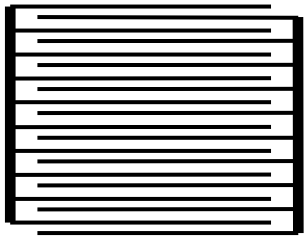
FYZIKÁLNY KOREŠPONDENČNÝ SEMINÁR

2. kolo letnej časti 24. ročníka
A – kategória (staršia)
školský rok 2008/2009
termín odoslania riešení
15. 4. 2009

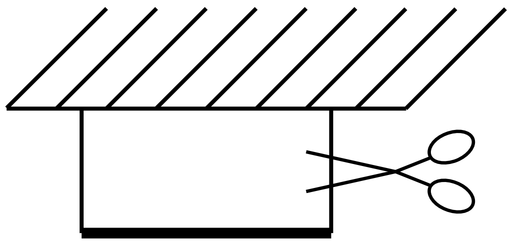
www.fks.sk

FKS, KTFDF FMFI UK
Mlynská dolina
842 48 Bratislava
otazky@fks.sk

A–2.1 Kniha (5 bodov)
Filip minule zobral dve najnovšie vydania Odviate vetrom a stranu po strane ich „zasekol“ do seba, tak ako na obrázku. Jedno Odviate vetrom váži pol kila ($m = 0{,}5$ kg), má $N = 600$ strán, koeficient trenia medzi dvoma listami papiera je $f = 0{,}5$, rozmery knihy sú 20 cm x 30 cm ($a = 20$ cm, $b = 30$ cm). Predpokladajte, že väzba kníh je veľmi flexibilná a vôbec „nemá problém“ s tým, že musí poňať dvojnásobné množstvo strán. Akou silou musíme knihy ťahať od seba, aby sme ich rozdelili, ak v popísanej konštelácii voľne ležia položené na stole?



A–2.2 Záves (5 bodov)
Palička si visí. Zrazu prestrihneme jeden zo špagátov na ktorých visí. Akou silou bude v okamihu tesne po prestrihnutí napínaný druhý špagát? Hmotnosť paličky je m a mohli by sme vám o nej prezradiť ešte kopec ďalších zaujímavých a zbytočných parametrov, ale už mi došla fantázia :)



A–2.3 Maličkosť (5 bodov)
Kubo má na stole položenú svoju maličkosť. Trochu do nej drcol (fyzikálne: udelil jej nejakú rýchlosť), vďaka čomu sa začala pohybovať rovnobežne s hranou stola. Po dvoch sekundách od drcnutia maličkosť dosiahla okraj stola vzdialený jeden meter. Má Kubova maličkosť kolieska?

A–2.4 Malý princ… (5 + 1 bod)
si len tak sedí na svojej planétke o hmotnosti M. Zrazu okolo nej prefrčí asteroid o hmotnosti m rýchlosťou v. Koľko energie z celkovej kinetickej energie asteroidu dokáže malý princ zužitkovať? Aby ste si lepšie vedeli predstaviť, ako vyzerá také získavanie energie, uvedieme jeden ilustračný príklad: Vezmete dynamo (také malé oné s kolieskom, majú to niektoré bicykle. Otáčaš kolesom – vyrábaš prúd), namotáte naň dostatočné množstvo nekonečne tenkého, nekonečne pevného a nehmotného špagátu, ktorého druhý koniec harpúnujete do asteroidu a potom už len čakáte, koľko elektriny vám odvíjajúce sa lanko na dyname vyprodukuje, kým asteroid nezastane. Aby sa vám ľahšie rátalo môžete predpokladať, že vzdialenosť planétky od priamky po ktorej letel asteroid je veľmi malá. Bonusový bod dostanete, ak úlohu zrátate pre všeobecnú vzdialenosť d.

Tento seminár podporujú
KTFDF FMFI UK,
JSMF,
iuventa

FYZIKÁLNY KOREŠPONDENČNÝ SEMINÁR

3. kolo letnej časti 24. ročníka
A – kategória (staršia)
školský rok 2008/2009
termín odoslania riešení
11. 5. 2009

www.fks.sk

FKS, KTFDF FMFI UK
Mlynská dolina
842 48 Bratislava
otazky@fks.sk

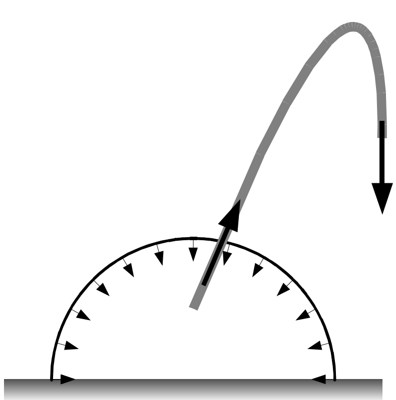
A–3.1 Utopená loptička (5 bodov)
Pingpongovú loptičkú s polomerom r a hmotnosťou m držíme ponorenú 10 cm pod voľným povrchom vody. Zrazu ju pustíme. Do akej výšky vyskočí? Brzdné sily pôsobiace na loptičku môžete zanedbať.

A–3.2 Numerika (5 bodov)
Mek Kajver utiekol pred špatňáčkmi na neznámu planétu, ktorá sa nápadne podobá na našu Zem – a rád by sa z nej dostal preč. Má k dispozícii raketu. Spolu so všetkým vybavením, nádržami na palivo, a tak ďalej, váži 10 ton, pričom ďalších 10 ton paliva sa dá natankovať do jej nádrží. Spaliny vznikajúce spálením paliva opúšťajú trysku rakety rýchlosťou 23 km/s a ich hmotnosť je 10 kg za sekundu. Mek odštartuje z povrchu planéty t.j. zo vzdialenosti 6 378 km od jej stredu, hmotnosť planéty je $5{,}97 \cdot 10^{24}$ kg, gravitačná konštanta $6{,}67 \cdot 10^{-11}$. Zistite:

a) Akým zrýchlením sa bude raketa pohybovať hneď po zapnutí motorov?
b) Podarí sa Mekovi opustiť gravitačné pôsobenie planéty (t.j. získať potrebnú rýchlosť na únik do nekonečna?) Ak áno, akou rýchlosťou by sa (do nekonečna) dostal? Ak nie, do akej maximálnej vzdialenosti od stredu planéty vyletí?
c) Koľko hmotnosti môže ešte pribrať / sa musí zbaviť, aby mu palivo stačilo akurát na opustenie gravitačného pôsobenia planéty (aby do nekonečna priletel nulovou rýchlosťou?)

Ako už zadanie úlohy napovedá, v tomto prípade nebazírujeme na všeobecných riešeniach – uspokojí nás hocaká približná metóda, ktorou dostanete čo najpresnejší výsledok. V prípade použitia počítača, nám pošlite rozumný popis toho, čo ste vlastne robili (program, resp. excelovský sheet alebo aspoň jeho popis, resp. hocičo iné použijete), aby sa z toho opravovateľ vysomáril.

A–3.3 Vyfúkačka (5 bodov)
Vezmite si slamku, pravítko, saponát, vodu, fotoaparát, bravčové karé a stopky. Vytvorte na hladkom povrchu polbublinu a nechajte ju cez slamku vyfúknuť. Pokúste sa zistiť, od akej mocniny n začiatočného polomeru r bubliny závisí čas t jej vyfúknutia!



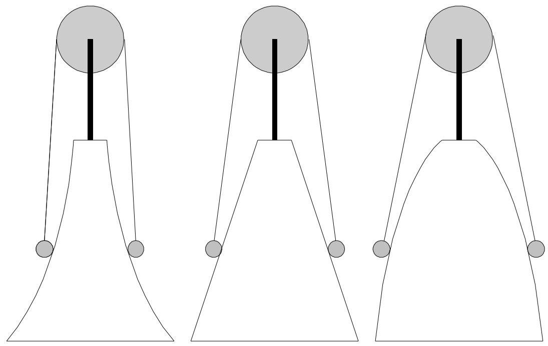
Poznámka: Predpokladajte závislosť $t = C \cdot r^n$ *a meranie nezabudnite viackrát zopakovať. Pri analýze dát sa vám môže hodiť lineárna závislosť* $\log t = \log C + n \log r$. *Ak ste s logaritmami ešte nepracovali, neváhajte sa obzrieť na internete (http://sk.wikipedia.org/wiki/Logaritmus) alebo v knižkách.*

A–3.4 Nakladačka (5 bodov + 2 bonusové)

Po tom, čo Bzdušo presviedčal pouličných gangstrov, že diferenciálne rovnice sú mocnejšia zbraň než revolver, dostal od nich takúto nakladačku: Má zistiť, či sú rovnovážne polohy na jednotlivých kladkách stabilné, indiferentné alebo labilné (pozri obrázok). Pomôžete mu? Hmotnosti zavesených telies sú rovnaké. Predpokladajte, že v prípade zakrivených povrchov je ich polomer krivosti výrazne menší než dĺžka použitého lana.

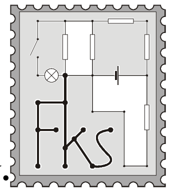
Poznámka1: Bonusové body od nás dostanete, ak úlohu vyriešite pre všeobecný prípad.

Poznámka2: Odpoveď „Nie“ ako riešenie príkladu neakceptujeme :)



FYZIKÁLNY KOREŠPONDENČNÝ SEMINÁR

vzorové riešenia 1. série
A – kategória (starší)
24. ročník
letný semester
školský rok 2008/2009

www..sk

FKS, KTFDF FMFI UK
Mlynská dolina
842 48 Bratislava
otazky@fks.sk

A–1.1 Čakám, čakáš, čakáme (opravovali Halucinka a Tomáš)

Samo každodenne dochádza do školy poriadny kus cesty a pri tom sa na autobus čo? Čaká. Poslených 800 metrov cesty k zastávke už však Samuel vidí, čo sa na zastávke deje. V rámci riadenia sa heslom „čakáš–nežiješ“ zvolil pre posledných 800 metrov nasledovnú stratégiu: pokiaľ ešte nevidel na zastávku prísť autobus, beží rýchlosťou 12 km/h. *Pokiaľ autobus videl, spomalí a chôdzou (6* km/h*) dôjde zvyšok dráhy. Koľko Samo v priemere čaká na zastávke, ak autobusy chodia v 10 minútových intervaloch a Samo chodí z domu úplne náhodne?.*

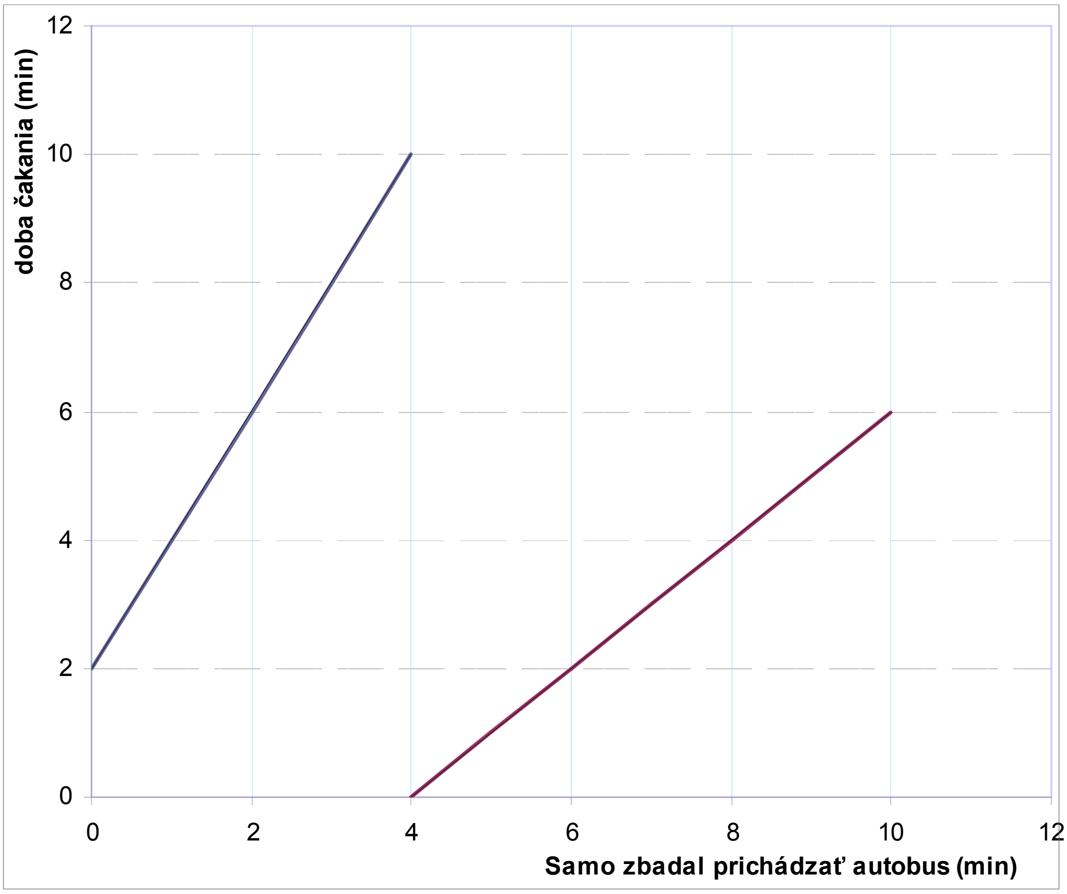
V okamihu keď Samo prvý krát uvidí zastávku, začneme merať čas. Niekedy od teraz po 10 minút bude zo zastávky odchádzať autobus, pričom tento čas je úplne náhodný. My potrebujeme vedieť, koľko bude čakať v priemernom prípade − musíme teda ako keby „spriemerovať všetky možnosti“ ktoré môžu nastať. Ako sa takýto priemer robí si hneď ukážeme. Definujme si funkciu $f(t)$ ako dĺžku čakania, ktorá Samuela čaká za predpokladu, že v čase t uvidel zo zastávky odchádzať autobus. Priemerná výška grafu funkcie f bude potom odpovedať priemernej dobe čakania Sama na autobus. A ako bude $f(t)$ presne vyzerať? V prvom rade, ako ľahký výpočet ukáže, Samo sa na zastávku dostane za 4 minúty behom alebo za 8 minút chôdzou. Z tohto hneď vidíme, že $f(0) = 2$ min − Samo okamžite prechádza do chôdze, 8 minút kráča na zastávku, tam čaká 2 minúty. Ďalej zaujímavá hodnota je $f(4)$. Po 4 minúte behu Samo akurát dobehol na zastávku, z ktorej *akurát* odchádza autobus. Podľa toho či ho stihne, bude čakať 0 alebo 10 minút. V tomto bode bude mať teda funkcia ako keby 2 funkčné hodnoty[1]. Ďalej pre časy väčšie ako 4 minúty Samo už čaká na zastávke a keď autobus príde tak doň nasadne. Preto pre tieto časy platí triviálne $f(t) = t - 4$ min. Ostáva už len vyšetriť správanie f na prvých štyroch minútach. Od času, kedy Samo uvidel autobus lineárne závisí dráha, ktorú ešte musí prejsť na zastávku a teda aj čas, ktorý mu tento prechod potrvá, a teda aj čas, ktorý bude ešte čakať. Spojíme funkčné hodnoty v čase 0 a 4 min rovnou čiarou (linearita) a máme tu,

TAMTADADÁÁÁÁÁÁÁÁ

graf funkcie f. Prehliadnite si ho, aký je sličný.

---

[1] Rigorózni matematici odpustia.



Celková plocha pod grafom funkcie *f* na skúmanom intervale je 42 minút štvorcových[2], čo vydelené jeho šírkou 10 minút dáva priemernú výšku (= dobu čakania) 4,2 minúty.

A–1.2 Peťove momentky (opravoval Filip)

Predpokladajte, že moment zotrvačnosti homogénneho rovnostranného trojuholníka s hmotnosťou m a stranou a okolo osi prechádzajúcej ťažiskom a kolmej na trojuholník je $I = ka^2m$, kde k je nejaká konštanta.
a) Prečo môžeme predpokladať, že I je v tomto tvare? (že také k existuje?)
b) Aké sú momenty zotrvačnosti vyšrafovaných štvrtín trojuholníku okolo pôvodnej osi?
c) Zrátajte k.

Poďme pekne zaradom. Výsledky, ktoré získame tak budeme môcť použiť v nasledujúcich častiach. Ono je to totiž zadané tak, aby to pekne vyšlo.[3]

a) Ako dobre poznáme, moment zotrvačnosti hmotného bodu vzhľadom na nejakú os (v našom prípade prechádza cez ťažisko kolmo na rovinu trojuholníka) je mr^2. Celkom intuitívne je aj to, že výsledný moment zotrvačnosti nejakého telesa vieme zrátať ako súčet momentov zotrvačnosti hmotných bodov, ktoré tvoria teleso[4]. Pre celkový moment I tak dostávame tak rovnicu $I = \sum m_i r_i^2$ kde m_i je hmotnosť i-teho kúsku r_i je jeho vzdialenosť od osi.

Túto rovnicu už len stačí trošku upraviť. Vzdialenosť r_i si vyjadrime ako nejaký p_i násobok dĺžky strany a. V tom prípade je p_i obyčajné číslo (nemá jednotku). To isté

---

[2] Čo kukáte, jak keby ste ešte nevideli serióznu jednotku plochy :)

3 Áno, vedúci si zaslúžia čokoládu.

4 Ak tam hmotné body nevidíme, tak si naše teleso môžeme nasekať na drobné kúsky, ktoré už môžeme aproximovať hmotnými bodmi.

spravme aj s hmotnosťou, takže $m_i = q_i.m$. Dosadíme to do nášho vzorca pre I a dostávame:

$$I = \sum\left(q_i m(p_i a)^2\right) = ma\sum\left(q_i p_i^{\,2}\right).$$

Ako vidíme, sčitujeme bezrozmerné čísla q a p a dá sa teda očakávať, že hodnota sumy nebude závisieť od rozmerov ani hmotnosti objektu, ale čisto od jeho geometrie. Nič nám nebráni, aby sme tú sumu nazvali „k“ a sme hotoví: $I = kma^2$.

b) A poďme ďalej. Najskôr sa venujme tomu trojuholníčku v strede. Keďže má polovičné rozmery a štvrtinovú hmotnosť ako veľký, jeho moment zotrvačnosti bude 1/16 momentu zotrvačnosti pôvodného trojuholníka, teda $I_\mathrm{m} = \dfrac{I}{16}$. Aké jednoduché.

Ale čo s tým krajným? Naň použijeme tzv. Steinerovu vetu. Je to užitočná vecička, preto radi vypotíme trochu krvi pri jej dokázaní. Pokiaľ nepatríte k najmotivovanejším čitateľom, skočte na najbližší nahrubo zvýraznený text. Vo vašom riešení dokazovať Steinerovu vetu samozrejme nebolo treba. Opäť začnime so vzorcom $I_i = m_i\left|\vec{R}_i\right|^2$, kde vektor $\vec{R}_i$ bude vektor od ťažiska veľkého trojuholníka do i-teho bodu v malom krajnom trojuholníku. Rozložme ho na dva vektory, r_i je vektor z ťažiska malého trojuholníka do bodu i a r_t je vektor z ťažiska veľkého trojuholníka do ťažiska malého. A teraz sčítajme momenty zotrvačnosti všetkých bodov. Dostaneme tak rovnicu:

$$I_\mathrm{kraj} = \sum m_i \vec{R}_i^2$$

$$I_\mathrm{kraj} = \sum m_i\left(\vec{r}_i + \vec{r}_t\right)^2$$

$$I_\mathrm{kraj} = \sum m_i \vec{r}_i^{\,2} + 2\sum m_i \vec{r}_i \vec{r}_t + \sum m_i \vec{r}_t^{\,2}$$

Pri takejto rovnici sa väčšina normálnych ľudí začína vo výpočtoch strácať. Preto sa radšej zamyslime. Prvý člen na pravo je presne to isté, ako moment zotrvačnosti I_m malého trojuholníka okolo osi prechádzajúcej jeho ťažiskom. Tretí člen napravo sa dá zjednodušiť. Vektor r_t je rovnaký pre všetky body a preto ho môžeme vyňať a sumujeme iba hmotnosť. Čiže dostaneme $\dfrac{m}{4} r_t^2$. A to už dobre poznáme, je to moment zotrvačnosti hmotného bodu s hmotnosťou malého trojuholníčka (čiže štvrtina celého) okolo osi prechádzajúcej ťažiskom veľkého trojuholníka.

Zostal nám už len druhý člen $2\sum m_i \vec{r}_i \vec{r}_t$. Poďme ho upraviť, r_t je konštantné a tak ho vyberme pred sumu a máme: $2\vec{r}_t \sum m_i \vec{r}_i$. Aha! Ťažisko je presne to miesto, kde je táto suma nulová, veď tak je ťažisko definované. To znamená, že celý druhý člen je nulový a máme veľmi známy vzťah:

$$I_\mathrm{kraj} = \sum m_i \vec{r}_i^{\,2} + \vec{r}_t^{\,2} \sum m_i$$

$$I_\mathrm{kraj} = I_m + \frac{m}{4} r_t^2$$

Tento vzťah sa nazýva **Steinerova veta** a je to úplne super vec. Pomocou nej vieme vyrátať moment zotrvačnosti vzhľadom na ľubovoľnú os ako súčet momentu zotrvačnosti vzhľadom na *rovnobežnú* os prechádzajúcu ťažiskom a moment zotrvačnosti hmotného bodu hmotnosti celého telesa[5] v mieste ťažiska.

c) No v našich výsledkoch sa stále objavuje neznáme I. Teraz použijeme fintu:) Vieme, že celkový moment zotrvačnosti I je rovný súčtu momentov zotrvačností jednotlivých častí trojuholníka, čiže napríklad naznačených 4 malých trojuholníkov – jeden v strede a tri krajné:

5 V našom prípade celý krajný trojuholník, ktorý má štvrtinovú hmotnosť ako celý, tak aby vás nemiatlo to delenie štyrmi.

$$I = I_m + 3I_{kraj}$$

$$I = I_m + 3\left(I_m + \frac{m}{4}r_t^2\right)$$

Ďalej vieme (z časti a), že $I_m = \frac{I}{16}$ a keď sa pozrieme na obrázok, tak zistíme aj to, že r_t je jedna tretina výšky veľkého trojuholníka, čiže $r_t = \frac{\sqrt{3}}{6}a$. Dosadíme a upravujeme:

$$I = 4I_m + 3\left(\frac{m}{4}\cdot\frac{3}{36}a^2\right)$$

$$I = \frac{I}{4} + \frac{1}{16}ma^2$$

$$I = \frac{1}{12}ma^2$$

Hotovo. Kto má chuť, môže si skúsiť zrátať moment zotrvačnosti štvorca. Ide to rovnako a zíde sa to na skúške na matfyze:)

A–1.3 Experimentálka? (opravovala Tinka, vzorák Jakub)

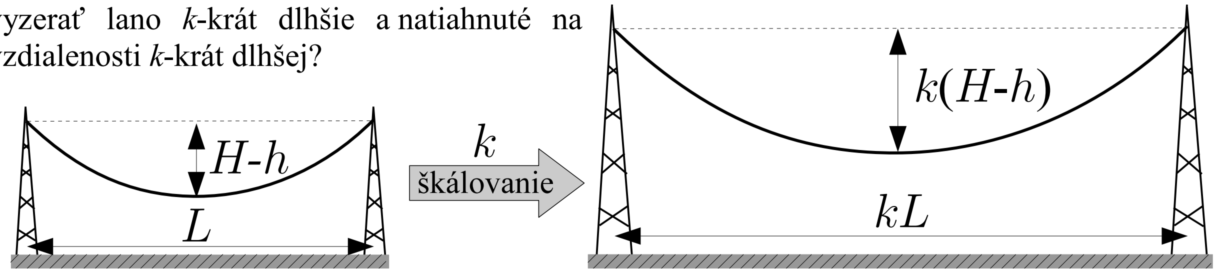
Elektrické vedenie vysokého napätia pozostáva zo stĺpov, na ktorých je vo výške $H = 55$ m *upevnených* 6 *medených vodičov (2krát trojfázovo). Z bezpečnostných dôvodov nemôže vodič vysokého napätia klesnúť pod výšku* $h = 40$ m *nad povrch zeme. Rozostup stĺpov je* $L = 300$ m. *Urč celkovú dĺžku vodičov potrebných pre dĺžku vedenia* 100 L *(teda* 30 km*)! Tiež zisti, koľkokrát menšie je najvyššie (mechanické) napätie vo vodiči voči jeho medzi pevnosti! Môžu sa ti hodiť údaje: hustota medi* $\rho = 8\,930$ kg m^{-3}*, medza pevnosti medi v ťahu* $\sigma_t = 450$ Mpa. *Pri tejto úlohe nás nezaujíma všeobecný výsledok, postačí, ak nám s dostatočnou presnosťou povieš, koľko ti to vyšlo konkrétne pre zadané hodnoty. K riešeniu samozrejme pripoj komentár, ako si to robil, prečo je to tak dobre a ak máš len približný výsledok, tak aj odhad chyby.*

Fúúu… Toto sa vôbec nepodobá na nejakú rozumnú stredoškolskú úlohu. Však toto môže byť celkom *praktická* vec! Vraj experimentálka…?

Úlohu budeme riešiť pre prípad, že vodiče sú v najnižšom mieste *práve* vo výške h, ako som napísal aj na debatu. Za nedôslednosť v zadaní sa ospravedlňujem.

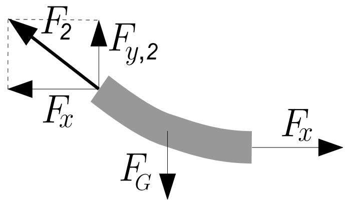
Je celkom rozumné skúsiť nahradiť neznámy tvar vodičov čímsi známym, čo sa na ne podobá. Tak to urobila väčšina z vás a použila pritom zväčša lomenú čiaru alebo kružnicový oblúk a získala dosť dobrý výsledok. Tento prístup sa mi nepáči, lebo asi nikto z vás nevie zistiť, akej veľkej chyby sa pritom dopustil. To určenie chyby je totiž obdobne ťažké ako nájsť presné riešenie. Zvolil som preto *experimentálny* prístup, ktorý je síce vo výsledku menej presný ako tá kružnica, avšak ktorého chybovosť mám lepšie pod kontrolou.

Ako prvé sa vysporiadame s tými rozmermi. Keď sa človek tak popozerá ako vyzerajú všelijaké visiace šnúrky a retiazky a vedenia a špagáty, tak zistí, že všetky visia tak nejako podobne. Skúsme naše pozorovanie trochu formalizovať: majme lano dĺžky l upevnené na oboch koncoch rovnako vysoko. Vodorovná vzdialenosť úchytov nech je L. Ako bude vyzerať lano k-krát dlhšie a natiahnuté na vzdialenosti k-krát dlhšej?

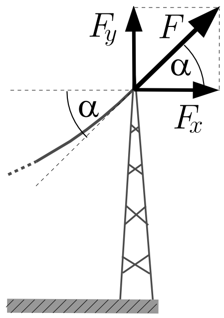


Lano bude vyzerať úplne rovnako, len to celé bude k-krát väčšie. Prečo? Nuž preto, lebo pôvodné lano zaujalo energeticky najvýhodnejšiu polohu. Zrejme k-krát dlhšie lano môže prekonávať vodorovnú vzdialenosť kL majúc rovnaký tvar ako pôvodné lano. A keďže pre pôvodné lano to bola najvýhodnejší tvar, tak to bude aj pre nové lano.[6]

Potom si ale môžem povedať, že namiesto skúmania elektrického vedenia môžem pekne doma v plnom komforte zavesiť špagát s rozostupom úchytov $L' = 3$ m a výškou previsu $(H-h)' = 15$ cm.[7] Môžem zmerať dĺžku špagátu l', ktorý som na to použil a napísať odpoveď l'/k.



Ďalej by som chcel zistiť to mechanické napätie. Najprv si musíme uvedomiť, že horizontálna zložka napätia v lane je pozdĺž celého lana rovnaká. Dôvod nájdeme na obrázku vpravo, kde sme si zakreslili sily pôsobiace na kus lana ľubovoľnej dĺžky, ktorého jeden koniec sa nachádza v najnižšom bode lana. Na tento kus pôsobí lano ťahovými silami sprava a zľava a ešte naň pôsobí tiaž. Lano je statické a teda sily musia byť v rovnováhe. Preto musia byť vodorovné zložky napätia v každom bode lana rovnaké ako v jeho najnižšej časti, čo znamená, že všade budú rovnaké.



Potom je už ľahké určiť maximálne napätie. Aha, zvislá zložka napätia je podľa obrázku hore rovná tiaži lana medzi daným miestom a najbližším najnižším bodom lana. Takže najväčšie napätie musí byť pri stožiaroch. Veľkosť maximálneho napätia F pritom je $F = F_y / \sin\alpha$. Uhol α viem odmerať, však moje lanko je geometricky podobné s drôtom. Nuž a sila F_y má podľa predošlých argumentov veľkosť tiaže polovice drôtu medzi 2 stožiarmi, čiže $F_y = Sl\rho g/2$. Medza pevnosti lana je $\sigma_t S$. V zadaní požadovaný pomer sa nazýva koeficient bezpečnosti, označím ho K, a rovná sa $K = \dfrac{\sigma_t S}{F} = \dfrac{2\sigma_t}{l\rho g}\sin\alpha$.

Moje meranie: Zobral som si pevný špagát a upevnil ho na vrch 2 zárubní vo vzdialenosti $L' = (756{,}5 \pm 0{,}3)$ cm. Previsnutie lana som potom úmerne tomu nastavil na hodnotu $(H-h)' = L'/L\,(H-h) \approx 37{,}8$ mm. Pri tomto previsnutí som si pravítkom spravil dotyčnicu v bode úchytu a vo veľkom pravouhlom trojuholníku zmeral odvesny. Získal som tak uhol v bode úchytu $\alpha = (11{,}1 \pm 0{,}2)°$. Potom som si urobil na špagáte značky v miestach uchytenia a položil ho na zem. Natiahol som ho približne rovnakou silou ako keď visel a zafixoval. Zmeral som jeho dĺžku $l' = (762{,}6 \pm 0{,}5)$ cm.

Moje výsledky: Dĺžka potrebných drôtov je $(181{,}45 \pm 0{,}2)$ km. Dĺžka drôtov zistená analytickým výpočtom pre dokonale ohybné nenaťahovateľné lano je 181,194 km. Rozdiel je spôsobený chybou metódy a „nedokonalosťou" použitého materiálu. Koeficient bezpečnosti mi vyšiel $K = (6{,}54 \pm 0{,}13)$.

Hodnotenie: Za riešenie dĺžky priblížením lomenej čiary sa dal dostať celý 1 bod, priblíženie kružnicou alebo parabolou mohlo získať 2 body. Za správne určené maximálne mechanické napätie v drôtoch sa dalo pri aproximácii lomenou čiarou získať 1,5 boda, kružničiari/parabolici mohli získať 2 body. Viac ako 4 body sa dali získať použitím postupu, kde sa dá chyba rozumne odhadnúť – najjednoduchšie experimentom.

Dodatok č.1: Pri riešení sme využili predpoklad, že prierez drôtov je konštantný.

Dodatok č.2: Schéma nášho riešenia pozostávala s rozdelenia úlohy na experimentálnu a teoretickú časť, pričom sme použili nejaký model lana (dokonale ohybné, nenaťahovateľné). Vôbec sme však neoverili, či náš model súhlasí s experimentom. Tento prístup je v experimentálnej praxi bežný, takže neostáva vám iné ako si zvykať ☹.

Dodatok č.3: Môžeme si všimnúť, že mechanické napätie v drôtoch je prakticky konštantné, lebo veľkosť maximálneho napätia F je skoro rovnaká ako veľkosť vodorovnej zložky F_x. Ak by sme teda chceli zarátať aj natiahnutie drôtov, tak môžeme s veľmi dobrou

[6] Keď malo pôvodné lano ťažisko v hĺbke d pod úchytmi, tak nové bude mať v hĺbke kd. Nemôže ho mať hlbšie, lebo keby existoval taký tvar, že ťažisko nového lana by bolo hlbšie, tak by existoval tvar pre k-krát menšie lano taký, že ťažisko lana by bolo hlbšie ako d. Čo je spor.

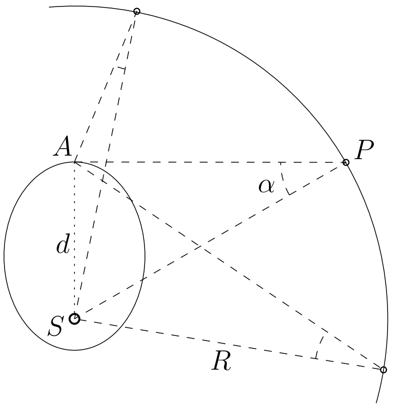
[7] Zvolil som si teda koeficient podobnosti $k = 1/100$.

presnosťou napísať rovnosť $d = l / \left(1 + \frac{\sigma_t}{KE}\right)$, kde d je dĺžka drôtov v nenatiahnutom stave a $E = 130$ MPa je Youngov modul pružnosti medi. Natiahnutie vplyvom mechanického napätia v drôtoch je približne 0,053 % a celková potrebná dĺžka reálnych vodičov je preto asi o 100 m menšia.

Dodatok č.4: Laná v ideálnom prípade nevisia ani ako lomené čiary, ani ako kružnicové oblúky, ani ako časti paraboly. Pre málo prehnuté laná sú tie priblíženia kružnicou a parabolou dosť úspešné, avšak v skutočnosti visia ideálne laná ako kosínus hyperbolický…

A–1.4 Peťov Kepler a Keplerov Peťo (opravovali Azag a Emi)

Okolo hviezdy obiehajú dve planéty (A a B) v tej istej rovine. Vzdialenejšia z nich (A) má os otáčania takmer kolmú na rovinu obehu a všetky ostatné parametre (hmotnosť, vzdialenosť od centrálnej hviezdy, hustotu, priemernú plošnú hustotu škôl v prírode…) rovnaké ako naša Zem. Mimozemšťanovi na jej rovníku sa podarilo vypozorovať, že planéta B zapadá vždy najneskôr dve hodiny po hviezde. Aká je obežná doba druhej planéty?

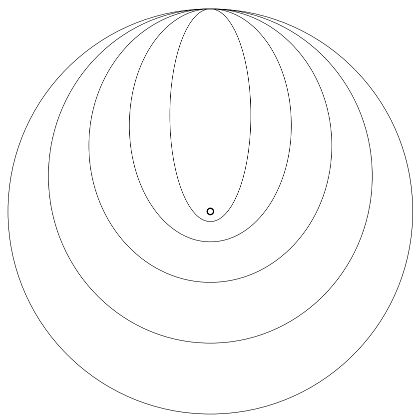


Nuže oč tady kráčí. Z toho, že planeta zapadá nejvýše dvě hodiny od západu slunce je jasné, že se na obloze vždy vyskytuje poblíž slunce, a tedy je vůči mimozemšťanově planetě vnitřní planetou s relativně menší trajektorií. Takovou situaci zachycuje první obrázek.[8]

Planeta P se otáčí kolem své osy a tím slunce i planeta A postupně zapadají. Z tohoto principu je jasné, že mezi oběma západy se musí planeta P pootočit o úhel α. Protože rychlost otáčení je konstantní, čas mezi oběma západy určuje jen velikost tohoto úhlu. Otázka tedy je, pro jakou pozici všech tří těles je tento úhel maximální.

Zřejmě tehdy, když bude planeta A v aféliu, protože tehdy bude úsečka SA nejdelší. Ještě zbývá určit polohu planety P. Pro maximální úhel α platí, že kružnice opsaná SAP se bude dráhy planety P dotýkat v jednom bodě.[9] Potom ale její střed musí ležet na úsečce SP a to v jejím středu. Bod A potom ale leží na Thaletově kružnici a SAP je tedy pravoúhlý. Zachycuje to jedna z nakreslených pozic planety P. Teď už snadno spočítáme vzdálenost d planety A od slunce v aféliu. Platí totiž

$$d = R\sin\alpha = R\sin\left(2\pi\frac{2\,\mathrm{h}}{24\,\mathrm{h}}\right) = R\sin\frac{\pi}{6} = \frac{R}{2}.$$



Máme tedy jeden parametr elipsy. Jenže pro její úplný popis bychom potřebovali dva. Žádný druhý ale získat nemůžeme, proto můžeme určit jen jakýsi interval, jak brzy uvidíme. Na druhém obrázku jsou nakresleny různé elipsy, které mají stejnou vzdálenost afélia d. Zřejmě hlavní poloosa těchto elips je tedy

$$a = \tfrac{1}{2}d \ldots d = \tfrac{1}{4}R \ldots \tfrac{1}{2}R.$$

Z Keplerova třetího zákona potom dostáváme

---

[8] Trajektorii mimozemšťanovy planety jsme aproximovali kružnicí, protože trajektorie Země má velmi malou excentricitu.

[9] Jinak by existovalo ještě jedno místo, ve kterém by kružnice opsaná protnula dráhu planety P a ve všech bodech mezi těmito dvěma by byl pozorovací úhel větší. (Rozmyslete.)

$$T = T_{\mathrm{Z}}\left(\frac{a}{R}\right)^{3/2} = \left(\tfrac{1}{4}\right)^{3/2}\dots\left(\tfrac{1}{2}\right)^{3/2}\ \text{roku} \approx 0{,}13\dots0{,}35\ \text{roku},$$

kde T_{Z} je oběžná doba mimozemšťanovy planety neboli Země.

Ještě proveďme malou diskuzi řešení. Například jsme mlčky předpokládali, že se všechny tři tělesa do kýžené pozice dostanou. To by ovšem ve skutečnosti mohlo trvat velmi dlouho a pozorovatel by se toho vůbec nemusel dožít. Pravděpodobně tedy naměří maximální čas, který bude o něco menší než teoretický čas podle toho, jaké bude mít štěstí. Tento fakt je ovšem v zadání vyjádřen tím, že je čas zadán jen s přesností na hodiny. Stejně tak zanedbání faktu, že se planeta mezi oběma západy o něco posune, se snadno vejde do požadované přesnosti.

FYZIKÁLNY KOREŠPONDENČNÝ SEMINÁR

výsledková listina A – kategórie po 1. sérii letného semestra 24. ročníka

	Meno	Škola	A–1.1	A–1.2	A–1.3	A–1.4	Bonus	☠	∑1
1	Polačko Martin	G KE Alejová	5,00	5,00	5,00	3,50	0,00	–	18,50
2	Hruška Eugen	G Hlohovec	5,00	5,00	4,00	3,50	0,88	–	18,38
3	Štyráková Kamila	G POH, Dolný Kubín	4,70	4,50	4,20	4,00	0,90	–	18,30
4	Krejčír Andrej	G PD Prievidza	5,00	4,50	3,00	4,75	0,95	–	18,20
5	Bačo Ladislav	G KE Poštová	5,00	5,00	4,70	2,00	1,10	–	17,80
6	Bogár Ján	G Ľ. Štúra Trenčín	5,00	4,80	3,50	3,00	1,21	–	17,51
7	Kieferová Mária	GSF Žilina	5,00	5,00	2,50	3,75	0,00	–	16,25
8	Matejovičová Lenka	G BA J.Hronca	5,00	4,80	2,20	3,50	0,00	–	15,50
9	Vanya Peter	G BA J.Hronca	4,00	4,20	3,50	3,50	0,00	–	15,20
10	Chudjak Martin	SPŠ Martin	4,50	3,00	2,00	3,50	1,82	–	14,82
	Hašík Juraj	G BA Grösslingova	5,00	2,50	1,50	4,00	1,82	–	14,82
12	Cocuľová Zuzana	G KE Poštová	5,00	4,70	2,00	0,50	1,90	–	14,10
13	Cuc Bruno	G BA Grösslingova	2,00	2,50	4,00	3,50	1,92	–	13,92
14	Honzáková Kateřina	GJK Praha	5,00	5,00	4,70	3,50	0,66	5	13,86
15	Kuklišová Nina	G BA Metodova	4,50	4,50	3,00	1,00	0,00	–	13,00
16	Vanta Radovan	G BA Metodova	5,00	1,00	1,50	3,25	1,99	–	12,74
17	Midlik Adam	G J.A.R. Prešov	5,00	1,50	–	3,50	2,00	–	12,00
	Rigdová Emília	OG Kukučínova Poprad	5,00	3,00	2,00	0,00	2,00	–	12,00
	Rohár Pavol	G KE M.R.Štefánika	5,00	3,00	2,00	–	2,00	–	12,00
20	Maixner Michal	OG ZA Varšavská	0,50	2,50	4,00	4,75	0,00	–	11,75
21	Pločeková Andrea	G Piešťany	4,70	–	4,50	–	1,99	–	11,19
22	Jursa Jakub	G KE Alejová	4,70	4,20	2,00	–	0,00	–	10,90
23	Petrucha Michal	G BA Metodova	5,00	4,50	–	–	0,00	–	9,50
24	Lešková Andrea	G Lipany	1,00	2,00	–	3,00	1,68	–	7,68
25	Hagara Michal	G BA J.Hronca	5,00	5,00	–	–	2,00	5	7,00
26	Bachratý Martin		5,00	–	–	–	1,50	–	6,50
27	Baxová Jana	G Ľ. Štúra Trenčín	2,00	1,00	0,80	–	1,23	–	5,03
28	Matulová Daniela	G BA Papánka	0,50	0,50	2,00	–	1,02	–	4,02
29	Hudák Adam	G KE M.R.Štefánika	1,50	–	–	0,00	0,55	–	2,05