# FYZIKÁLNY KOREŠPONDENČNÝ SEMINÁR

**vzorové riešenia 2. série**
**B –** kategória (mladší)
24. ročník
zimný semester
školský rok 2008/2009

**FKS, KTFDF FMFI UK**
**Mlynská dolina**
**842 48 Bratislava**
*otazky@fks.sk*

**www.** **.sk**

---

**B-2.1 Slamky** (opravovala Judita, vzorák Samo a Marika)

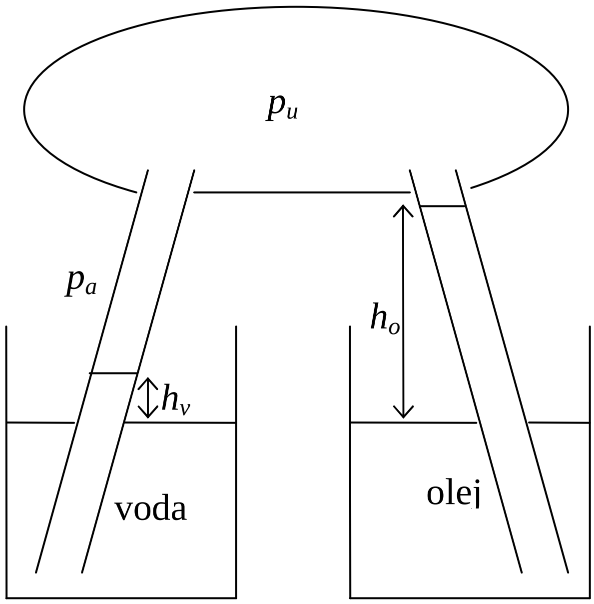
*Piť slamkou, to dokáže každý. Mal som takého spolužiaka, ktorý sa volal Marján a občas som ho úplne nechápal, ale ešte aj on to dokázal. Skúste však nasledujúci experiment: Dajte si slamky do úst dve, pričom iba jedna z nich skončí v nápoji, koniec druhej ostane voľne vo vzduchu. Dá sa takýmto spôsobom piť? Podeľte sa s nami o výsledky vášho experimentu. Prečo je to tak?.*

Väčšina z vás správne zistila, že svoj smäd týmto spôsobom neuhasíte. Iní správne zistili, že svoj smäd týmto spôsobom uhasíte. Kto má pravdu? Všetci a nikto, poďme sa teda na to spoločne pozrieť.

Skúsme slamku, ktorá trčala vo vzduchu, ponoriť do oleja. O chvíľu pocítime mastnú chuť na jazyku, ale žiadnu vodu. Prečo je to tak?

Kľúčom k správnemu riešeniu bolo pozrieť sa na tlaky v oboch slamkách.

V rovnovážnom stave sa tlak tesne pod hladinou vody v nádobe rovná atmosférickému tlaku. Keby to tak nebolo, na vodu by pôsobila výsledná nenulová sila a voda by sa musela pohybovať. Podobná úvaha funguje aj pre druhú tekutinu. Zo školy poznáme vzťah na výpočet hydrostatického tlaku v hĺbke $h$ ako $\rho g h$. Na hladinu v slamkách pôsobí tlak vzduchu v ústach, ktorý je nižší ako atmosférický vďaka nášmu saciemu skillu. Výsledný tlak v slamke na úrovni hladiny v nádobe môžeme potom vypočítať ako súčet tlaku v ústach a hydrostatického tlaku v slamke. Z predošlej úvahy však vieme, že tento tlaku sa musí v rovnovážnom stave rovnať atmosférickému. Získavame nasledovné rovnice:




$$p_a = h_v \rho_v g + p_u$$
$$p_a = h_o \rho_o g + p_u$$

Teda:

$$h_v \rho_v g = h_o \rho_o g$$
$$h_v = \frac{\rho_o}{\rho_v} h_o$$
$$\frac{\rho_o}{\rho_v} < 1$$

Z toho potom výška vody v slamke bude vždy nižšia ako výška oleja. Voda sa preto nikdy nedostane do našich úst, lebo výška oleja nemôže byť vyššia ako výška slamky. V prípade, že miesto oleja budeme cucať vzduch, výška vody v slamke bude malá – priam nepozorovateľná, lebo vzduch má tisíckrát menšiu hustotu ako voda.

Nám sa napriek tomu napiť podarilo – prudko sme začali ťahať z oboch slamiek. Chvíľku sme ťahali vzduch a potom sme zacítili trochu vody. A potom nám došiel dych… Pred chvíľou sme ale povedali, že piť sa takto nedá. Kde sa stala chyba?

Pri riešení sme predpokladali, že cucáme pomaly a stav je ustálený. Keď však prudko nasajeme, na krátku chvíľu poklesne tlak v ústach na dostatočne nízku hodnotu, pretože vzduchu chvíľku trvá, kým vystúpi slamkou hore. Počas toho sa k nám vie dostať trošku vody a nám sa podarí trochu sa napiť. Opakovaním tohto postupu dokážeme vypiť aj celý pohár, no je to veľmi pracné.

---

**B-2.2 Pííí** (opravoval Filip, vzorák Filip)

*Z ľubovoľného počtu odporov o veľkosti 1 $\Omega$ vyrobte schému, ktorej odpor sa od hodnoty $\pi\,\Omega$ nebude líšiť o viacej ako $\frac{1}{1000}\,\Omega$. Okrem toho 5 bodový bonus dostane od nás ten riešiteľ, ktorý takúto schému vymyslí s použitím čo najmenšieho počtu odporov.*

Na začiatok si premyslime, čo od nás chce zadanie. Keďže π je iracionálne číslo a naša hodnota sa od neho nemá líšiť o viac ako tisícinu, chceme asi dostať ľubovoľné číslo z intervalu $\langle \pi - 0{,}001\ ,\ \pi + 0{,}001 \rangle$. Ale ako ho dostať?

Pri prvom pohľade na zadanie to vyzerá ťažko, ba priam veľmi ťažko, no nie? Tak sa pozrime znovu. A znovu, až kým nás niečo nenapadne. Čo keby sme napríklad skúsili zapojiť tri rezistory sériovo („za seba“)? No, tak potom by bol celkový odpor 3 Ω. Skoro π :) A čo ďalej?

Výsledný odpor chceme zväčšiť, štvrtý odpor do série však už dať nemôžeme. To by bolo priveľa. Opäť sa treba zamyslieť. Doteraz sme zapájali sériovo, čo tak skúsiť zapojiť nejaké odpory paralelne („vedľa seba“)? Ako dobre vieme zo školy, ak dáme dva rezistory paralelne, výsledný odpor bude polovičný. Pre výsledný odpor *n* paralelne zapojených rovnakých rezistorov platí vzorec

$$\frac{1}{R_V} = \frac{1}{R} + \frac{1}{R} + \ldots + \frac{1}{R} = \frac{n}{R}$$

a teda

$$R_V = \frac{R}{n}$$

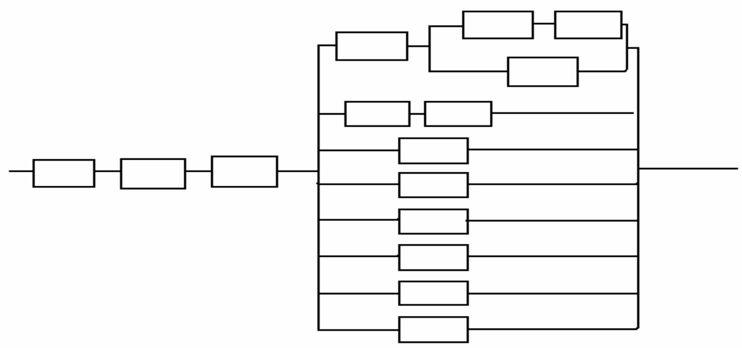
Aha! Ak dáme tri, tak bude odpor tretinový. No ak ich dáme 10, tak odpor bude $\frac{1}{10}$ Ω. Máme tak dve schémy, jedna má odpor 3 Ω, tá druhá $\frac{1}{10}$ Ω. Keby sme ich vedeli sčítať... Ale veď to predsa vieme! Pripojíme túto skupinku desiatich rezistorov za prvé tri a dostaneme tak odpor 3,1 Ω.

A ideme ďalej, už je to jednoduché. Vezmeme 100 rezistorov zapojených vedľa seba – ich odpor bude preto $\frac{1}{100}$ Ω a túto skupinu zapojíme za tie, čo už máme. A nový odpor je 3,11 Ω. Zapojíme tam ďalšie 3 skupiny po 100 rezistoroch a máme 3,14 Ω. Ďalšiu cifru už máme „hotovú“! Ako dostať odpor 3,141 Ω si už domyslite sami, ohľadom toho, že ste šikovní. A iné.

Druhá možnosť bola jednoduchšia, ale nie až taká pekná. Stačilo si vyjadriť π vhodným zlomkom ($\frac{22}{7}$ je príliš nepresné). Zlomok $\frac{p}{q}$ vieme vytvoriť veľmi ľahko, vezmeme $q$ vetiev, pričom v každej vetve bude $p$ odporov. Podľa hore uvedených vzorcov sa o tom, že výsledný odpor je $\frac{p}{q}$ Ω, ľahko presvedčíme.

To je všetko, čo stačilo na plný počet. Existujú však aj riešenia s menším počtom rezistorov. My sme ich použili $1+1+1+10+100+100+100+100+1000=1413$ (π napísané odzadu;). K získaniu bonusu bolo treba toto zapojenie zoptimalizovať. Napríklad takto: rozložíme si π na $3+(\pi-3)$. Trojku dostaneme ako tri odpory za sebou, číslo v zátvorke je o čosi väčšie ako $\frac{1}{8}$ a o čosi menšie ako $\frac{1}{7}$. Odpor $\frac{1}{8}$ dostaneme zapojením 8 rezistorov vedľa seba. Keďže tento odpor je príliš malý, začneme do jednej vetvy pridávať ďalšie rezistory. Keď ich je tam 9, máme π s dostatočnou presnosťou použitím $3+7+9=19$ odporov.

Existovali však ešte lepšie zapojenia. Najlepšie riešenie využíva neuveriteľných 12 rezistorov a prišli naň nezávisle Kubus a Azag. Nakoľko obidve spomínané indivíduá sú už vedúcimi, :) 5 bodový bonus získala Klára Ficková za schému využívajúcu len 15 rezistorov:



---

**B-2.3 Grafy** (opravovala Janka, vzorák Tinka)

*Medzi múdrosti fyzikálne vzdelaných starých mám patrí fakt, že ak graf zobrazuje závislosť rýchlosti od času, tak plocha pod týmto grafom odpovedá prejdenej dráhe.*

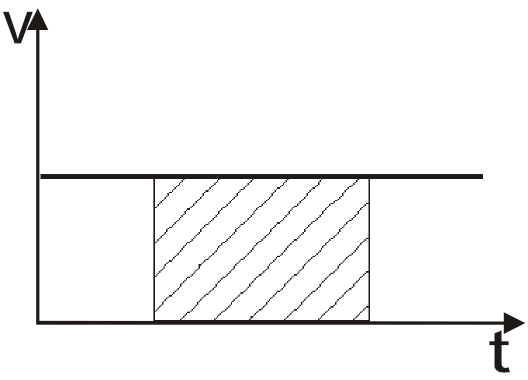
*a) (1 bod) Vyslovte presnú formuláciu tejto múdrosti - ktorá plocha a ktorej dráhe odpovedá?*

*b) (2 body) Prečo je to tak?*

*c) (1 bod) Určte, akú dráhu medzi časmi 1 min a 8 min prešlo auto, ktorého rýchlosť je zaznamenaná v grafe.*

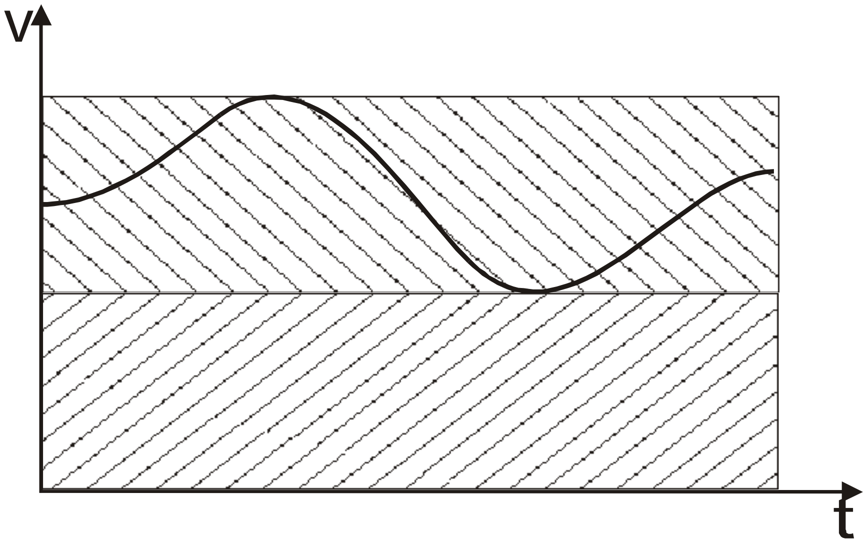
*d) (2 body) Funguje podobná finta, aj pokiaľ by sa jednalo o graf závislosti rýchlosti od polohy? Ako v tomto prípade určiť dráhu alebo čas prislúchajúci nejakému úseku na x-ovej osi?*

*Všetky tvrdenia sa samozrejme vzťahujú na jednorozmerný pohyb - napr. pohyb auta po ceste.*

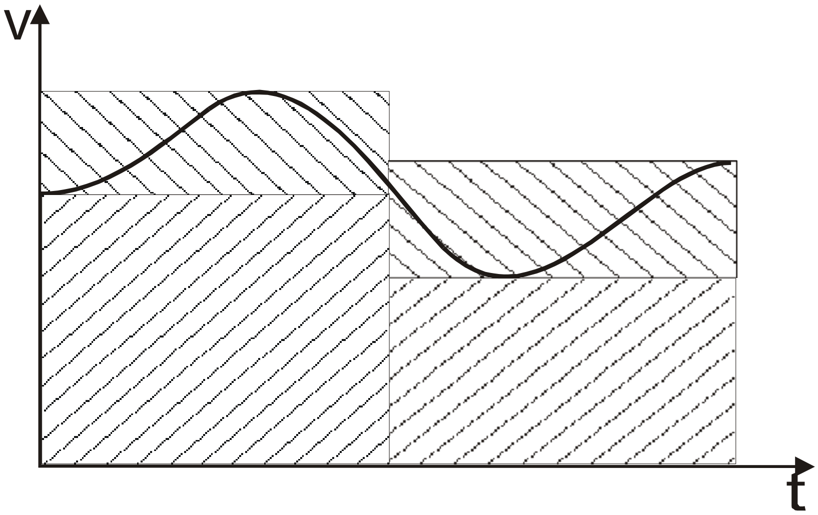



Nuž, dovolím si začať rovno vysvetlením, prečo by takéto niečo malo fungovať. V skutočnosti sa nemáme veľmi o čo iné oprieť, ako o ten starý známy vzorec pre Rovnomerný Priamočiary Pohyb, vraj $\Delta s = v\cdot\Delta t$. Keď si nakreslíme graf RPP, zistíme, že ploche pod grafom zodpovedá obdĺžnik so stranami $\Delta t$ a $v$. No a jeho plocha je $v\cdot\Delta t$, čo sa podľa tamtoho vzorca rovná prejdenej dráhe. Hurá, funguje to (aspoň v tomto prípade) ! Ale čo ďalej?

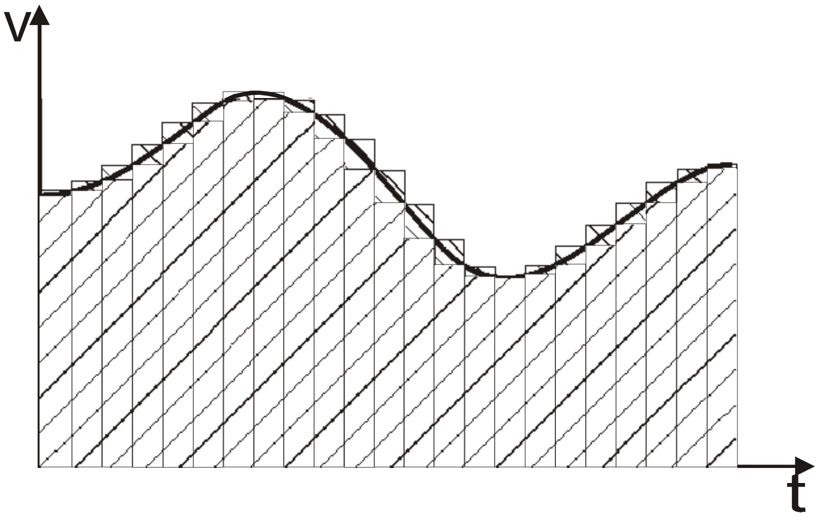
Nebuďme mäkkí, spravme to hneď všeobecne. Ako správni fyzici budeme postupovať metódou "odhadni a spresni", až sa nakoniec dostaneme k presnému výsledku. Vezmime si ľubovoľnú funkciu, napríklad takú, ako na obrázku. Dôležité je si uvedomiť, že ak pretekám s Jankom a Janko v každom čase beží nanajvýš tak rýchlo ako ja, tak Janko nemôže prebehnúť dlhšiu dráhu ako ja. Tak si v grafe nájdem miesto, kde máme najnižšiu rýchlosť a môj prvý odhad prejdenej dráhy bude, že som sa stále pohyboval touto rýchlosťou a pri nej už viem, že dráha zodpovedá ploche daného obdĺžnika (tu to už môžem, lebo zase som pri RPP!). Takto som získala dolný odhad prejdenej dráhy. Rovnako si nájdem najväčšiu rýchlosť a pomocou nej získam horný odhad dráhy.




Tak, dáke odhady by sme už mali, ale rozdiel medzi horným a dolným je priveľký, skúsime ho zlepšiť. Môžeme celú situáciu rozdeliť na dve časti – to, čo prešiel za prvú polovicu času a čo za druhú. To si môžeme dovoliť, pretože to, čo sa dialo v prvej časti, nijako neovplyvňuje to potom. A výsledná dráha (respektíve odhad) je súčtom dráh (odhadov) za tieto dva časové úseky. Na každú polovicu aplikujeme zase to, čo sme už zistili – nájdeme dolný aj horný odhad.




Je to lepšie, no stále to nie je ideálne, avšak verím, že domýšľavý čitateľ už tuší, čo ďalej. Budeme to sekať na čoraz menšie časové dieliky a ono sa nám horný a dolný odhad čoraz viac budú podobať na plochu pod grafom. A keby sme boli strááášne šikovní a nasekali to na nekonečne malé dieliky, tak by to úplne splynulo. Teraz si už len uvedomiť, čo to znamená. No predsa – prejdená dráha ja aspoň taká veľká ako plocha pod grafom (tvrdí dolný odhad) a zároveň je nanajvýš taká, ako plocha pod grafom (kričí nám horný odhad). Ale potom musí byť rovná tejto ploche![1]




Teraz keď vidíme, ako presne to funguje, môžeme naformulovať aká presne plocha a iné: Majme graf popisujúci závislosť rýchlosti od času. Ak medzi časmi $t_1$ a $t_2$ je rýchlosť stále nezáporná, potom dráha prejdená medzi týmito časmi je rovná ploche medzi $x$-ovou osou, grafom funkcie a zvislými priamkami prechádzajúcimi bodmi $t_1$ a $t_2$ na $x$-ovej osi.[2]

[1] Premyslite si, že toto naozaj platí, len keď máme rýchlosť vždy nezápornú. Ale čo ak by niekde bola aj záporná? Potom si musíme rozmyslieť, v akom zmysle nás zaujíma prejdená dráha. Ak nám ide napríklad o to, koľko paliva spotrebujeme, tak aj to, že cúvame považujeme za nárast dráhy, preto aj plochu „nad“ grafom pripočítame k celkovej. Naopak, ak nás zaujíma iba to, ako ďaleko sme zašli, plochu, ktorá leží pod x-ovou osou musíme odpočítať.

[2] Credit to Tomáš, ja som na takéto formulácie nikdy nebola talent.

c) Táto úloha vám zväčša nerobila problémy, naozaj stačilo spočítať štvorčeky, aj keď niektorí mali výčitky svedomia, že sa im nechcelo nájsť funkciu, ktorú by mohli zintegrovať. V zásade jediným problémom mohlo byť uvedomiť si, že jeden štvorček zodpovedá 1/24 km a že máme nájsť dráhu medzi časmi 1 a 8 min, nie od začiatku. Kto si toto všetko všimol, došiel k záveru, že pod grafom je asi 68 štvorčekov, čo zodpovedá približne 2,83 km.

d) Ako zistiť dráhu, keď máme graf závislosti rýchlosti od dráhy? No predsa rozdiel x-ových súradníc!

Trocha zaujímavejšie je to s časom. Skúsme si uvedomiť, že my sme vlastne odvodili omnoho všeobecnejší vzťah, než len pre dráhu, rýchlosť a čas. Ak máme vzťah $\Delta x = w\,\Delta q$ pre konštantné $w$ a graf závislosti $w$ od $q$ (kde $x$, $w$ a $q$ sú ľubovoľné veličiny), tak $x$ zodpovedá plocha pod týmto grafom. Čiže my chceme dostať vzťah pre $\Delta t$ v tomto tvare. Bolo by úplne super, keby $\Delta t = v\cdot\Delta s$. Lenže ono potvora nie je. Po chvíli dumania nám môže prísť na um takáto úprava: $\Delta t = \frac{1}{v}\cdot\Delta s$. Keby sme mali graf závislosti $1/v$ od $s$, tak by nám už zafungovala naša finta s plochou pod grafom. No ale bráni nám niekto si zostrojiť takýto graf? Nebráni. Keď poznáme závislosť v od s, tak zvládneme[3] aj $1/v$ od $s$. A ani to nebolelo.

A teraz trošku osobnejšie: táto úloha bola aj o tom, že nie je všetko také zjavné, ako sa zdá. A preto ste často mali veľmi pokútne formulácie, zjavne predpokladajúc, že veď všetci vieme, aká plocha. Taktiež sa niektorí troška znalejši diferenciálneho počtu domnievali, že fakt, že určitý integrál zodpovedá ploche pod grafom je postačujúcim vysvetlením. Ale ono je to v zásade len preformulovanie problému do inej reči. Iní zase mali dojem, že ak nevedia integrovať, tak nemajú šancu čokolvek s týmto príkladom spraviť. Ale pre mňa asi najnepochopiteľnejšou chybou bola absolútna ignorácia otázky o tom, ako zistiť dráhu z grafu závislosti rýchlosti od dráhy u naozaj mnohých z vás. Nie, to nebola rečnícka otázka! Áno, takto trápne sa dalo prísť o bod...

---

**B-2.4 Šmuhy** (opravoval Tomáš, vzorák Usáma)

*Keď sa gumené koleso šúcha po ceste (teda, neotáča sa, ale prešmykuje), vznikajú na ceste čierne šmuhy. Podobné čierne šmuhy vznikajú na pristávacích dráhach lietadiel. Zaujímavé je, že šmuha vznikne len na začiatku pristávacej dráhy a ďalej už nie.*

*a) (2 body) Prečo je to tak?*

*b) (2 body) Aká dlhá je šmuha, ak hmotnosť lietadla je $M = 40$ ton, rýchlosť lietadla pri pristávaní $v = 250$ km/h, polomer kolesa $r = 0,5$ m, hmotnosť kolesa $m = 50$ kg, moment zotrvačnosti kolesa $I = 1/2mr^2$ a koeficient trenia medzi kolesom a vozovkou $f = 0,5$?.*

*c) (2 body) Aký bude výsledok b) úlohy ak sa budeme zaujímať aj o také prípady, kedy „lietadlo“ má porovnateľnú hmotnosť ako „koleso“? Predpokladajte, že hneď po dosadnutí tlačí lietadlo na vozovku práve svojou váhou a počas tvorenia šmuhy nespomaľuje brzdením o vzduch.*

Predstavme si veľké pristávajúce lietadlo. Pomaly znižuje svoju letovú rýchlosť, vysúva podvozok (čiže kolesá) a chystá sa pristáť. Čo sa deje v momente dosadnutia? Má lietadlo nejakú rýchlosť? Áno, má. Otáčajú sa mu kolesá? Nie, neotáčajú (logicky vyplýva z toho, že ich proste len vysunulo a neroztáčalo ich). Má sa tam čo trieť? Áno, má (stojace kolesá o zem). Výborne, máme odpoveď na to, prečo na začiatku dráhy máme šmuhy.

Teraz ešte, prečo ich nemáme ďalej. Jediná dôležitá sila je tu vlastne trecia sila medzi kolesom a ženou. Čo robí táto sila? Roztáča koleso (lebo má istý moment vzhľadom na stred kolesa, keďže nepôsobí priamo v strede) a zároveň spomaľuje lietadlo. A pokiaľ táto sila roztočí koleso na takú rýchlosť, že nebude prešmykovať, tak šmuhy logicky zmiznú (lebo sa nemá čo trieť).

Dohodnime sa, že naše lietadlo má $n$ kolies. A ešte sa dohodnime, že hmotnosť lietadla je rozložená rovnomerne. Takže sila, ktorá pôsobí ako reakcia od zeme, bude mať veľkosť:

---

[3] Problém by mohol nastať, ak by bola niekde rýchlosť nulová. V skutočnosti nám to ale nehrozí. Ak je rýchlosť nulová, tak dráha nenarastá a preto by takýto bod mohol byť nanajvýš jeden, tým by funkcia končila a v tomto bode by už mohol byť ľubovoľný čas, pretože sa odtiaľ nikdy nepohneme.

$$F_n = \left(\frac{M}{n} + m\right)g$$

Akú veľkosť bude mať trecia sila? Jej maximálna možná veľkosť bude:

$$F_T = F_n f = \left(\frac{M}{n} + m\right)gf$$

Táto maximálna možná veľkosť bude skutočne pôsobiť, pokiaľ koleso prešmykuje.

Teraz povedzme, že celé roztáčanie bude trvať čas *t*. Čo sa za tento čas stane? Jednak sa bude roztáčať koleso pod vplyvom trecej sily. A dvak sa bude pod vplyvom tejto sily spomaľovať lietadlo. Teraz si ale uvedomme, že lietadlo má oveľa väčšiu hmotnosť ako koleso. Efekt roztáčania kolesa bude ďaleko silnejší ako efekt spomaľovania celého lietadla, ktorého rýchlosť teda môžme považovať za konštantu rovnú *v*. V čase *t* chceme dosiahnuť, aby (toto je podmienka pre neprešmykovanie, rozmyslite si prečo!):

$$v = \omega \cdot r \qquad (1)$$

kde $\omega$ je uhlová rýchlosť kolesa. Ďalej je postup pomerne priamočiary. Zistíme moment trecej sily *P* vzhľadom na stred kolesa, ten vydelíme momentom zotrvačnosti *I*, čo sa rovná uhlovému zrýchleniu $\varepsilon$ a keďže zistíme, že toto sa v čase nemení, tak ho vynásobíme časom a máme uhlovú rýchlosť. Takže (v rovniciach to píšem odzadu):

$$\omega = \varepsilon t = \frac{P}{I}t = \frac{F_T r}{\frac{1}{2}mr^2}t = \frac{2F_n f}{mr}t \cong \frac{2Mgft}{nmr} \text{ Keďže } M >> m.$$

Toto dosadím do (1) a vyjadrím čas:

$$v = \frac{2Mgft}{nmr}r$$

$$t = \frac{vmn}{2Mgf}$$

A na zistenie dráhy mi čas stačí vynásobiť rýchlosťou (keďže sme sa dohodli, že rýchlosť lietadla ostáva konštantná):

$$s = vt = \frac{v^2 mn}{2Mgf}$$

To pre *n* = 1 (čo rátala väčšina z vás) dávalo výsledok 0,61 m. Pre *n* = 6 to bude 3,6 m.

Čo sa stane, ak bude hmotnosť lietadla porovnateľná s hmotnosťou kolesa (to neznamená, že rovnaká, tak, ako to napísala asi tretina z vás). V prvom rade spomalenie lietadla prestane byť zanedbateľné, takže rýchlosť lietadla sa bude meniť.

V čase *t* bude rýchlosť lietadla:

$$v_x = v - at = v - t \cdot n\frac{F_T}{M + mn} = v - gft$$

Ešte vo vzťahu pre uhlovú rýchlosť kolesa nebudeme používať zanedbanie, ktoré sme spravili v poslednom kroku. A zase máme podmienku pre neprešmykovanie:

$$v_x = \omega r$$

$$v - gft = \frac{2F_n ft}{mr} r$$

$$t = \frac{vm}{gfQ}$$

kde za $F_n$ sme dosadili vyjadrenie cez hmotnosti a $Q$-čkom označili $\left(\frac{2M}{n} + 3m\right)$.

Na výpočet dĺžky šmuhy použijeme vzorec z prvej triedy:

$$s = vt - \frac{at^2}{2} = t\left(v - \frac{gft}{2}\right) = \frac{v^2 m(2Q - m)}{2gfQ^2}$$

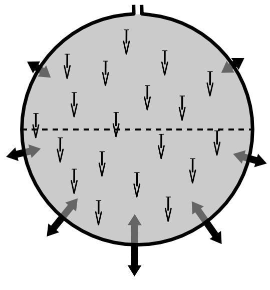
A je to. Táto úloha viacerých zviedla na riešenie cez energie. Bohužiaľ iba minimum týchto riešení (v B-čku ani jedno) bolo dobrých. Najčastejšie chyby: Zabúdali ste do energetikej bilancie zahrnúť ozaj všetko. Tá má správne vyzerať nasledovne: Kinetická posuvná energia kolies a lietadla na začiatu = kinetická posuvná energia kolies a lietadla na konci + rotačná energia kolies + práca trecej sily. Ďalším častým problémom bolo vyčíslenie posledného členu tejto rovnice. Práca trecej sily sa dá síce rátať ako *F.s* ale ak si myslíte, že za *F* treba dosadiť treciu silu a za *s* dĺžku šmuhy, ste (konkrétne, s tou dĺžkou) na omyle. Predstavte si roztočené koleso, ktoré držíte rukou za osku na jednom mieste. Pritlačíte ho o zem. Chvíľu sa šúcha, potom zastaví. Keďže ho držíme, dĺžka šmuhy je 0, ako by ju jedna mater mala. Práca trecej sily však nulová rozhodne nebude – však nám zastavila koleso! Za *s* teda musíme dosadiť dráhu (meranú po obvode kolesa) a o ktorú sa koleso počas brzdenia pootočilo (nad tým sa dá ešte hlbokofilozoficky zamyslieť, tu to však spraviť nestíhame). V prípade lietadla to bude ešte komplikovanejšie. Vedúci Jakub sa nad problematikou hlbokofilozoficky zamyslel a skrze moju klávesnicu vám odkazuje, že prešmykovanie kolesa po vozovke sa deje v priemere ako keby rýchlosťou *v*/2 (na začiatku *v*, na konci 0) a hodnota *s* je teda polovicou dĺžky šmuhy. Korektná argumentácia prečo to tak je ostáva však zaseraz na vás, nakoľko presahuje (najmä svojím množstvom) plánovanú dĺžku tohto vzoráku. Pomocou tohto tvrdenia však už vieme energetickú bilanciu zapísať správne. Skrátka: dalo sa to aj cez energie, no je to humus.

---

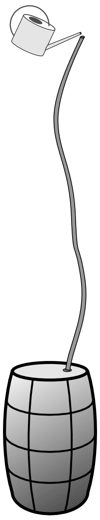
**B-2.5 Voda** (opravoval JAno, vzorák Jakub)

*Máme dve duté nehmotné polgule. Dáme ich k sebe – tak, ako na obrázku. Do výsledného čuda dáme vodu, pričom hornú polguľu zafixujeme, aby sa nehýbala a navŕtame zhora do nej maličkú dierku tak, aby hore bol atmosférický tlak. Otázka je, akou silou F treba teraz pritláčať spodnú polguľu, aby ostala pricapená na vrchnej? Peťo si myslí, že táto sila by mala byť rovná tiaži vody uzavretej vo vnútri, keďže úlohou tejto sily nie je nič iné ako udržať vodu na mieste. Kde je v tejto úvahe chyba, a koľko to vlastne má byť?*

Začal by som zaostrením pozornosti na malú dierku vo vrchu hornej polgule. Tá má jedinú úlohu – zabezpečiť, aby hore v hornej polguli bol atmosférický tlak. Ten sa potom skrz vodné teleso prenáša nadol a jeho účinok na steny sa ruší s atmosférickým tlakom, ktorý pôsobí zvonku. Inými slovami, vďaka malej dierke môžeme na atmosférický tlak úplne zabudnúť.



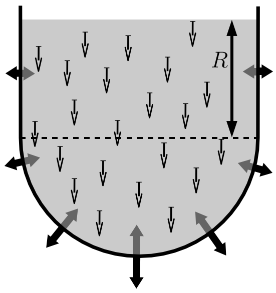
Ďalšou dôležitou vecou je uvedomiť si, že vo vode vzniká hydrostatický tlak, ktorý v hĺbke *h* pod dierkou má veľkosť (po odčítaní atmosférického) $p = h\rho g$. Z obrázku vpravo by sme mali začať tušiť, odkiaľ vietor fúka. Čierne hrubé šípky znázorňujú sily hydrostatického pôvodu pôsobiace na steny nádoby (spomínaný hydrostatický tlak tlačiaci do stien nádoby); šedé



hrubé znázorňujú k nim reakčné sily pôsobiace na vodné teleso. Čierne malé šípky znázorňujú tiaž kvapaliny.
Z rovnováhy síl pre vodu nám platí teda čosi takéto (p. = polguľa):

*Šedé šípky od spodnej p. = tiaž vody v oboch p. + šedé šípky od hornej p.*

No a na posledný člen v tejto symbolickej rovnici chalan zo zadania hlúpo zabudol.
Výsledok má byť teda väčší ako len tiaž vody a v ďalšej časti vzoráku si porátame, aký veľký by vlastne teda mal byť.




Nebude to ťažké. Pozrite, máme formulku pre hydrostatický tlak $p = h\rho g$, z ktorej vidíme, že tlak netuší, aký objem vody je priamo nad ním, lež závisí iba od hĺbky daného miesta pod hladinou. To môžeme s výhodou použiť na konštrukciu situácie (viď obr.), ktorá je ohľadom spodnej polgule ekvivalentná so zadanou úlohou a pritom ju budeme vedieť spočítať na prstoch. Overme ekvivalenciu: Spodná polguľa je na oboch obrázkoch rovnaká. Voda v hornej polguli sa efektívne prejavuje iba tvorbou hydrostatického tlaku na znázornenom čiarkovanom rozhraní a ten je na oboch obrázkoch rovnaký ($R\rho g$). Rozdiel v situáciách je v tom, že na druhom obrázku vrchná časť nádoby nepôsobí na vodu v zvislom smere. V tomto prípade teda plne platí (vo všeobecnosti chybná) úvaha zo zadania, že gravitačná sila na vodu sa musí plne vykompenzovať s reakciou spodnej polgule. Čiže tiaž vody v tejto konfigurácii je zhodná so silou, ktorou minimálne musím tlačiť na spodnú polguľu nahor (tá tlačí následne na vodu).

Ak $R$ je polomer gule v zadaní, tak na spodnú polguľu musím tlačiť silou aspoň

$$F = \left[\frac{1}{2}\frac{4\pi R^3}{3} + \pi R^2 R\right]\rho g = \frac{5}{3}\pi R^3 \rho g = \frac{5}{4} m_{vody\ v\ guli}\, g.$$

*Poznámka:* Vlastnosť hydrostatického tlaku, ktorú sme využili, totiž, že tlak nezávisí od množstva vody nad daným miestom ale len od hĺbky, sa dá veľmi „konštruktívne“ využiť na roztrhnutie suda. Stačí na to plný sud, dlhá a pevná hadica a 1 krhlička vody. PRÁSK!!!!

---

**B- Koza** (neopravoval Tomáš)

Táto úloha bola bonusová a bodovo teda hodnotená nebude. Výnimočne ani vaše riešenia vám vrátené nebudú, ostanú zabavené vo FKS ako dôkazový materiál. Na otázku zo zadania existuje jediná správna odpoveď a to, že na základe zadaných údajov sa nedá zistiť, koľko stoja tri kozy. To však rozhodne nezabránilo vzniku viacerých kruto tvorivých riešení. Na záver niekoľko mnouvybratých vamistvorených perál:

„Koľko stoja tri kozy? Pravdepodobne rovnako dlho...“ – Kristína Faguľová

„... zadanie je nekompletné. Chýba údaj o tom, či ide o vektorové alebo skalárne pole“ – Kamila Součková

„...a keďže je to živý organizmus, skladá sa z veľkej časti z derivátou uhľovodíkov. Preto musíme vzorec zderivovať...“ – Kamila Štyráková

„Aďa Pločeková pred chvíľou vyhlásila že je koza, ...“ – Ján Bogár

„...ocenenie závisí od uhla v akom vidíme kozu. Obyvatelia … ... vždy keď uvidia kozu otočenú hlavou k nim, považujú ju za bezcennú, pretože cez jej hlavu nevidia, aká je tučná“ – Radovan Vanta

„...odpoveď je 3 poli čo znamená, že tri kozy vymeníme za troch Polačkov ...“ – Marika Kieferová

„Môj ujo kúpil kozu za 1800 Sk“ – Michal Savinec

„Idem to riešiť indukciou“ – Mišo Hojčka

„Stačí použít římské číslice. Potom je jasné že jestliže jedna koza stojí „v polí“ potom tři kozy stojí „xv polí“ “ – Martin Výška

„Prečítajme si prvú vetu po slovách. Kto Čo? Koza. Čo robí? Stojí. Koľko? a KDE? V poli. Z toho nám vyplýva, že koza stojí v poli... Čiže výsledok je *n*-uholník pozostávajúci z *n* kôz.“ – Pali Rohár

„Vychádzam z toho že tri kozy stoja ak: stojí koza 1 A stojí koza 2 A stojí koza 3“ – Tomáš Jančo

„
$$\frac{d_0}{k_0} + \frac{d_0'}{k'} = \frac{d}{k} + \alpha + \frac{d_0' + d}{k'}$$

$$d = \frac{\left(\frac{d_0}{k_0} + \frac{d_0'}{k'} - \alpha\right)}{\frac{1}{k} + \frac{1}{k'}}$$
“ - Michal Maixner

„Tri kozy na poli teda stoja v priemere sedemnast sekund. Avsak... tento odhad je len velmi nepresny, zanedbava skoro vsetko, co som vyssie opisal.“ - Skonštatoval na piatej strane svojho riešenia Peter Vanya

„Zloženie Najvyššej Kozej rady“, ktorou si svoje riešenie nechal odsúhlasiť Eugen Hruška:

| | | |
|---|---|---|
| Predseda: | Ambróz Kozel | môj dedo |
| Podpredseda: | Terézia Kozelová | moja babka |
| Tajomník: | Juraj Kozel | môj strýko |
| Zapisovateľka: | Beáta rod. Kozelová | moja mama |
| Člen: | Peter Kozel | môj strýko |
| Člen: | Eva rod. Kozelová | moja teta |

---

# FYZIKÁLNY KOREŠPONDENČNÝ SEMINÁR

**výsledková listina B – kategórie po 2. sérii zimného semestra 24. ročníka**

| | Meno a priezvisko | Škola | B- 2.1 | B-2.2 | B-2.3 | B-2.4 | B-2.5 | ☠ | ① | Σ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1. | Ficková Klára | G KE Poštová | 5,00 | 10,00 | 2,70 | 3,50 | 0,80 | - | 17,50 | 38,70 |
| 2. | Kopf Michal | G Opava | 5,00 | 5,00 | 5,00 | - | 5,00 | - | 16,00 | 36,00 |
| 3. | Bogárová Zuzana | G Ľ. Štúra Trenčín | - | 5,00 | 2,40 | 4,50 | 4,85 | - | 15,50 | 32,25 |
| 4. | Savinec Michal | GPH Michalovce | 5,00 | 2,50 | 0,70 | 2,50 | 5,00 | - | 16,80 | 31,80 |
| 5. | Kubincová Petra | ŠPMNDAG | - | 5,00 | 5,40 | 4,00 | 0,55 | - | 15,70 | 30,65 |
| 6. | Součková Kamila | Ev. Lýc. BA | 5,00 | 5,00 | 5,50 | 2,00 | 0,95 | 1 | 13,80 | 30,30 |
| 7. | Švančara Patrik | G Ľ. Štúra Trenčín | 5,00 | 4,00 | 2,70 | 2,00 | 1,00 | - | 16,50 | 30,20 |
| 8. | Lami Jozef | G KE Poštová | 4,50 | 5,00 | 1,30 | 3,00 | 0,55 | - | 15,30 | 29,10 |
| 9. | Jančo Tomáš | G Ľ. Štúra Trenčín | - | 5,00 | 3,60 | 3,50 | 0,99 | - | 16,00 | 29,09 |
| 10. | Galovičová Soňa | G ZA Okružná | 5,00 | 5,00 | 2,00 | 3,50 | 1,00 | - | 11,70 | 27,20 |
| | Kireš Jakub | G KE Poštová | 3,00 | 2,50 | 2,20 | 3,50 | 0,75 | - | 16,00 | 27,20 |
| 12. | Kosec Peter | G Ľ. Štúra Trenčín | 5,00 | 4,00 | 3,10 | 2,00 | 1,00 | - | 13,00 | 27,10 |
| 13. | Baxová Zuzana | | 2,50 | 5,00 | 2,90 | 3,00 | 1,00 | - | 12,50 | 25,90 |
| 14. | Vlček Andrej | EvSŠ Lipt. Mikuláš | 5,00 | 3,00 | 3,00 | 3,50 | - | - | 11,00 | 25,50 |
| 15. | Bartko Matúš | G Ľ. Štúra Trenčín | - | 5,00 | 1,70 | 5,00 | 0,80 | - | 12,50 | 25,00 |
| 16. | Gurićan Pavol | G BA Grösslingova | - | 5,00 | 4,00 | 5,00 | 0,95 | - | 9,80 | 24,75 |
| 17. | Večerík Matej | ŠPMNDAG | - | 5,00 | 1,00 | 2,00 | 0,90 | - | 15,30 | 24,20 |
| 18. | Kováč Ondrej | GsvCaM | - | 2,50 | 3,70 | 3,50 | 0,95 | - | 13,00 | 23,65 |
| 19. | Pločeková Andrea | G Piešťany | - | 5,00 | 3,10 | 2,00 | 1,50 | - | 12,00 | 23,60 |
| 20. | Kramárik Lukáš | G Ľ. Štúra Trenčín | - | 5,00 | 1,70 | 4,50 | 0,80 | - | 11,00 | 23,00 |

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 21. | Mrocková Mária | G BA J.Hronca | - | 5,00 | 3,30 | 3,50 | - | - | 11,00 | 22,80 |
| 22. | Bučková Lucia | G Piešťany | - | 4,50 | 1,80 | 3,00 | 1,50 | - | 11,00 | 21,80 |
| 23. | Múthová Denisa | G Bil, Žilina | - | 5,00 | 1,90 | 4,50 | 1,00 | - | 9,00 | 21,40 |
| 24. | Ďuratný Miloslav | | 4,50 | 5,00 | 1,50 | 0,50 | 0,70 | 1 | 10,30 | 21,00 |
| 25. | Kögler Pavol | G Galanta | 4,00 | 2,50 | 2,00 | 4,00 | 1,00 | - | 7,70 | 20,20 |
| | Valová Simona | G Piešťany | - | 5,00 | 1,70 | 2,50 | 1,00 | - | 10,00 | 20,20 |
| 27. | Faguľová Kristína | G KE Poštová | 3,00 | 5,00 | 2,50 | 2,00 | 0,95 | - | 6,80 | 19,30 |
| | Kubinová Mária | G POH, Dolný Kubín | - | 5,00 | 2,30 | 2,00 | - | - | 10,00 | 19,30 |
| 29. | Pálenik Juraj | ŠPMNDAG | - | 5,00 | 3,30 | - | 1,00 | - | 7,50 | 16,80 |
| 30. | Mikulaj Pavol | | 3,50 | 4,80 | - | 1,00 | 0,95 | - | 6,20 | 16,45 |
| 31. | Chudá Tatiana | G Piešťany | - | 5,00 | 1,20 | 2,00 | 0,50 | - | 6,00 | 14,70 |
| 32. | Dobrotka Matúš | G BN Bánovce | 2,50 | 0,20 | 0,70 | 1,00 | 1,00 | - | 6,20 | 11,40 |
| 33. | Makara Ján | GPH Michalovce | - | - | - | - | - | - | 10,70 | 10,70 |
| 34. | Kyjaková Katarína | G ZA Okružná | 2,50 | 0,20 | 0,60 | 1,00 | 0,70 | - | 5,70 | 10,50 |
| 35. | Mrázová Lucia | GPH Michalovce | - | - | - | 5,00 | 1,00 | - | 4,20 | 10,20 |
| 36. | Fecková Daniela | G BA Pankúchova | 4,00 | - | - | - | - | - | 6,00 | 10,00 |
| 37. | Klembarová Barbora | OG Kukučínova Poprad | - | - | - | - | - | - | 9,00 | 9,00 |
| 38. | Valigová Zuzana | GPH Michalovce | 1,00 | - | 0,40 | 2,50 | 0,95 | - | 2,80 | 7,65 |
| 39. | Erdödyová Lívia | GPH Michalovce | - | 2,50 | - | 3,50 | - | - | 1,50 | 7,50 |
| 40. | Chlapečka Adam | G Ľ. Štúra Trenčín | - | - | - | - | - | - | 6,70 | 6,70 |
| | Kmeťová Katarína | OG Kukučínova Poprad | - | - | - | - | - | - | 6,70 | 6,70 |
| 42. | Čurmová Jaroslava | GPH Michalovce | 5,00 | 5,00 | - | - | - | - | 1,60 | 6,60 |
| 43. | Marečáková Barbora | OG Kukučínova Poprad | - | - | - | - | - | - | 6,50 | 6,50 |
| 44. | Čurmová Zuzana | GPH Michalovce | - | - | - | - | - | - | 3,50 | 3,50 |
| 45. | Šturc Peter | G AV Levice | - | - | - | - | - | - | 3,20 | 3,20 |
| 46. | Dzurjová Silvia | GPH Michalovce | - | - | - | - | 0,75 | - | 1,00 | 1,75 |
| 47. | Bohiniková Alžbeta | G BA Grösslingova | - | - | - | - | - | - | 1,50 | 1,50 |
| 48. | Masár Juraj | G Bilíkova | - | - | - | - | - | - | 1,00 | 1,00 |
| 49. | Maliková Lucia | ZŠsMŠ Liptovská Teplička | - | - | - | - | - | - | 0,00 | 0,00 |