FYZIKÁLNY KOREŠPONDENČNÝ SEMINÁR

2. kolo zimnej časti 24. ročníka
A – kategória (staršia)
školský rok 2008/2009
termín odoslania riešení
18. 11. 2008 (Pozor je to utorok!) **www.** **.sk**

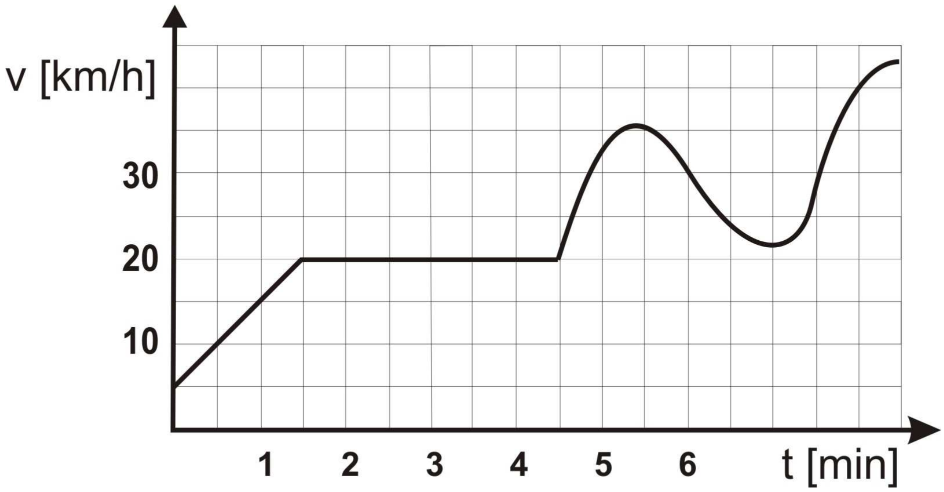
FKS, KTFDF FMFI UK
Mlynská dolina
842 48 Bratislava
otazky@fks.sk

A-2.1 Grafy (6 bodov)

Medzi múdrosti fyzikálne vzdelaných starých mám patrí fakt, že ak graf zobrazuje závislosť rýchlosti od času, tak plocha pod týmto grafom odpovedá prejdenej dráhe.

a) (1 bod) Vyslovte presnú formuláciu tejto múdrosti - ktorá plocha a ktorej dráhe odpovedá?
b) (2 body) Prečo je to tak?
c) (1 bod) Určte, akú dráhu medzi časmi 1min a 8min prešlo auto, ktorého rýchlosť je zaznamenaná v grafe.
d) (2 body) Funguje podobná finta, aj pokiaľ by sa jednalo o graf závislosti rýchlosti od polohy? Ako v tomto prípade určiť dráhu alebo čas prislúchajúci nejakému úseku na x-ovej osi?

Všetky tvrdenia sa samozrejme vzťahujú na jednorozmerný pohyb - napr. pohyb auta po ceste.



A-2.2 Šmuhy (6 bodov)

Keď sa gumené koleso šúcha po ceste (teda, neotáča sa, ale prešmykuje), vznikajú na ceste čierne šmuhy. Podobné čierne šmuhy vznikajú na pristávacích dráhach lietadiel. Zaujímavé je, že šmuha vznikne len na začiatku pristávacej dráhy a ďalej už nie.

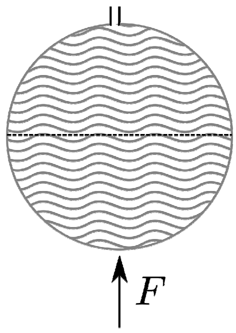
a) (2 body) Prečo je to tak?
b) (2 body) Aká dlhá je šmuha, ak hmotnosť lietadla je $M = 40$ton, rýchlosť lietadla pri pristávaní $v = 250$km/h, polomer kolesa $r = 0.5$m, hmotnosť kolesa $m = 50$kg, moment zotrvačnosti kolesa $I = 1/2mr^2$ a koeficient trenia medzi kolesom a vozovkou $f = 0.5$?.
c) (2 body) Aký bude výsledok b) úlohy ak sa budeme zaujímať aj o také prípady, kedy "lietadlo" má porovnateľnú hmotnosť ako "koleso"?

Predpokladajte, že hneď po dosadnutí tlačí lietadlo na vozovku práve svojou váhou a počas tvorenia šmuhy nespomaľuje brzdením o vzduch.

A-2.3 Spadla z oblakov (5 bodov)

Keď v lete vysadnem na bicykel a roztúrujem to na rozumnú rýchlosť, hneď cítim, ako sa vonku "ochladilo". Naopak, keď letí meteorit atmosférou, je mu tak teplo, až sa vznieti. Ako to teda je - pohyb v atmosfére ochladzuje alebo otepľuje? Popíšte hlavné efekty, ktoré na ochladzovanie / otepľovanie vplývajú.

A-2.4 Voda (5 bodov)



Máme dve duté nehmotné polgule. Dáme ich k sebe - tak, ako na obrázku. Do výsledného čuda dáme vodu, pričom hornú polguľu zafixujeme, aby sa nehýbala a navŕtame zhora do nej maličkú dierku, tak, aby hore bol atmosférický tlak. Otázka je, akou silou F treba teraz pritláčať spodnú polguľu tak, aby ostala pricapená na vrchnej? Peťo si myslí, že táto sila by mala byť rovná tiaži vody uzavretej vo vnútri, keďže úlohou tejto sily neni nič iné ako udržať vodu na mieste. Kde je v tejto úvahe chyba, a koľko to vlastne má byť?

Bonusová úloha: Koza

Koza stojí v poli. Koľko stoja tri kozy? Úlohu riešte pre všeobecné hodnoty r, n a α.

Tento seminár podporujú
KTFDF FMFI UK,
JSMF,
iuventa

FYZIKÁLNY KOREŠPONDENČNÝ SEMINÁR

3. kolo zimnej časti 23. ročníka
A – kategória (staršia)
školský rok 2008/2009
termín odoslania riešení
8. 12. 2008

www.fks.sk

FKS, KTFDF FMFI UK
Mlynská dolina
842 48 Bratislava
otazky@fks.sk

A-3.1 Obyčajný pohyb po kružnici (6x1 bod)

V klasickej súradnicovej sústave máme nakreslenú kružnicu s polomerom R. Na nej, v bode $[R,0]$ sa nachádza hmotný bod s hmotnosťou m, ktorý sa v čase $t = 0$ začne pohybovať otáčavým pohybom, s konštantnou uhlovou rýchlosťou ω, proti smeru hodinových ručičiek.

a) Akú veľkú časť kružnice (v uhlových jednotkách) má hmotný bod prejdenú v čase t? (v čase 0 mal prejdených 0 radiánov)

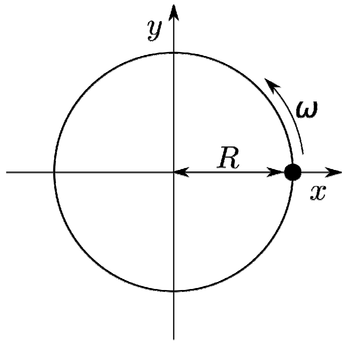
b) Aké sú súradnice x, y bodu v čase t?

c) Aká veľká sila F je potrebná na to, aby sa bod pohyboval popísaným spôsobom? Aký je jej smer?

d) Ak silu vyrátanú v bode c) rozložíme na x-ovú a y-ovú zložku, aká veľká bude x-ová zložka? Inými slovami ako vyzerá závislosť $F_x(t)$ t.j. x-ovej zložky sily od času?

e) Ako vyzerá F_x v závislosti od x, teda $F_x(x)$?

f) Ako pomocou a) - e) vyšetriť pohyb hmotného bodu viazaného na x-ovú os, na ktorý pôsobí sila $F(x) = -k.x$ kde k je nejaká kladná konštanta?



A-3.2 Pružina (5 bodov)

Homogénnu pružinu s pokojovou dĺžkou l, celkovou hmotnosťou m a tuhosťou k zavesíme za jeden koniec a necháme natiahnuť sa vplyvom gravitácie. Aká bude dlhá?

A-3.3 Dúfam, že všetci máte nainštalovaný Excel[1]... (6 bodov)

...pretože ak nie, ste masochisti, pre riešenie nasledujúcej úlohy ho budete potrebovať. Z vraku športového auta vytiahli čiernu skrinku, ktorá obsahuje údaje o tom, čo sa stalo pred haváriou. Konkrétne, obsahuje údaje o zrýchlení auta v každej sekunde. Za koncom zadania nasleduje 300 čísel[2] ktoré sú zrýchlenia auta v ms^{-2} za posledných 5 minút jazdy, každé číslo odpovedá priemernému zrýchleniu v jednej sekunde, prvé číslo - prvá sekunda, atď... Z čiernej skrinky sme sa tiež dozvedeli, že pred 5 minútami bol vypnutý motor a auto teda s najväčšou pravdepodobnosťou stálo.

Zistite:

a) (2body) Akú dlhú dráhu auto za posledných 5 minút prešlo?
b) (1bod) Akú maximálnu rýchlosť pri svojom pohybe dosiahlo?
c) (2body) Akú rýchlosť malo auto v polovici prejdenej dráhy?
d) (1 bod) Snažil sa vodič tesne pred nárazom zabrzdiť?

Snažte sa o čo najpresnejší výsledok.

---

[1] Alebo OpenOffice, alebo hociaký iný aspoň trochu rozumný tabuľkový editor

[2] Na stránke nájdete čísla v Excelovskej tabuľke, alebo si ich môžete tiež "copypastnúť" z elektronickej verzie zadaní.

0 0 0 0 0 0.06 0.16 0.25 0.34 0.41 0.48 0.54 0.6 0.65 0.69 0.73 0.77 0.8
0.82 0.84 0.86 0.88 0.89 0.9 0.91 0.92 0.92 0.92 0.92 0.92 0.92 0.92 0.92
0.91 0.91 0.91 0.9 0.9 0.89 0.89 0.89 0.89 0.88 0.88 0.88 0.88 0.88 0.89
0.89 0.89 0.9 0.9 0.91 0.91 0.92 0.93 0.94 0.95 0.96 0.97 -0.02 -0.01 0
0.01 0.02 0.03 0.04 0.05 0.06 0.07 0.07 0.08 0.09 0.09 0.09 0.1 0.1 0.1
0.1 0.1 0.1 0.09 0.09 0.09 0.08 0.07 0.06 0.04 0.02 0 -0.02 -0.04 -0.06
-0.08 -0.1 -0.12 -0.14 -0.16 -0.18 -0.19 -0.21 -0.23 -0.25 -0.26 -0.28
-0.29 -0.31 -0.32 -0.33 -0.34 -0.35 -0.36 -0.37 -0.37 -0.38 -0.38 -1.39
-1.39 -1.39 -1.39 -1.39 -1.4 -1.4 -1.4 -1.4 -1.4 -1.4 -1.4 -1.4 -1.4 -1.4
-1.4 -1.4 -1.41 -1.41 -1.41 -1.42 -1.43 -1.43 -1.44 -1.45 -1.46 1.1 1.1
1.09 1.09 1.08 1.08 1.07 1.07 1.06 1.05 1.04 1.03 1.02 1.01 1 0.99 0.98
0.97 0.96 0.95 0.94 0.94 0.93 0.92 0.92 -0.09 -0.09 -0.1 -0.1 -0.1 -0.1
-0.1 -0.1 -0.09 -0.09 -0.09 -0.08 -0.08 -0.07 -0.06 -0.05 -0.04 -0.03
-0.02 -0.01 0 0.01 0.01 0.02 0.03 0.04 0.05 0.06 0.07 0.08 0.09 0.09 0.1
0.1 0.11 0.11 0.12 0.12 0.12 0.12 0.13 0.13 0.12 0.12 0.12 0.12 0.12 0.11
0.11 0.11 0.1 0.1 0.09 0.09 0.09 0.08 0.08 0.08 0.07 0.07 0.07 0.07 0.07
0.08 0.08 0.08 0.09 0.09 0.1 0.11 0.12 0.13 0.15 0.16 0.17 0.19 0.21 0.22
0.24 0.26 0.28 0.3 0.33 0.35 0.37 0.39 0.41 0.44 0.46 0.48 0.55 0.56 0.57
0.58 0.58 0.59 0.59 0.6 0.6 0.6 0.6 0.6 0.6 0.6 0.59 0.59 0.58 0.58 0.57
0.56 0.55 0.55 0.54 0.53 0.52 0.51 0.5 0.49 0.48 0.47 0.46 0.45 0.44 0.43
0.43 0.42 0.41 0.41 0.41 0.4 -4.1 -8.1 -9.1 -8.5

A-3.4 Skutočný príbeh (5 bodov)

V miestosti FKS máme sklenú nádobu s objemom *V*, ku ktorej je pripojená výveva. Stala sa však nepríjemná vec, v miestnosti sa nám premnožili mole a po tom, ako skonzumovali vifon, Fajove staré topánky a Spišskú borovičku, vyhrýzli do sklenenej nádoby malý otvor o ploche *S*. Na aký minimálny tlak je možné teraz nádobu vývevou vyčerpať? Predpokladajte, že výveva nezávisle na tlaku v nádobe z nej odčerpáva vzduch konštantným objemovým výtokom *Q* (litrov za sekundu). Vo FKS máme normálny atmosférický tlak a teplotu 20 °C.

Tento seminár podporujú
KTFDF FMFI UK,
JSMF,
iuventa

FYZIKÁLNY KOREŠPONDENČNÝ SEMINÁR

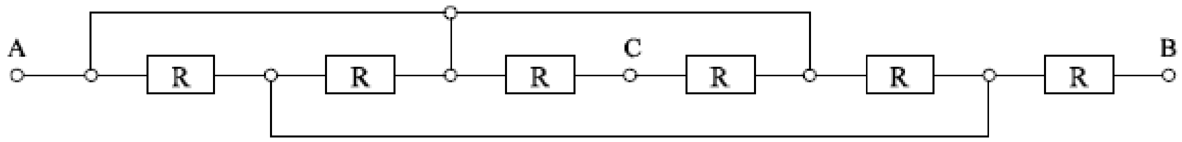
vzorové riešenia 1. série
A – kategória (starší)
24. ročník
zimný semester
školský rok 2008/2009

www.fks.sk

FKS, KTFDF FMFI UK
Mlynská dolina
842 48 Bratislava
otazky@fks.sk

A-1.1 Odpory (opravovali Samo a Katka, vzorák Samo)

Zrátajte odpor medzi bodmi A a B na obrázku. Ako by sa odpor zmenil, keby sme vodivo spojili ešte aj uzly C a B?

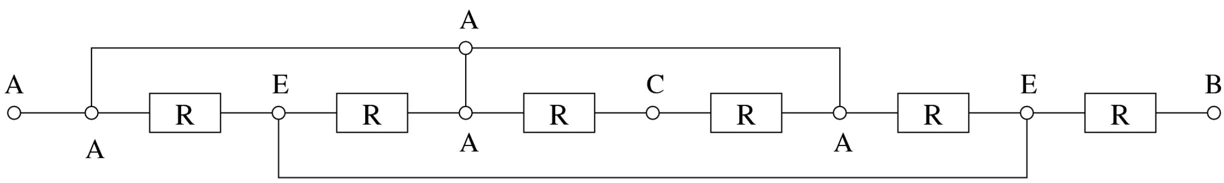


K správnemu riešeniu tejto úlohy viedli dve cesty. Jednou z nich bolo napísať si Kirchhoffove zákony, tĺcť do výslednej škaredej sústavy rovníc a tešiť sa z troch stránok popísaného papiera. Kirchhoffove zákony sú metóda, ktorá zaručene zaberie na ľubovoľný elektrický obvod, no v tomto príklade sa im dalo vyhnúť a nájsť kratšie a elegantnejšie riešenie. Poďme si to riešenie ukázať!

Hlavná myšlienka celého riešenia je založená na uvedomení si faktu, že rôzne časti elektrického obvodu s rovnakým potenciálom možno zlúčiť do jedného bodu bez toho, aby sa čokoľvek zmenilo. To by nám s trochou šťastia malo pomôcť obvod zjednodušiť natoľko, že ho budeme vedieť bez problémov spočítať.

Ktoré body v obvode však majú rovnaký potenciál? Napríklad body spojené vodičom bez odporu. Uvedomme si, že keby dva body, medzi ktorými by bolo nenulové napätie, boli spojené bezodporovým vodičom, musel by medzi nimi tiecť nekonečne veľký prúd, ktorý by spôsoboval hromadenie nekonečného množstva náboja... proste, slovami poeta, celé zle.

Ak vezmeme obrázok zo zadania a označíme si rovnakým písmenkom body spojené vodičom, dostaneme podobnú schému ako na obrázku 1.

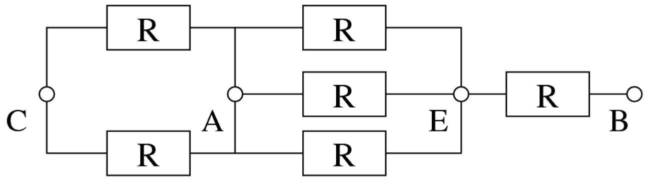


Obr. 1: Schéma odporov zo zadania

Pozorne sa zadívame na obrázok a pre každý odpor si zapíšeme, ktoré dva vrcholy spája. Poďme zľava doprava:

- A spojené s E odporom R
- E spojené s A odporom R
- A spojené s C odporom R
- C spojené s A odporom R
- A spojené s E odporom R
- E spojené s B odporom R

Premenili sme takto náš obrázok na slovný popis, ktorý nám jednoznačne[3] určuje obvod. Teraz podľa tohto popisu zakreslíme novú schému obvodu, avšak tentokrát nedovolíme existenciu dvoch rôznych bodov s rovnakým označením. Dostaneme nasledovný obrázok:



Obr. 2: Prekreslená schéma po zlúčení bodov rovnakého potenciálu

Táto schéma spĺňa slovný popis, ktorý sme vytvorili a preto je ekvivalentná so schémou zo zadania. S touto schémou sa však pracuje oveľa jednoduchšie ako s pôvodnou.

Ľahko si všimneme, že pri riešení prvej podúlohy môžeme uzol C ako aj oba odpory ktoré ho napájajú na A z obvodu beztrestne vystrihnúť a potom už znalí počítania odporov paralelného a sériového zapojenia rýchlo vytušíme, že odpor medzi bodmi A a E má veľkosť $\frac{1}{3}R$ a celkový odpor medzi bodmi A a B je $\frac{4}{3}R$.

No a ako by sa odpor zmenil, keby sme vodivo spojili aj body C a B? Odpory medzi bodmi A a B ešte pred spojením bodov B a C môžeme nahradiť jedným odporom $\frac{4}{3}R$. Potom podľa našej schémy by k súčasnému odporu $\frac{4}{3}R$ pribudla ešte jedna paralelná vetva s odporom $\frac{1}{2}R$ (odpor medzi bodmi A a C). Výsledný odpor by teda bol $\frac{4}{11}R$.

Úspešne sme zrátali obe časti úlohy a môžeme sa pustiť do opravovania riešení, ktoré ste nám poslali. Nenechali ste sa zahanbiť a väčšina z vás za tento príklad získala plný počet. V riešeniach niektorých z vás, ktorý plný počet nezískali, sa často vyskytovala úvaha, že prúd si vyberá cestu najmenšieho odporu. To ale vôbec nie je pravda. Prúd si nevyberá cestu, prúd tečie všetkými cestami. Niektorí z vás sa toto tvrdenie snažili obhájiť analógiou s vodou, podotknime teda ešte, že ani pri vode toto tvrdenie neplatí. Keď máme plný bazén vody a začneme ho vypúšťať dvoma rúrkami, tenkou a hrubou, voda bude vytekať oboma.

S trpezlivým čitateľom, ktorý prečítal a pochopil celý tento vzorák (zdravíme Miša Hojčku) sa lúčime a želáme mu veľa šťastia pri ďalšom riešení nášho seminára.

A-1.2 Spľačkatená fľaša (opravoval Jakub)

Keď sme naposledy boli v horách, zavreli sme na najvyššom vrchole prázdnu 1,5-litrovú fľašu. Keďže nás potom čakal úctyhodný zostup, očakávali sme, že kvôli rozdielnosti tlakov sa fľaša spľačkatí. Odhadnite, aký objem bude mať spľačkatená fľaša! Náš skupinový brainstorming po chvíli dodal nasledovné údaje (ktoré pokladajte za zadané): Nadmorská výška kopca na ktorom sme fľašu zavreli **3700 m =** $\boldsymbol{h_1}$, *výška po zostupe* **500 m =** $\boldsymbol{h_2}$, *typický atmosférický tlak* **100 kPa =** $\boldsymbol{p(0)}$, *teplota vzduchu* **20°C = 293 K =** $\boldsymbol{T}$ *(považujte za rovnakú počas celého zostupu), molová hmotnosť dusíka (hlavného plynu v atmosfére) je* **28 g mol**$^{-1}$ **=** $\boldsymbol{M}$, *univerzálna plynová konštanta* $\boldsymbol{R}$ **= 8,3 J K**$^{-1}$ **mol**$^{-1}$, $\boldsymbol{V_1}$ **= 1,5 l**, $\boldsymbol{g}$ **= 10 m s**$^{-2}$. *Predpokladajte, že fľaša je ľahko deformovateľná.*

Vrhnime sa do riešenia pospiatky: Čo potrebujem vedieť? Pomôžem si stavovou rovnicou ideálneho plynu[4] $pV = nRT$, odkiaľ hneď vidím, že ak mám (podľa zadania) konštantnú teplotu, tak súčin pV je pre plyn vo fľaši (nefučí, preto sa n nemení) tiež konštantný. Teraz už

---

3 Jednoznačne z hľadiska Kirchhoffových zákonov, prúdov a potenciálov a vôbec všetkého na čom záleží. Nie jednoznačne z hľadiska umeleckého dojmu ktorým schéma pôsobí.

4 Odborne povieme, že úlohu riešime v aproximácii ideálneho plynu.

viem, že potrebujem vedieť tlak vo fľaši p_1 na vrchole a tlak p_2 dole po zostupe. Vďaka informácii o dobrej deformovateľnosti[5] môžem usudzovať, že tlak mimo fľaše je v každej situácii zhodný s tlakom vnútri. Zapísané formálne potom platí

$$V_2 = \frac{p(h_1)}{p(h_2)} V_1. \tag{I}$$

Teraz by som mal určiť tlak v závislosti od výšky. Mohli by nám pomôcť nejaké tabuľky, avšak tam uvažujú aj zmenu teploty s narastajúcou výškou[6]. Ešte existuje také, že Wikipedia a Google, avšak výsledok sme mali odhadnúť, čo malo naznačiť, že aj keď nám to nepôjde celkom presne, tak cesta k cieľu má viesť vlastnou duševnou prácou.

Takže, mal by som si spomenúť, že vzduch je tekutina a v tekutinách v tiažovom poli existuje hydrostatický tlak o veľkosti $h\rho g$. Aká je však hustota vzduchu? Opäť pomôže stavová rovnica

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{n}{V} M \overset{stav.\,rovn.}{=} \frac{p}{RT} M . \tag{II}$$

Vyšlo nám, že hustota je funkciou tlaku p, čo značíme $\rho(p)$. Pre tlak platí rovnica o hydrostatickom tlaku

$$p(H + \Delta h) = p(H) - \Delta h\ \rho(h)\ g. \tag{III}$$

Platí však iba pre malé Δh, lebo iba tak bude v intervale $(H, H + \Delta h)$ hustota $\rho(h)$ približne konštantná. Asi väčšina uzná, že takúto rovnicu presne riešiť nevie. Nevadí, snáď by to šlo nejako približne. Napríklad môžeme za hustotu zobrať hustotu vo výške H. O čosi presnejší výsledok dostaneme, ak do rovnice (III) dosadíme za hustotu *nejakú* strednú hustotu[7], napr. aritmetický priemer

$$\rho(h) \mapsto \frac{\rho(H) + \rho(H + \Delta h)}{2} \overset{(II)}{=} \frac{p(H) + p(H + \Delta h)}{2RT} M. \tag{IV}$$

Dosadením získaného vzťahu (IV) do rovnice (III) a úpravou dostanem krásny vzťah

$$p(H + \Delta h) = \frac{H_0 - \Delta h}{H_0 + \Delta h} p(H), \qquad \text{kde } H_0 = \frac{2RT}{gM} \approx 17400\ \text{m}. \tag{V}$$

Vieme, že vo výške 0 je tlak $p(0)$. Rovnica (V) platí, podobne ako (III), tým presnejšie, čím menšie je Δh.[8] Teda napríklad môžeme vypočítať $p(h_1)$ priamo položením $H = 0$, $\Delta h = h_1$. Presnejšie však určíme hodnotu $p(h_1)$ tak, že budeme počítať v 4 krokoch s $\Delta h = h_1/4 = 925$ m a postupne vypočítame $p(h_1/4)$, z nej $p(2h_1/4)$, z nej $p(3h_1/4)$ a nakoniec $p(4h_1/4)$.

Riešenie: $V_2 \approx 1{,}0$ l.[9]

Poznámka 1: presné riešenie sústavy rovníc (II) + (III) s podmienkou pre tlak $p(0)$ je tzv. barometrická rovnica $p = p(0)e^{-2h/H_0}$, kde $e \approx 2{,}7$ je Eulerovo číslo.

Poznámka 2: Kopec sa volal Wildspitze /3770m/, druhý najvyšší vrch Rakúska.

Poznámka 3: Sami sa presvedčte, že náš výsledok je aj len pre jeden krok značne presný!

Poznámka 4: Pre výpočet vo viacerých krokoch výborne poslúži mašina (PC)! Krok $\Delta h = 100$ m ho nepripraví o nervy... Mňa by hej.

Hodnotenie: Rozumný odhad mohol dostať spolu s presným riešením plný počet bodov. Ak barometrická rovnica spadla z neba, tak riešiteľ poskytol čiastku 0,2 boda nebu v rámci zachovania rovnováhy. Rozumné použitie tabuľkových hodnôt som hodnotil ako nešportový výkon –1,5 bodom. Bod som strhával za predpoklad $p(0) = p(h_2)$.

---

[5] Dobrú predstavu ľahko deformovateľnej fľaše poskytuje polonafúknutý sáčok.

[6] Ono, rozdiel nie je veľmi veľký. Ale to by predsa bolo príliš jednoduché a nenaučili by ste sa tak veľa, že?

[7] Píšem *nejakú*, lebo aritmetický priemer je rovnako dobrý tip ako napr. geometrický! Nie je to presné riešenie.

[8] Napr. pre $\Delta h \geq H_0$ nám rovnica (V) dáva $p(H + \Delta h) \leq 0$, čo je zjavne zle!

[9] Výsledok je správne zaokrúhlený vtedy, ak má približne toľko platných cifier, ako zadané údaje.

A-1.3 Cirkusant (opravovali Judita a Filip, vzorák Filip)
S akou palicou ľahšie vydržíme balansovať na ruke? S kratšou alebo dlhšou? Prečo?

Čo tak si to najskôr vyskúšať? Vezmeme si napríklad fixku a hokejku.

Experimentálne som nameral: fixka maximálne asi 3 sekundy (Judita len 2s:)), hokejka 5 minút (potom mi zazvonil telefón). Hm, výsledok? No nie. Ale aspoň máme tušenie, čo chceme porátať.

Zamyslime sa. Prečo palička padá? Veď ju predsa dole podopierame. Výslednica *síl* je nulová. Problém je, že paličku nepodopierame presne pod jej ťažiskom (lebo sme lamy a trasú sa nám ruky). Pôsobia nám tam teda dve sily – tiažová sila a sila od našej ruky – a tie vzhľadom na „pevný bod“, teda náš prst, vyvolajú moment sily:

$$M = \frac{G \cdot R}{2} \sin \alpha$$

Ten roztáča paličku (s momentom zotrvačnosti I, všeobecne platí $I = c.m.R^2$, kde R je dĺžka telesa a c charakteristická konštanta[10] pre daný tvar) a ona padá dolu. Pohyb počítajme vzhľadom na náš prst, tým sa zbavíme jednej sily a zostane nám iba tiažová. Paličku roztáča s uhlovým zrýchlením

$$\varepsilon = \frac{M}{I} = \frac{\frac{G \cdot R}{2} \sin \alpha}{c \cdot m \cdot R^2} = \frac{g \sin \alpha}{2c \cdot R}$$

Vidíme, že čím dlhšia palička, tým pomalšie zrýchľuje svoje otáčanie. No a čím pomalšie zrýchľuje, tým máme viac času, aby sme stihli zareagovať a pohnúť rukou do smeru, kam palička padá. No nie? No áno! A kam s ňou pohnúť? No predsa do smeru, kam padá naša palička. Tým, že s ňou zrýchlime, vznikne zotrvačná sila pôsobiaca v ťažisku a spôsobí moment sily v opačnom smere (pôsobí kolmo na tiažovú a bude tam kosínus) a palička sa opäť narovná. To je dôvod, prečo musíme s rukou neustále hýbať.

Ináč, ten sínus a kosínus sú pri držaní paličky celkom dôležité. Pre malé uhly je sínus takmer rovný nule a preto sa palička roztáča dosť pomaly. Akonáhle však sínus vzrastie, klesne nám kosínus a teda nielen bude viac zrýchľovať nadol (padať), ale aj my sa budeme musieť oveľa viac snažiť, aby sme spôsobili dostatočne veľký opačný moment sily.

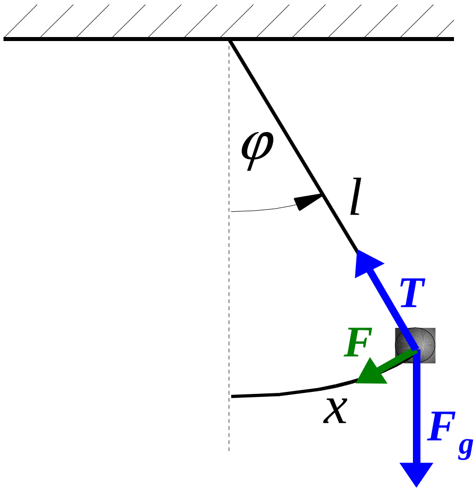
A otázka pre vás na zamyslenie: ako na to vplývajú nehomogenity v paličke? S akou by sa nám hralo najlepšie? (Napríklad kladivo je veľmi dobrý tvar, ale radšej experimentujte s niečím iným...)

---

[10] Trochu fyziky. Moment zotrvačnosti hmotného bodu vzhľadom na nejaký bod počítame ako $\mathrm{d}I = R^2\mathrm{d}m$. Integráciou tohto vzťahu cez všetky časti telesa získame výsledný moment zotrvačnosti I. Ako vidno, výsledný moment závisí od druhej mocniny rozmerov telesa. Pozor, len v prípade, že hmotnosť telesa je rovnaká. Väčšinou však máme skôr rovnakú hustotu a teda k-krát väčšie teleso má k^5 krát väčší moment (lebo hmotnosť stúpne k^3 krát). No a v závislosti od tvaru (a bodu, vzhľadom na ktorý to rátame!) sa pri integrácii objaví aj bezrozmerná konštanta c (nemá nič spoločné s integračnou konštantou C, rátame určitý integrál:). Také používané konštanty sú napríklad $\frac{2}{5}$ pre homogénnu guľu, $\frac{1}{3}$ pre tyč točiacu sa okolo konca, $\frac{1}{12}$ pre tyč točiacu sa okolo stredu,...

A-1.4 Kyvadlo (opravovala Tinka, vzorák Bzdušo)

Matematické kyvadlo má svoju periódu nezávislú od maximálnej výchylky a existuje jednoduchý vzorec, ako túto periódu zrátať. Vieme však aj to, že pre veľké výchylky už tento vzorec neplatí. Je skutočná perióda menšia alebo väčšia, ako tento vzorec vraví? Prečo je to tak?



Kyvadlo sa čo? Pohybuje.[11] Ak chceme jeho pohyb popísať, potrebujeme pohybovú rovnicu, tzn. nejakú závislosť zrýchlenia od výchylky: Na to použijeme Newtonovo $F = ma$.

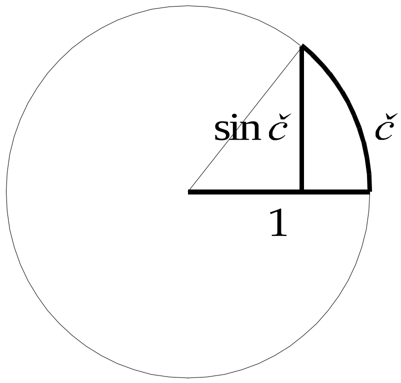
Na guľôčku pôsobí tiažová sila F_g. Lanko ju núti pohybovať sa len po obvode kružnice (a bude pôsobiť práve takou silou T, aby ho neopustila). Výsledná pôsobiaca sila je preto $F = F_g \sin\varphi$. Pre zrýchlenie dostávame (znamienko „mínus“ znamená, že zrýchlenie má opačný smer ako výchylka)

$$a = -\frac{F}{m} = -g\sin\varphi = -g\sin\frac{x}{l}$$

kde sme zaviedli označenie l pre dĺžku závesu a x pre dĺžku prejdeného oblúka z rovnovážnej polohy. Rovnice si uložíme a spravíme malú odbočku.

Spomeňme si, čo vieme o pohybe závažia (hmotnosť m) zaveseného na pružine (tuhosť k). Pružina natiahnutá o x z rovnovážnej polohy bude pôsobiť silou $-kx$ a teleso na pružine bude mať zrýchlenie

$$a = -\frac{k}{m}x\,.$$



Pohyb (výchylka v závislosti od času) daný touto rovnicou je opísaný sínusoidou a *perióda kmitov nebude závisieť od amplitúdy*. Tak to musí vyjsť vždy, keď zrýchlenie závisí od výchylky lineárne.[12] No a to je práve to! V prípade kyvadla lineárnu závislosť nemáme.

Z definície sínusu na jednotkovej kružnici je zrejmé, že $|\sin č| < |č|$. Ak tento vzťah aplikujeme v rovnici pre kyvadlo, dostaneme

$$|a| = \left|g\sin\frac{x}{l}\right| < \left|g\frac{x}{l}\right|.$$

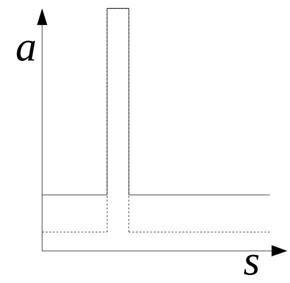
A teraz pointa: Predstavte si, že vezmeme lineárny oscilátor (s rovnakými hodnotami l a g) a naše kyvadlo a obe vychýlime o rovnaké x. Naše kyvadlo bude mať v každom bode dráhy menšie zrýchlenie. Z toho možno usúdiť, že bude mať v každom bode dráhy aj menšiu rýchlosť a *jedna perióda bude trvať o niečo viac*.

Z jednotkovej kružnice tiež vidno, že rozdiel v zrýchleniach (a teda aj rýchlostiach a časoch) bude tým výraznejší, čím väčšiu amplitúdu (číslo $č$ na obrázku) zvolíme. Naopak, pre malé výchylky, keď $\sin č \approx č$, by oscilátory kmitali takmer s rovnakou periódou.

[11] Čo sa pohybuje? Kyvadlo. Kyvadlo pohybuje čo? Sa. Skúste sa takto pohrať aj s inými vetami, napríklad: „Mama išla do obchodu a kúpila mlieko.“

[12] Ak to nie je zrejmé z rovnice, nič zlé sa nedeje. Dokonca to zrejmé ani nemôže byť a túto skutočnosť by vám mali prostoreko povedať na hodinách fyziky.

Poznámka na záver



Ak je zrýchlenie v každom bode dráhy menšie, je intuitívny dôsledok, že aj rýchlosť bude v každom bode dráhy menšia. Predstavte si však, že by sa dve telesá pohybovali z pokoja a ich zrýchlenia od dráhy by boli dané grafmi vpravo.

Teleso s menším zrýchlením by do píku vošlo menšou rýchlosťou. Zdržalo by sa v ňom dlhšie a preto by na ňom mohlo získať väčšiu rýchlosť ako teleso, ktoré píkom len tak „prefrčalo“. Veď predsa $\Delta v = at$, dráha tam nevystupuje.

Ukazuje sa, že sa to nemôže stať, korektný dôkaz sa však nevymýšľa ľahko. Dám vám ale hint: Ako súvisí zrýchlenie s vykonanou prácou? A ako so získanou kinetickou energiou?

FYZIKÁLNY KOREŠPONDENČNÝ SEMINÁR

výsledková listina A – kategórie po 1. sérii zimného semestra 24. ročníka

	Priezvisko	**Škola**	**A-1.1**	**A-1.2**	**A-1.3**	**A-1.4**	**☠**	**Σ**
1.	Bogár Ján	G Ľ. Štúra Trenčín	6	5	5	5	-	21
2.	Bosák Radomír	G BA Grösslingova	6	4.8	5	5	-	20.8
3.	Eiben Eduard	G KE Poštová	6	5	4	5	-	20
	Polačko Martin	G KE Alejová	6	5	4	5	-	20
5.	Hruška Eugen	G Hlohovec	6	3.5	5	4.5	-	19.76
6.	Honzáková Kateřina	GJK Praha	6	1.5	5	5	0	18.73
7.	Maixner Michal	OG ZA Varšavská	4.5	5	3.5	5	-	18
8.	Vanta Radovan	G BA Metodova	6	4	1.5	5	-	17.99
9.	Bačo Ladislav	G KE Poštová	6	3.5	1.5	5	-	17.6
10.	Kováč Jakub	GsvCaM	6	4.8	2	4.7	-	17.5
11.	Lešková Andrea	G Lipany	6	4.8	0.5	4.5	-	17.44
12.	Matejovičová Lenka	G BA J.Hronca	6	4.8	3.5	3	-	17.3
13.	Krejčír Andrej	G PD Prievidza	6	4.7	4.5	-	-	16.96
14.	Kieferová Mária	GSF Žilina	6	5	1	4.7	-	16.7
15.	Hagara Michal	G BA J.Hronca	6	4.8	-	4	-	16.64
16.	Batmendijnová Kristína	G Stará Ľubovňa	6	4.8	1.5	4.2	-	16.5
17.	Rohár Pavol	G KE M.R.Štefánika	5	4	0.5	5	-	16.38
18.	Rigdová Emília	OG Kukučínova Poprad	6	4.8	3.5	-	-	16.22
19.	Hudák Adam	G KE M.R.Štefánika	6	4.8	3	0.3	-	16.05
20.	Baxová Katarína	G Ľ. Štúra Trenčín	6	3.5	1.5	5	-	16
	Jursa Jakub	G KE Alejová	6	5	-	5	-	16
22.	Zajaček Michal	Ev. Lýc. BA	6	4	1	4.9	-	15.9
23.	Horňák Filip	G BA Grösslingova	4.5	0.5	3.5	4.9	-	15.44
24.	Štyráková Kamila	G POH, Dolný Kubín	5	4.8	2	1.5	-	15.35
25.	Katsiaryna Artsiushina	Minsk, Belarus N-51	6	5	2.5	1	-	14.5
26.	Liščinský Miroslav	G KE Alejová	6	4.8	2.5	0.5	-	13.8
27.	Chudjak Martin	SPŠ Martin	6	4	0.5	1	-	13.69
	Ďurian Michal	G Piešťany	6	3.5	1	1	-	13.69
29.	Vanya Peter	G BA J.Hronca	4	5	0.5	3	-	12.5
30.	Hašík Juraj	G BA Grösslingova	0.5	4.8	1	5	1	12.49
31.	Midlik Adam	G J.A.R. Prešov	5.5	4.7	0	0	-	12.4
	Šimko Stanislav	G BA J.Hronca	-	4.7	0.5	5	-	12.4
33.	Kuklišová Nina	G BA Metodova	4	4.5	1.5	1	-	11
34.	Petrucha Michal	G BA Metodova	6	4.5	-	-	-	10.5
35.	Sládek Filip	GAB Námestovo	6	-	1.5	-	-	9.53
36.	Kuzma Tomáš	G KE Alejová	6	3	0.5	-	-	9.5

37.	Cocuľová Zuzana	G KE Poštová	4	2	1	-	-	8.96
	Görcsösová Andrea	G KE Alejová	6	0.5	0.5	0	-	8.96
	Kramárik Lukáš	G Ľ. Štúra Trenčín	6	-	1	-	-	8.96
	Kubinová Mária	G POH, Dolný Kubín	5.5	-	1.5	-	-	8.96
41.	Hojčka Michal	G Partizánske	0.5	4.8	0.5	3	-	8.8
42.	Bendová Lenka	G BA J.Hronca	6	-	1.5	-	-	7.5
	Pinnaka Prabhat Rao	Hyderabat, India	0.5	-	4	3	-	7.5
44.	Vaváčková Martina	G Coud, Tábor, ČR	0.5	4.5	0	5	5	7.2
45.	Matulová Daniela	G BA Papánka	0.5	0	2	1.5	-	5.36
46.	Stripajová Svetlana	G POH, Dolný Kubín	0.5	1	0.5	3	-	5
47.	Baranová Jana	G KE Alejová	-	-	0.5	1	-	2.09
48.	Marcinek Ján	G Kremnica	0	0	0.5	1.5	-	2
	Stupka Roman	G Kremnica	-	-	1	1	-	2
50.	Suchomelová Dana	G Ľ. Štúra Trenčín	-	-	1.5	-	-	1.5
51.	Marhefka Eduard	G Spišská Stará Ves	5	2	-	-	6	1
52.	Maliková Lucia	Liptovská Teplička	0.5	-	0.2	-	5	0
	Sedlačková Barbora	G Sereď	-	-	0	-	-	0

Výsledková listina kategórie FX
po 1. sérii

	Riešiteľ	FX1	FX2	FX3	Spolu
1.	Eugen Hruška	5	3.5	3	11.5
2.	Mária Kieferová	5	2	3	10
3.	Ján Bogár	3	3	1.5	7.5
4.	Kateřina Honzáková	2	5	-	7
5.	Martin Polačko	3	1	2	6
6.	Peter Vanya	2	3.5	-	5.5
7.	Prabhat Rao Pinnaka	-	-	2	2
8.	Adam Mohammad	-	0	-	0
	Michal Zajaček	0	-	-	0