokov by kengurka potrebovala, keby sa aj na mesiaci odrazila ako len vie, teda tou istou odrazovou silou F, ako potrebuje na Zemi na získanie $v = 15$ ms^{-1}. Keď kengura pôsobí na podložku silou F, časť tejto sily sa spotrebuje na prekonanie gravitácie a zvyšok na samotné zrýchlenie. Ak predpokladáme dĺžku kengurích nôh 1 m, zistíme, že zrýchlenie, ktorým sa odráža na Zemi, má veľkosť $a_z = 112{,}5$ ms^{-2}. Pre odrazovú silu F teda platí $F = ma_z + mg$. Na Mesiaci máme iba šestinové g, platí tam teda:

$$F = ma_m + mg_m$$
(a_m je kengurino odrazové zrýchlenie na Mesiaci). Z toho
$$a_m = a_z + g - g_m = 120{,}7\ \mathrm{ms}^{-2}.$$
Na dráhe 1 m tým kengura získa rýchlosť približne 15,5 ms^{-1}. Touto rýchlosťou doskočí 150 m a počet potrebných skokov je len 72619.

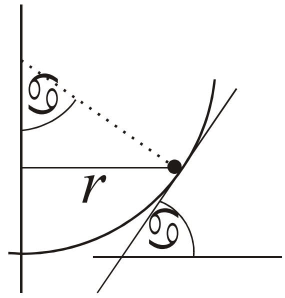
Za prvé dve úlohy ste mohli získať až štyri body, a ak ste prejavili aspoň náznak riešenia v úlohe c), tiež to nebolo úplne zbytočné. Takže poučenie do budúcnosti - snažte sa ako môžete, a ak niečo neviete, skúste si to niekde vyhľadať!

B – 3.2 Točiaca sa guľa (opravoval Juro)

Dutá guľa polomeru R sa otáča okolo zvislej osi uhlovou rýchlosťou w. Nachádza sa v nej malé teliesko, ktoré koná pohyb spolu s guľou (t.j. vzhľadom na guľu sa nepohybuje). Aký musí byť koeficient trenia f medzi guľou a telieskom, ak sa teliesko nachádza vo výške R/2.

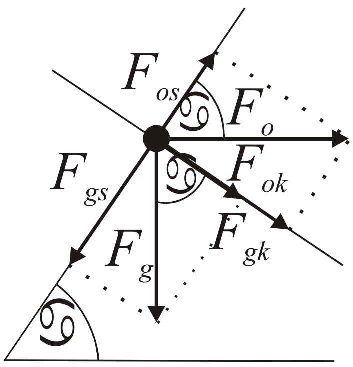
Ahojte. Poďme strmhlav do riešenia na prvý pohľad dosť ľahkej úlohy. Keď sa však človek prizrel lepšie, zistil, že je ešte ľahšia ako sa zdalo. Ale nepredbiehajme.

Všetko dôležité bolo zakódované vo vete o nepohybovaní sa telieska vzhľadom na guľu. Na teliesko pôsobia tri sily: tiažová, odstredivá a trecia. Zaoberajme sa najskôr tiažovou a odstredivou silou, s trecou je to o čosi zložitejšie (zoberieme ju do úvahy neskôr). V našom hútaní a dumaní môžeme kľudne predpokladať, že teliesko sa nenachádza vo vnútri gule, ale na naklonenej rovine, ktorá sa tejto gule akurát dotýka v bode, kde sa teliesko nachádza. Ak by sa teliesko po guli pohybovalo, uhol tejto naklonenej roviny by sa v čase zložito menil. Ale to nie je náš problém. Z obrázku je zrejmé, že tento uhol je taký istý, ako medzi zvislicou a polomerom gule v mieste telieska.



Rozložíme si tiažovú a odstredivú silu na zložky kolmé a rovnobežné s našou naklonenou rovinou. Podľa obrázka môžeme písať
$$F_{gk} = F_g\cos\alpha = mg\cos\alpha\,,\ F_{ok} = F_o\sin\alpha = m\omega^2 r\sin\alpha = m\omega^2 R\sin\alpha\,\sin\alpha,$$
$$F_{gs} = -F_g\sin\alpha = mg\sin\alpha\,,\ F_{os} = F_o\cos\alpha = m\omega^2 r\cos\alpha = m\omega^2 R\sin\alpha\,\cos\alpha.$$

Kladný smer osi v smere naklonenej roviny sme zvolili nahor, preto je znamienko mínus pri F_{gs}, ktorá smeruje nadol. Vidíme, že zložky síl v smere naklonenej roviny sa vo všeobecnosti navzájom nevykompenzujú. Označme si teda výslednicu síl v smere naklonenej roviny F_s a v smere kolmo na rovinu F_k. Keďže F_s nie je nulová, teliesko má tendenciu rozbehnúť sa v jej smere.



Našťastie tu máme treciu silu, ktorá ho umravní. Avšak trecia sila je to veľmi leniválsila. Keď sa už teleso pohybuje, má hodnotu, o ktorej ste sa učili v škole, teda $F_t = fF_N$. Ak je však teleso v pokoji, nebude sa tak namáhať.

Čo sa vlastne od takej trecej sily očakáva? Že bude pôsobiť proti pohybu telesa. Keď teleso stojí, trecia sila si môže oddýchnuť, lebo nie je proti čomu spôsobiť. Ak na stojace teliesko začne pôsobiť nejaká sila, trecej sile sa to nepáči a snaží sa votrelkyňu svojim pôsobením odstrániť. Samozrejme trecia sila nie je všemocná a má hranice svojich schopností. Ak by od nej chcelo okolie priveľa, ak by narušiteľka bolo priveľká a trecia sila by nevládala, teliesko by sa začalo pohybovať. Trecia sila je síce lenivá, ale tvrdohlavá. Ak by aj vládala, stále by sa snažila zastaviť teliesko a robila by preto všetko čo dokáže, teda by mala už spomínanú veľkosť. Viac už nevládze.

Vráťme sa k nášmu príkladu. Podľa zadania je teliesko v pokoji (vzhľadom na guľu), teda na treciu silu nie sú kladené priveľké nároky a výsledná sila, pri ktorej musí pôsobiť, je menšia, ako maximálna hodnota trecej sily, inak povedané

$$\left|F_{os} + F_{gs}\right| \leq fF_N .$$

V našom prípade je sila, ktorou je teleso tlačené do podložky $F_{ok} + F_{gk}$, takže hor sa do počítania

$$\left|\omega^2 R \sin\alpha \cos\alpha - g \sin\alpha\right| \leq f\left(\omega^2 R \sin\alpha \sin\alpha + g \cos\alpha\right),$$

$$f \geq \frac{\left|\omega^2 R \sin\alpha \cos\alpha - g \sin\alpha\right|}{\omega^2 R \sin\alpha \sin\alpha + g \cos\alpha}.$$

Keďže výška, v ktorej sa nachádza teleso, je $R/2$, $\cos\alpha = 1/2$, $\sin\alpha = \sqrt{3}/2$, čím dostávame

$$f \geq \frac{\left|\omega^2 R\sqrt{3}/4 - g\sqrt{3}/2\right|}{3\omega^2 R/4 + g/2} \Rightarrow f \geq \sqrt{3}\,\frac{\left|\sqrt{3}\omega^2 R - 2g\right|}{3\omega^2 R + 2g}.$$

Koeficient trenia musí byť teda menší alebo rovný tejto hodnote. Vidíme, že pre vhodnú kombináciu parametrov by tu trecia sila ani nemusela byť. Zložky tiažovej a odstredivej sily v smere naklonenej roviny by sa navzájom vyrušili a teliesko by sa nepohybovalo tak či tak.

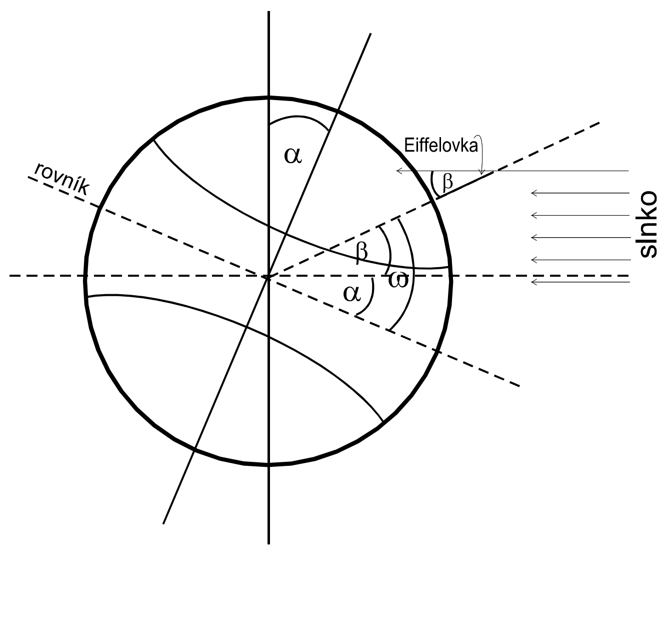
Treba ešte pripomenúť, že existuje niečo ako pokojový koeficient trenia a pohybový koeficient trenia. Ak je teleso v pokoji, maximálna sila, ktorou dokáže pôsobiť proti prípadným narušiteľom, je o čosi väčšia ako sila, ktorou sa zúfalo snaží zastaviť už rozpohybované teleso. Takže výsledok, ktorý nám vyšiel, je obmedzenie veľkosti pokojového koeficientu trenia, ktorý je väčší ako pohybový koeficient trenia.

Pár slov k vašim riešeniam. Málokto si uvedomil, že vo vzťahu má byť absolútna hodnota a že vzťah, ktorý má byť výsledkom, je v skutočnosti nerovnosť. Ale v celku ste riešenia mali celkom dobre. Však to aj mala byť záchranná úloha.

Takže posledná séria je úspešne za nami. Gratulujem víťazom, prajem krásne a veselé Vianoce, príjemné, hoci a čosi skrátené prázdniny a šťastný nový rok. A teším sa na vás na sústredení. Dovtedy sa majte krásne.

B – 3.3 Eiffelovka (opravoval Miro)

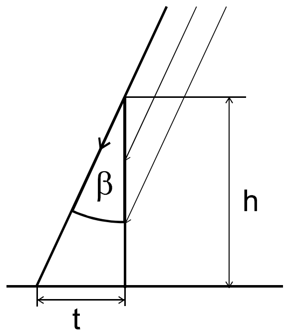
Aký najkratší tieň môže vrhať Eiffelova veža?



Ako veľa z vás zistilo, Paríž (čiže aj Eiffelova veža) sa nachádza na takom mieste, kde slnko nie je nikdy na zvislici, ktorá prechádza osou veže. Inak povedané, slnečné lúče v Paríži nikdy nedopadajú kolmo na zemský povrch. Prečo? Zo zemepisu by sme mali vedieť, že zemská os nie je kolmá na rovinu, v ktorej sa Zem pohybuje okolo Slnka (rovina ekliptiky). Uhol, ktorý zviera zemská os a ekliptika je konštantný, označíme ho α. V dôsledku tohto sklonu sa miesto, kde slnečné lúče dopadajú kolmo na Zem, stále mení. Toto miesto sa nachádza iba na časti povrchu Zeme. Medzi obratníkom Raka a obratníkom Kozorožca.

Preto Eifellovka bude vždy vrhať nejaký tieň. Našou úlohou je nájsť ten najmenší. Potrebujeme nájsť miesto, ktoré je od Eifellovky najmenej vzdialené a súčasne niekedy v roku tam slnečné lúče dopadajú kolmo. Z obrázku vidíme, že je to bod, ktorý leží na obratníku Raka a poludníku, ktorý prechádza cez Eiffelovku. Slnko svieti kolmo na tento bod jeden deň v roku a to na letný slnovrat (21. – 22. júna) na pravá poludnie. Potom môžeme náš problém opísať obrázkom.

A teraz fakty: Eifellovka sa nachádza na severnej pologuli na 48°52' s.g.š., to bude uhol ω. Sklon zemskej osi je $\alpha = 23°27'$. Výška Eifellovky je $h = 320{,}75$ m (bez antény 300 m). Keďže výška Eifellovky je zanedbateľná oproti polomeru Zeme, môžeme predpokladať, že v okruhu zopár kilometrov okolo nej je Zem rovina. Potom môžeme posledný obrázok zjednodušiť:



Vidíme, že $\mathrm{tg}\beta = t/h$, kde t je hľadaná dĺžka tieňa. Po úprave dostaneme:

$$t = h\,\mathrm{tg}(\omega - \alpha).$$

Dosadíme spomínané hodnoty a dostaneme najkratšiu dĺžku tieňa Eifellovej veže : 152,44 m.

Tento príklad bol celkom ľahký, ako vidieť aj z bodového hodnotenia. Stačilo si uvedomiť, že najkratší tieň bude v letnom slnovrate, nájsť v atlase potrebné hodnoty a zistiť výšku Eifellovky. Preto som strhával pol bodu aj za nedosadenie hodnôt alebo numerické chyby. Dva body mal isté ten, kto napísal, že najkratší tieň bude v letnom slnovrate. Ahojte.

B – 3.4 Vlajka (opravovala Rebro)

Vlajka vo vetre nevyzerá ako rovný kus látky, ktorý sa naorientuje podľa smeruje jeho fúkania. Vznikajú na nej totiž vlny, „vlajka vlaje“. Prečo je to tak? Ako tieto vlny vznikajú?

Nuž, vlajka vlaje z viacerých dôvodov, ktoré spolu navzájom súvisia.... A to, že vlaje, znamená, že sa naorientuje v smere vetra, ale nie je pekná rovná, neustále sa vlní. Prsty v tom má Bernoulliho rovnica

$$p + \rho v^2/2 = \text{konštanta},$$

kde p je tlak v kvapaline (plyne), v jej rýchlosť tečenia a ρ jej hustota. Táto rovnica nám hovorí o tom, že ak sa zmení tlak v kvapaline, musí sa zmeniť jej rýchlosť alebo hustota.

Druhým faktom je, že taká vlajka vo vetre je nestabilný systém. Čo to znamená? Predstavte si misku v tvare polgule a malú guličku. Misku položíme na stôl tak, aby sme do nej mohli vložiť guličku. Gulička leží na dne misky. Keď teraz do guličky „šprgnete“, vychýli sa zo svojej polohy, ale po čase sa upokojí a zostane ležať na dne misky. Teraz misku položíme na stôl hore dnom. Pri troške trpezlivosti nájdeme bod, „vrchol“ misky. Naň umiestnime guličku, drží. Stačí však úplne maličký „ťuk“ a gulička už padá dole miskou a do svojej pôvodnej polohy sa už určite nevráti. V prvom prípade bola gulička v rovnovážnej polohe stálej (stabilnej), v druhom prípade v rovnovážnej polohe nestálej (labilnej).

Pozrime sa teraz na vlajku. Len tak si vlaje a zrazu urobíme „ťuk“. Čo na to naša vlajka? Ťuk spôsobil na vlajke malú vyhlúbeninu na jednu stranu. Okolo tejto strany prúdi vzduch rýchlejšie (musí obchádzať vyhlúbeninu), zatiaľ čo vo vnútri vyhlúbeniny ešte viacej spomalí. Tlak vo vyhlúbenine bude teda väčší ako na druhej strane a vyhlúbenina sa bude zväčšovať. Vietor bude zároveň narážať do prednej časti vyhlúbeniny, čím ju bude posúvať dozadu. Zväčšujúce a pohybujúce sa vyhlúbeniny – to je presne to, čo bežný ľud volá „viať vo vetre“.

Čo nám však spôsobí ten malý ťuk? Prakticky čokoľvek. Jednak vietor nie je homogénny, nemôžeme povedať, že je to masa vzduchu, ktorá má všade rovnaký tlak, hustotu a rýchlosť. Ďalej pri obtekaní rôznych vecí inými, môžu vznikať rôzne turbulentné víry, odtrhávanie sa vrstvičiek vzduchu. To všetko spôsobí, že tlak tu je iný, ako tlak tam, vznikne vyhlúbeniny...

Tak to by bolo asi všetko, teším sa na vás v letnej sérii. Dúfam, že v hojnejšom počte a užite si prázdniny.

FYZIKÁLNY KOREŠPONDENČNÝ SEMINÁR

výsledková listina B – kategórie po 3. sérii zimného semestra 20. ročníka

	Priezvisko	Meno	Trieda	Škola	②	B-3.1	B-3.2	B-3.3	B-3.4	☠	Σ
1.	Bzdušek	Tomáš	sx. A	G Piešťany	37,5	4,0	5,0	5,0	3,5		57,50
2.	Boža	Vladimír	1 C	G Poprad Tatarku	34,5	5,0	5,0	5,0	2,0		51,27
3.	Bogár	Ondrej	2 E	G ĽŠ Trenčín	32,5	4,5	5,0	4,5	5,0		50,80
	Fecko	Stanislav	sx. A	G Pankúchova	33,5	4,0	4,5	5,0	–	-1	48,00
5.	Berta	Peter	2 A	G Veľké Kapušany	31,8	3,0	5,0	5,0	3,0	-2	47,80
6.	Galica	Tomáš	sx.	G Spišská Stará Ves	34,5	3,5	2,5	4,5	5,0		42,50
7.	Salaj	Michal	2 A	G Snina	29,0	4,5	3,0	0,5	4,0		40,80
8.	Rybák	Matúš	kv.	OG Kukučínova	32,5	3,8	1,0	5,0	3,0		39,50
9.	Malik	Tomáš	kv.	1SG BA Bajkalská	29,5	2,5	1,5	1,5	4,0	-5	36,50
	Kacmarik	Jozef	1 A	G Spišská Stará Ves	30,5	3,5	2,0	4,0	2,5	-4	35,51
11.	Nagy	Jakub	1 C	G sv. Tomáša Akvinského	27,5	4,5	0,5	4,5	2,0		31,45
12.	Keruľ	Lukáš	kv. A	OG BA Tilgnerova	25,5	4,0	1,0	5,0	3,0		30,96
13.	Rolníková	Zlatka	kv.	G Skalica	23,5	–	–	–	–		29,70
14.	Hreha	Ján	2	G Liptovský Hrádok	28,5	4,0	2,0	2,0	2,5		29,50
15.	Čelko	Pavol	sx.	G Považská Bystrica	23,5	3,0	2,5	4,5	-		27,50
16.	Roháľ	Branislav	1	G Považská Bystrica	25,0	3,5	3,0	4,5	2,5	-2	27,08
17.	Sudolský	Michal	2 F	G BB Tajovského	24,0	4,5	5,0	5,0	4,5		27,00
18.	Berta	Michal	1 B	G Trebišov	22,0	2,0	-	1,0	2,5		21,30
19.	Švihorík	Róbert	sx.	G Nitra Párovská	21,0	-	0,5	2,5	5,0		21,30
20.	Blahušiak	Pavol	2 B	G VPT Martin	22,0	1,0	0,5	2,0	4,0	-1	16,50
21.	Toman	Dominik	2 C	G Topoľčany	21,9	–	–	–	–		11,00
22.	Hlaváč	Boris	kv. A	G JL Martin	17,0	–	–	–	–		10,20
23.	Koreňová	Nikola	1 E	G PH Michalovce	14,3	1,0	0,5	0,5	1,5		8,67
24.	Bida	Ján	sx.	G Snina	19,2	–	–	–	–		0,50

Milá naša mlaď!

Tak ako každý rok, aj tento rok o takomto čase je už rozhodnuté! Niektorým ostanú len oči pre plač, ale najlepší z vás opäť dosiahnu vytúžený a tvrdo vybojovaný cieľ – sústredenie FKS v Kežmarských Žľaboch. Vedúci si už na vás brúsia zuby.

Dúfame, že ste celý rok poslúchali a pod vianočným stromčekom nájdete okrem cibule a uhlia aj nejaký ten darček. Aj FKS pre vás jeden pripravilo: prvé kolo príkladov letnej série už teraz, takže pre počítaniachtivých odporúčame www.fks.sk.

Tešíme sa na vás v letnej sérii a veríme, že si aj napriek neustálemu prívalu pracovných povinností nájdete čas aj na FKS. Tak teda Veselé Vianoce a šťastný Nový rok, užite si prázdniny a oddýchnite si.

Vaše

FKS