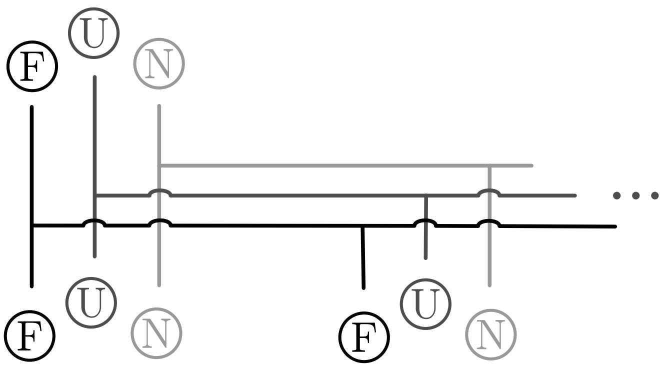
Fyzikálny korešpondenčný seminár
25. ročník, 2009/2010
FKS, KTFDF FMFI UK, Mlynská dolina, 84248 Bratislava
e-mail: otazky@fks.sk web: http://fks.sk

Vzorové riešenia 3. kola letnej časti 2009/2010

3.1 Predlžovačka (opravovala Tina, vzorák Filip)

Navrhnite zapojenie, ktoré bude spĺňať funkciu predlžovačky (resp. rozvetvovačky). Chceme teda od vás, aby ste navrhli vnútro zariadenia, ktoré sa na mieste A strčí do elektrickej siete a na mieste B nám sprostredkuje niekoľko nezávislých zástrčiek, do ktorých môžme zapojiť ďalšie spotrebiče.

Pointa celej rozvetvovačky je vo vedení elektrického prúdu. Návrh a dizajn plastového obalu je preto vedľajší.[1] Jediná úloha je teda pospájať vodičmi vstup a všetky výstupy. Treba si však uvedomiť, že kolík a diery sú iné – jedným vodičom teda môžeme spojiť len fázy (vľavo), druhým nuláky (vpravo) a tretí vodič poslúži na pospájanie horných kolíkov(uzemnenia). Kuk obrázok.



Obr. 1: Pospájanie vodičmi

3.2 Prejdené kilometre (opravoval Robo, vzorák Jakub)

Poli bol zvedavý, koľko toho cez víkend vlastne nabehal. Požičal si preto auto s tachometrom a počítadlom najazdených kilometrov a začal jazdiť dookola po okruhu, ktorý normálne behává. Pri prejazde štartom si Poli zapisoval hodnotu na počítadle pred desatinnou čiarkou. Vlastne nie tak celkom. Nakoľko bol lenivý, tak si zapisoval iba posledné 2 cifry. V zápiskoch sme mu našli tieto čísla:

$$53, 55, 56, 58, 59, 61, 63, 64, 66, 67$$

Hodnoty teda udávajú posledné 2 celočíselné cifry na počítadle (nejde teda o zaokrúhlené údaje podľa platných pravidiel o zaokrúhlovaní podľa cifier za desatinnou čiarkou, lež cifry za desatinnou čiarkou boli surovo useknuté). Čo z týchto hodnôt vie Poli usúdiť o dĺžke okruhu?

[1] Ale kto by nechcel mať rozvetvovačku v tvare kačky?

Seminár podporujú:
iuVenta APVV

Polačko je síce veľký športovec, ale určite nebeháva okruh dĺžky cez 100 km. To, že v zápiskoch sa nenachádzajú cifry na mieste stoviek kilometrov, nás teda nepripravilo o žiadnu podstatnú informáciu.

Pozrime sa na dvojicu čísel 53, 55. Čo z toho vieme usúdiť? Polačko prešiel jeden okruh a jeho dĺžka je aspoň 1 km a najviac 3 km. To preto, lebo skutočná prvá hodnota na tachometri mohla byť číslo od 53,000 km až po 53,999… km a podobne druhá je číslo v rozmedzí od 55,000 km do 55,999… km. Takto vieme prezrieť každú jednu dvojicu susediacich čísel: rozdiely susediacich čísel sú buď jedna alebo dva, pričom tá jednotka mi hovorí, že okruh určite nebol dlhší ako 2 km a tá dvojka obmedzuje dĺžku okruhu zdola na aspoň 1 km.

Čo mi teraz povie trojica čísel 53, 55, 56? Rozdiel na tachometri za dva okruhy je rovný trojke, teda skutočná dĺžka dvoch okruhov je určite v rozmedzí dva až štyri kilometre (okruh má teda dĺžku niekde medzi 1 km a 2 km). Môžem prezrieť všetky trojice čísel, všímajúc si krajné hodnoty a zistím, že rozdiely na tachometri pre dva okruhy činia tri alebo štyri. Takže jeden okruh je určite dlhší ako $(4-1)/2$ km a kratší ako $(3+1)/2$ km.

A čo mi teraz povie štvorica čísel…? Začína to byť nudné, že? Takže všeobecne: keď Poli prešiel p okruhov a rozdiel na tachometri činí k, tak viem, že skutočná vzdialenosť, ktorú Poli prešiel, je celkom iste väčšia ako $(k-1)$ km a celkom iste menšia ako $(k+1)$ km. Spodné ohraničenie na dĺžku okruhu je $(k-1)/p$ km a horné ohraničenie je $(k+1)/p$ km.[2]

Ako vyťažiť maximum informácie z rady čísel, ktorú nám poskytlo zadanie? Jednoducho prejdeme každú dvojicu čísel (nielen susedných, ale každú), pozrieme aký je ich rozdiel a koľko okruhov pritom Poli najazdil a máme ohraničenia. Skutočná dĺžka okruhu musí byť v prieniku všetkých ohraničení. Takže najprísnejšie môžem dĺžku okruhu zdola ohraničiť najvyšším zo spodných ohraničení. Podobne, najprísnejšie ohraničenie zhora bude najnižšie z horných ohraničení.

Nasleduje tabuľka, ktorá sumarizuje dáta z dvojíc podľa počtu najazdených okruhov. Vidno z nej, že dĺžka okruhu je z intervalu $(1{,}500; 1{,}625)$ km.

	rozdiely na tachometri		**ohraničenie dĺžky okruhu**	
okruh p	min k	max K	min $(K-1)/p$	max $(k+1)/p$
1	1	2	1,000	2,000
2	3	4	1,500	2,000
3	4	5	1,333	1,667
4	6	7	1,500	1,750
5	8	8	1,400	1,800
6	9	10	1,500	1,667
7	11	11	1,429	1,714
8	12	13	1,500	1,625
9	14	14	1,444	1,667

Tab. 1: Výsledná tabuľka, všetky dĺžky sú v kilometroch

[2] Z toho vidíme, že pre veľké p je ohraničenie úzke. Spravidla dostaneme preto dobré ohraničenie práve pozretím na rozdiel na tachometri pre najväčší počet okruhov. No nie je to maximálna informácia, ktorú máme!

3.3 Vagóny na posunovacej stanici (opravovala Tinka)

Rozbehnuté vagóny sa hýbu na posunovacej stanici vo Vajnoroch pri Bratislave ako prízraky sem a nazad. Zoraďujú tam vlaky. Využívajú sa pritom rôzne naklonené roviny na rozbeh a zastavenie vagónov (plus nejaké posunovacie mašinky). Uvažujme spriahnuté vagóny rozbehnuté rýchlosťou v po rovine, ktorá sa však zrazu náhle mení na kopec so sklonom α. Akou rýchlosťou musia ísť tieto nebrzdené vagóny, aby aj posledný z nich celý vyšiel na šikminu? Súprava má dĺžku l a hmotnosť m.

Tento príklad nebol zďaleka z kategórie najťažších, ale bolo treba si dať pozor na argumentáciu, prečo je tento postup správny.

Poväčšinou ste zvolili prístup cez energie – rovinu ste považovali za nulovú hladinu potenciálnej energie a vlak má iba potenciálnu energiu $E_\mathrm{K} = 1/2\,mv^2$. Ak chceme čo najnižšiu rýchlosť, tak všetka táto energia sa musí premeniť na potenciálnu v okamihu, keď koniec vlaku začne vyliezať na naklonenú rovinu.

Potiaľto je to dobre. Ako ste teda pokračovali? Predpokladajme, že vlak je taký nejaký rovnomerný a teda má ťažisko v strede svojej dĺžky. Scvrknime ho celý do ťažiska a preskúmajme zmenu potenciálnej energie takéhoto niečoho. Z goniometrie vyplynie, že výška do ktorej vystúpi ťažisko je $h = 1/2\,l\sin\alpha$, čo keď dáme do vzorca pre potenciálnu energiu a porovnáme, dostaneme $\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mgl\sin\alpha$ a teda $v = \sqrt{gl\sin\alpha}$.

Asi sa teraz pýtate, čo je na tom zle. No nič. Inak by som to sem nedávala. Jediné, čo chýba je argumentácia, prečo nám stačí ťažisko. Lebo keby ste napríklad z oboch strán stláčali pružinu, tak tažisko sa hýbať nebude, ale zjavne pružine ako celku vzrastá potenciálna energia. Intuícia správne našepkáva, že pri pružine to predsa nezávisí od hmotnosti, čiže ťažisko asi nebude zaujímavé, kdežto tu áno…

Zoberme si taký úplne malý slížik z konca, aj zo začiatku vlaku, tak malý, že si povieme, že celý je v rovnakej výške a nech oba majú hmotnosti m_1. Prvý je v nulovej výške a druhý v maximálnej H. Teda tieto dva majú dokopy potenciálnu energiu $m_1g(0 + H)$, čo je rovnaké, ako keby oba boli vo výške $H/2$. Pokračujme v takomto rovnomernom slížikovaní vlaku. Pre slížik vo výške k zoberme rovnaký vo výške $H - k$, dokopy ich potenciálna energia bude $m_1g(k + H - k)$, čo je to isté ako… doplňte si sami.;-)

Teda pôvodný výsledok bol správny, len si ho bolo treba obhájiť. Aj keď to znelo ako príklad z Náboja, výsledok nestačí.

3.4 Bicykel (opravovala Halucinka)

Odmerajte moment zotrvačnosti predného kolesa na bicykli bez toho, aby ste museli koleso z bicykla odmontovať. Čo tento údaj hovorí o hmotnosti kolesa?

Keďže koleso nemôžeme odmontovať, tak to má dve stránky. Po prvé, nemôžeme ho stratiť, ale nemôžeme ho ani vážiť. Preto asi bude dobrý nápad ho roztočiť. Bolo by fajn vedieť akou silou ho roztáčame, preto ho roztočíme napríklad závažím. Pripevníme si na koleso špagát s dĺžkou l, po obvode ho na koleso namotáme a na druhý koniec pripevníme závažie hmotnosti m. Na závažie pôsobí gravitačná sila mg, toto však padá nadol so zrýchlením a a preto spôsobuje ťah v špagáte iba $m(g - a)$. Táto sila zároveň roztáča koleso. Teraz sa zamyslime nad momentom sily. Moment sily sa dá vyjadriť pomocou momentu zotrvačnosti: $M = I\epsilon$, kde ϵ je uhlové zrýchlenie kolesa a I je moment zotrvačnosti kolesa, ktorý chceme zrátať. Silou F pôsobíme na koleso vo vzdialenosti r od osi otáčania a navyše kolmo na polomer; preto $M = rF$. Vieme tiež, že $a = \epsilon r$, teda rovnicu upravíme:

$$I\epsilon = rF$$
$$I\epsilon = r(mg - ma)$$
$$I\epsilon = r(mg - mr\epsilon)$$
$$I = mr(\frac{g}{\epsilon} - r)$$

A máme ďalší problém. Hmotnosť závažia vieme, aj polomer aj g, ale nevieme ϵ. Ako zrátame uhlové zrýchlenie kolesa? Teraz znova prichádza na scénu náš špagát s dĺžkou l, na ktorom je zavesené závažie. Uhol, o ktorý sa otočí koleso za čas t vypočítame ako $\alpha = \frac{1}{2}\epsilon t^2$. Takisto vieme, že $\alpha = \frac{l}{r}$ a teda

$$\frac{1}{2}\epsilon = \frac{l}{r}$$
$$\epsilon = \frac{2l}{rt^2}$$

A keď ϵ dosadíme do prvej rovnice, tak získavame: $I = mr^2(\frac{gt^2}{2l} - 1)$ Čiže teraz nám stačí namerať čas, dĺžku špagátu, hmotnosť závažia a polomer kolesa a už to zrátame. Tak poďme na to: Môj skvelý bajk má $r = 0{,}34\,\mathrm{m}$, závažie som mala pol kilové, dĺžka špagatu bola $l = 3\,\mathrm{m}$ a čas som merala 10krát a to: 1,42 s; 1,44 s; 1,36 s; 1,33 s; 1,37 s; 1,48 s; 1,35 s; 1,41 s; 1,43 s; 1,46 s. Priemer z týchto hodnôt je 1,41 s. A teraz to všetko dosadíme do vzorca:

$$I = 0{,}5\,\mathrm{kg}(0{,}34\,\mathrm{m})^2(\frac{(9{,}81\,\mathrm{m\,s^{-2}}(1{,}41\,\mathrm{s})^2}{6\,\mathrm{m}} - 1)$$
$$I = 0{,}13\,\mathrm{kg\,m^2}$$

Tadaaa a máme výsledok. Ešte by sa patrilo povedať, ako veľmi je presný. Napríklad moj meter meral na milimetre presne, čo oproti nepresnosti merania času môžme rovno zanedbať.

Ešte sa zamyslíme nad tým, že moment zotrvačnosti ide napísať aj v tvare kMr^2. Kde k je nejaká konštanta, M je hmotnosť bicykla a r je jeho polomer. Ak k je 1, potom všetka hmotnosť kolesa by musela byť uložená na obvode, ale to tak nie je, tak k musí byť menšie. Čiže o hmotnosti kolesa vieme povedať to, že je väčšia ako $\frac{I}{r^2} = 1{,}12\,\mathrm{kg}$.

Komentár: Veľa z vás to poňalo ako teoretickú úlohu a povedali si, že koleso je dutý valec a vygooglili vzťah preň. Bohužiaľ už zadanie napovedalo svojím prvým slovíčkom, že to je experimentálka. A tí čo ste to merali, ste to mali poväčšinou dobre, pokiaľ ste nespravili nejakú hlúpu chybu. A na záver vám poviem ešte príhodu. Keď som merala ja svoje hodnoty, tak som na to potrebovala nejaký vysoký múrik, odkiaľ zhodím závažie pripevnené o koleso. Konečne som taký našla a vytrepala som naň bicykel a privezujem závažie (fľašku) o predné koleso, keď sa zastaví taký starší párik pri mne a pýtajú sa čo robím. Ja im na to, že meriam moment zotrvačnosti kolesa. A človek by čakal, že sa teraz na mňa pozrú s pohľadom „Ty si trt, či čo?“, ale ten chlap sa zamyslel a potom mi povedal, že mi pomôže, že chápe ako to robím. A nakoniec som zistila, že to je nejaký fyzik zo SAVky:-).

3.5 Ekodom (opravoval Marcel)

Jakubova teta Euália býva v rodinnom dome. V zime chce mať doma príjemných $20\,°\mathrm{C}$ pričom vonku je (pre jednoduchosť) konštantných $0\,°\mathrm{C}$. Aby teta vykúrila svoj dom, potrebuje kúriť s výkonom $5\,\mathrm{kWh}$.

a) Koľko peňazí vynaloží teta na kúrenie za jeden zimný mesiac, ak na vykurovanie používa elektrickú energiu pri štandardnej sadzbe za $1\,\mathrm{kWh}$?

b) Jakub poradil tete, nech dom zvonka zateplí niečím dobre izolačným. Po tom, ako teta zateplila dom, klesol potrebný vykurovací výkon na $2\,\mathrm{kWh}$. Aká teplota je v mieste medzi múrom domu a pridanou izoláciou?

Aby sme mohli úlohu riešiť, treba si spraviť jasno v tom, ako tečie teplo cez predmety. Teplo vždy tečie z miesta s vyššou teplotou do miesta s nižšou teplotou a množstvo pretečeného tepla za čas je priamo úmerné rozdielu teplôt medzi oboma miestami. Presná hodnota závisí od vlastností materiálu, cez ktorý teplo tečie, jeho rozmerov, atď… Z tohto vyplýva, že tepelný výkon, ktorý z domu uniká, sa dá napísať ako: $C(T_\mathrm{in} - T_\mathrm{out})$, kde $T_\mathrm{in}, T_\mathrm{out}$ sú teplota vonku, teplota vnútri a C je koštanta popisujúca izolačné vlastnosti tetinho domu pred zateplením. Keďže v dome si teta udržiava konštantnú teplotu, unikajúci výkon sa musí rovnať výkonu, ktorým kúri, teda $P_1 = 5\,\mathrm{kW}$. Využitím tohto faktu vieme konštantu C vyjadriť ako:

$$C = \frac{P_1}{T_\mathrm{in} - T_\mathrm{out}}\,.$$

Pozrime sa teraz, čo sa stane, keď pridáme izoláciu. Medzi múrom a izoláciou bude teplota T_mid a unikajúci tepelný výkon z domu bude: $C(T_\mathrm{in} - T_\mathrm{mid})$. Dostávame rovnosť:

$$P_2 = C(T_\mathrm{in} - T_\mathrm{mid})\,,$$

ak ďalej dosadíme vyjadrenie pre C, dostávame:

$$T_\mathrm{in} - \frac{P_2}{P_1}(T_\mathrm{in} - T_\mathrm{out}) = T_\mathrm{mid}\,,$$

čo je hľadaná teplota.

Číselne: $T_\mathrm{mid} \approx 12\,°\mathrm{C}$.

Všimnite si, že na vyjadrenie výkonu v druhom prípade nám stačil rozdiel teplôt dnu a na rozhraní izolácia – múr. Je tiež dobré si uvedomiť, že unikajúci tepelný výkon ktorý, prechádza múrom je rovnaký, ako tepelný výkon tečúci cez izoláciu.

3.6 Stavebnica (opravoval Bzdušo)

Bzdušo dostal na Vianoce od Kaji elektrickú stavebnicu. Hneď si vyhliadol 10 svoriek. Len čo si spočítal, že medzi týmito svorkami môže umiestniť $\binom{10}{2} = 45$ rezistorov tak, aby žiadne dva nespájali rovnaké svorky, už aj začal zapájať. Aby bola schéma pekná, povedal si Bzdušo, že medzi svorkami s poradovými číslami i, j zapojí rezistor, ktorého odpor je číselne rovný menšiemu z čísel i, j. Aký je celkový odpor v Bzdušovej schéme medzi svorkami číslo 4 a 5? Úlohu netreba riešit úplne presne, postačí nám aj približný výsledok. Pri riešení si môžete pomôcť ľubovolnou výpočtovou technikou.

Čaute decká. Skôr než začnem písať vzorák, dovolím si jeden svedomiespytujúci komentár. Táto úloha vás očividne zaskočila, inak by som neopravoval len 5 riešení. Súhlasím s tým, že na fksácke zvyklosti bola dosť neštandardná. Vedúci FKS sú však dobrácke bytosti, ktoré dobre vedia, ze v živote platí „*Výpočtová technika – najlepší priateľ človeka!*“ Svet nie je len o štandardizovaných úlohách na dosádzanie do vzorcov. O numeriku sa budete v budúcnosti s veľkou pravdepodobnosťou priam potkýnať a čím dlhšie sa budete numerickým problémom vyhýbať, tým väčšiu paseku z toho neskôr budete mať. Takto to je. Toľko môj nárek nad počtom riešení a kto nesúhlasí, nech mu ruka odpadne.

Ak chceme zistiť odpor schémy, je vhodné predstaviť si na nej napojený zdroj U. Keď sa nám podarí spočítať, aký prúd I schémou prechádza, odpor dopočítame jednoducho ako $R = U/I$. V škole nás naučili, že prúd I nájdeme pomocou dvoch Kirchhoffových zákonov pre uzly a slučky.

V našom obvode máme 10 svoriek (uzlov), a päťsto šesťsto slučiek. Každá jedna z nich poskytuje jednu z rovníc, v ktorých vystupuje dovedna 10 potenciálov, $\binom{10}{2}$ prúdov na odporoch a celkový prúd I v obvode. Neznámych jak svinstva na hnoji… Skôr než si začnete zaväzovať slučku z povrazu vás ubezpečujem, že taďiaľto sa uberať naozaj *nejdeme*.

Ukážeme si trik, ako rapídne znížiť počet rovníc i neznámych. Označme potenciál na i-tej svorke ako φ_i a odpor medzi svorkami i, j ako R_{ij}, pričom zo zadania vieme $R_{ij} = \min(i, j)$.[3] Z Ohmovho zákona vieme, že prúd pretekajúci cez tento odpor zo svorky i do svorky j je rovný[4]

$$I_{ij} = \frac{\varphi_i - \varphi_j}{R_{ij}},$$

Toto možno dosadiť do Kirchhoffovho zákona pre uzly, čím dostávame

$$0 = \sum_{j\neq i} I_{ij} = \sum_{j\neq i} \frac{\varphi_i - \varphi_j}{R_{ij}}, \qquad (\heartsuit)$$

Touto úpravou sme z rovníc vylúčili prúdy na jednotlivých odporoch.

Pozor však! Posledná rovnica neplatí pre svorky 4 a 5. Tie sú totiž okrem odporu spojené aj zdrojom, povedzme s napätím 1 V. Vďaka tomu môžeme potenciál v týchto bodoch fixovať na hodnotách napr. 1 a 0. Zostáva nám teda 8 rovníc a 8 neznámych. Tie možno zapísať ako maticu a vybúšiť pomocou GEM,[5] čo dokáže robiť aj Excel[6] alebo náhodný voľne šíriteľný program na internete.[7]

Získaná sada rovníc sa dá efektívne riešiť aj inak. Zafixujme $\varphi_4 = 1, \varphi_5 = 0$ a pre ostatné svorky nechajme v každom kroku zbehnúť iteráciu

$$\varphi_i := \left(\sum_{j\neq i} \frac{\varphi_j}{R_{ij}}\right) \Big/ \left(\sum_{j\neq i} \frac{1}{R_{ij}}\right),$$

čo je vlastne obrátenie vzťahu ($\heartsuit$). Po chvíľke iterovania sa hodnoty potenciálov ustália podobným spôsobom, ako sa v prírode ustáľujú teploty telies v tepelnom kontakte.[8]

[3] Odpor je v jednotkách SI. Jednotky veličín budem vynechávať v celom riešení.

[4] Pripomeňme si, že prúd tešie do miest s menším potenciálom. Smer je tu *dôležitý* – rozhoduje o znamienku. Očividne platí $I_{ij} = -I_{ji}$ na rozdiel od vzťahu pre odpory $R_{ij} = R_{ji}$.

[5] Gaussova Eliminačná Metóda.

[6] `http://www.mccd.edu/faculty/powerd/Exc_GJ.htm`

[7] `http://smnd.sk/mikey/gausovka.php`

[8] Autor nie je pod vplyvom omamných látok, istá analógia tu skutočne je.

Keď poznáme všetky potenciály, odpor už určíme jednoducho. Najprv zapíšeme celkový prúd pretekajúci schémou ako

$$I = \sum_{j \neq 4} I_{4j} = \sum_{j \neq 4} \frac{1 - \varphi_j}{R_{4j}} \approx 1{,}726$$

a pre odpor schémy máme jednoducho $R = U/I \approx 0{,}579$. Toť fsio. Úloha sa samozrejme dala riešiť aj inými metódami.

Štatistika vašich riešení je nasledovná. Z piatich riešiteľov dvaja na vyriešenie rovníc využili Pascal, resp. C++. Ďalší dvaja použili vygooglený program na GEM. Syseľ chcel použiť excel, ale z technických príčin riešenie doklepol v Open Office. Ja som rovnice vyriešil v Matlabe. Možností bolo veľa, stačilo si len vybrať.

Poznámka: Hodnoty potenciálov na svorkách majú hodnoty

```
0.5183, 0.5183, 0.5183, 1.0000, 0.0000,
0.5257, 0.5257, 0.5257, 0.5257, 0.5257.
```

Dokážete prísť na to, prečo je na svorkách 1 až 3, resp. 6 až 10 potenciál rovnaký? Kto na to príde ako prvý, má u mňa kompót!

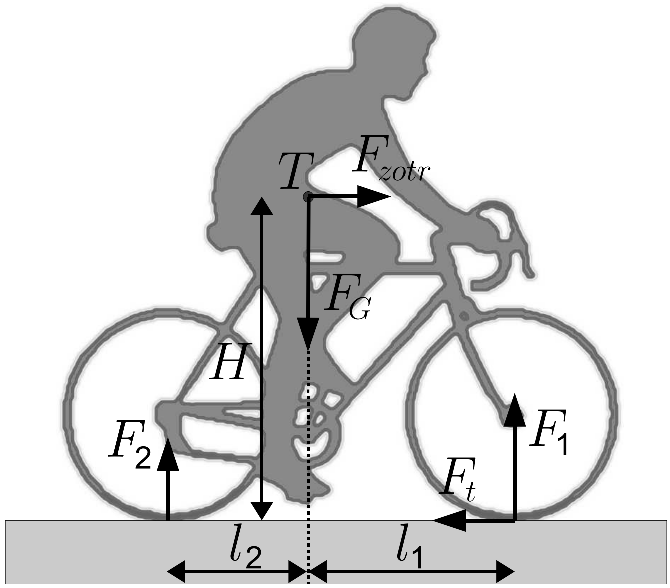
3.7 Bicykel ešte raz (opravoval Poli, vzorák Jakub)

Je známe, že prednou brzdou brzdíme na bicykli oveľa efektívnejšie ako zadnou. Rozdiel je markantný, pri drsnejších gumách hrozí dokonca „preletenie“ cyklistu cez riaditká. Prečo je to tak? Zvoľte si nejaký rozumný model bicykla a porátajte, koľkokrát efektívnejšie je brzdenie prednou brzdou. Predpokladajte, že konštrukcia břzd je vpredu aj vzadu úplne rovnaká.

Prečo vlastne funguje predná brzda lepšie? To je ľahké. Všimnime si momenty síl na obrázku nižšie: trecia sila, nech je na ktoromkoľvek kolese, sa snaží otočiť bicykel okolo predného kolesa (povedané veľmi laicky) – a teda zvyšuje zaťaženie predného kolesa (na ktorom môže následne byť väčšie trenie) a súčasne odľahčuje zadné koleso (ktoré stratou prítlaku nemôže tak účinne brzdiť). Toľko na úvod a ďalej už niečo aj porátame.

Podľa hesla „v jednoduchosti je krása“ si zvolíme aj my model najjednoduchší z možných rozumných. Budem teda uvažovať, že cyklista sa na svojom stroji *nemrví*, t.j. jeho ťažisko sa nehýbe vzhľadom na bicykel. Ďalej budeme považovať jazdca za rozumného, teda takého, ktorý sa nechce prekotiť – presnejšie takého, ktorý celkom určite chce ostať oboma kolesami na vozovke. Rozoberieme iba brzdenie na vodorovnej rovine, naklonenú rovinu prenecháme fajnšmekrom. Ďalej si všimneme, že kolesá majú oproti jazdcovi a zvyšku bicykla malú hmotnosť a tak si povieme, že otáčavý pohyb týchto kolies by nemal veľmi zavážiť… Takže budeme považovať bicykel aj s jazdcom za tuhé teleso, ktoré má ťažisko vo výške H, a vodorovnú vzdialenosť od kolies l_1, l_2, viď obr.[9] Budem tiež používať veličinu $l = l_1 + l_2$. Koeficient trenia medzi pneumatikou a cestou označím f.

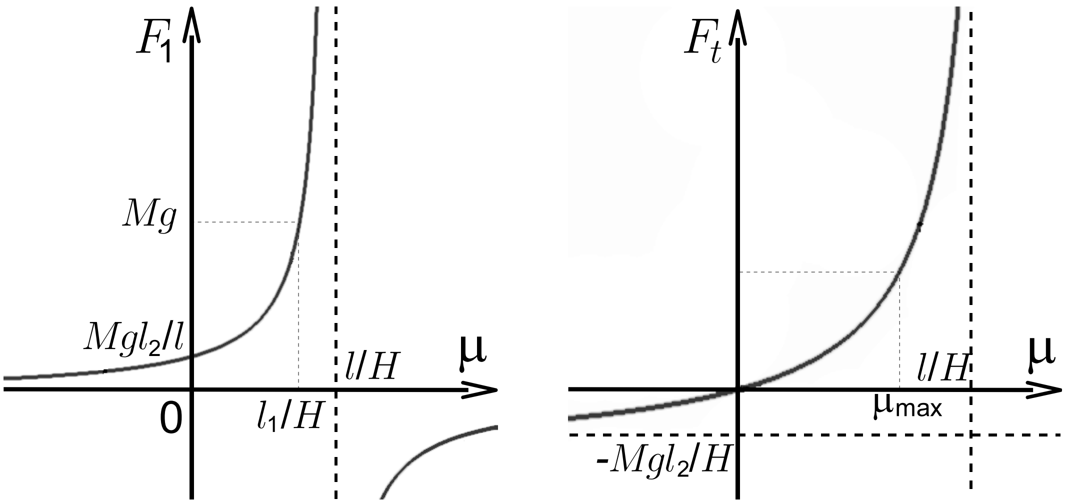
[9]Treba si uvedomiť, že keď otáčavý pohyb kolies zanedbávam, tak im prisudzujem nulový moment hybnosti po celý čas brzdenia. Potom sa na nich nesmie strácať žiaden moment sily a teda sily pôsobiace na koleso môžem uvažovať ako efektívne pôsobiace priamo na tuhé teleso bicykla. Komu sa toto nepáči, môže uvažovať aj sily v oskách + silu brzdy, pričom sa musí postarať, aby moment sily pôsobiaci na každé z kolies (najmä to brzdené) bol nulový.



Obr. 2: Nakres sil

Ideme zriešiť úlohu o maximálnom spomalení pri brzdení prednou brzdou. Vidíme, že aby ťažisko ostávalo v rovnakej výške, tak musí platiť $F_2 = Mg - F_1$. Tiež musí platiť rovnica pre rovnosť momentov síl (ako vzťažný bod som si vybral ťažisko), $HF_t + l_2F_2 = l_1F_1$. Zavediem ešte koeficient μ tak, že platí $F_t = \mu F_1$. Je to teda niečo ako „využívaný" koeficient trenia, a zrejme musí platiť $0 \leq \mu \leq f$. Keď spojím opísané 3 rovnice, tak viem vyjadriť veľkosť normálovej sily F_1 a aj F_t

$$F_1 = \frac{Mgl_2}{l - H\mu}\,, \qquad F_t = \frac{Mgl_2\mu}{l - H\mu} = -\frac{Mgl_2}{H} + \frac{Mgll_2}{H(l - H\mu)}.$$



Obr. 3: Graficka analyza zavislosti

Graf F_1 od μ je hyperbola (viď obr.). Keď si uvedomíme, že fyzikálne prípustné riešenie je iba také, kde $0 \leq F_1 \leq Mg$, tak vidíme, že treba splniť podmienku pre koeficient $\mu \leq \frac{l_1}{H}$; inak by sa bicykel začal prekacovať. Takže horné ohraničenie koeficientu μ je $\mu_{\max} \overset{\text{ozn.}}{=} \min\left\{f,\ \frac{l_1}{H}\right\}$. Graf F_t od μ je tiež hyperbola a z jeho priebehu ľahko odčítame, že maximálne spomalenie dosiahnuteľné prednou brzdou je pri obmedzení $\mu \leq \mu_{\max}$ rovné

$$a_{\text{predná}} = \frac{l_2\mu_{\max}}{l - H\mu_{\max}}\, g.$$

Pre odvodenie maximálneho spomalenia pri použití zadnej brzdy postupujeme úplne analogicky, len v obrázku si treciu silu nakreslíme ku zadnému kolesu. Opäť musí platiť $F_1 + F_2 = Mg$. Zavedieme koeficient „využívaného“ trenia $\mu = \frac{F_t}{F_2}$. Zapíšeme rovnosť momentov síl, $l_1F_1 = (H\mu + l_2)F_2$. Dostanem závislosť síl F_2 a F_t od μ v tvare

$$F_2 = \frac{Mgl_1}{l + H\mu}\,, \qquad F_t = \frac{Mgl_1\mu}{l + H\mu} = \frac{Mgl_1}{H} - \frac{Mgll_1}{H(l + H\mu)},$$

čo sú tiež hyperboly (odporúčam nakresliť). Tentokrát sila F_2 s rastúcim μ klesá (ako sme očakávali) – teda jediné horné obmedzenie pre μ je hodnota koeficientu trenia f. Maximálne spomalenie je

$$a_{\text{zadná}} = \frac{l_1 f}{l + Hf}\, g,$$

čo možno ľahko odčítať z grafu F_t od μ.

Takže pomer maximálnych spomalení pre prípad, že nemožno preletieť pri brzdení prednou brzdou je rovný $\frac{l_2}{l_1}\frac{l+Hf}{l-Hf}$. V opačnom prípade je pomer rovný $\frac{l_2}{Hf}\frac{l+Hf}{l-Hf}$. Môj odhad jednotlivých veličín činí: $H = 103\,\text{cm}$, $l_1 = 64\,\text{cm}$, $l_2 = 45\,\text{cm}$, $f = 0{,}7$. Pre tieto hodnoty sa realizuje možnosť, kde možno preletieť cez korman a pomer maximálnych spomalení vyjde zhruba 3. Nemyslite si, že ak použijete obidve brzdy, tak dosiahnete väčšie spomalenie![10]

Poznámky pre fajnšmekrov: úlohu je možné riešiť aj v iných priblíženiach, napríklad sa dá zahrnúť aj otáčanie jednotlivých kolies. Tak napr. sa dá počítať taká úloha, že brzdíme zadnou brzdou tak tuho, že zadné koleso stojí a flekuje. Predným kolesom nebrzdím a to neprešmykuje. V takomto prípade pôsobí trecia sila aj na predné koleso a to smerom dopredu (nakreslite si to a premyslite)! Dá sa dopočítať, že potom vyjde maximálne spomalenie takto

$$a_{\text{zadná,šmyk}} = \frac{fgl_1}{\frac{M}{M-m}(l + Hf) + \frac{J}{(M-m)R^2}(l + Rf) - \frac{m}{M-m}(H - R)f},$$

kde R je polomer kolies, J je ich moment zotrvačnosti, m je ich hmotnosť a M je celková hmotnosť celého bicykla aj s cyklistom. Keď si uvedomíme, že $J \leq mR^2$, tak vidíme, že členy navyše oproti predošlému výpočtu sú rádu $\frac{m}{M}$, teda malé.

Môžeme riešiť ešte o málo komplikovanejší problém: brzdíme zadnou, avšak zadné koleso neprešmykuje. Rovnako ani predné neprešmykuje. Tu musíme zvážiť aj polomer od osky k brzde – ja som ho položil rovný priamo R. Zadné koleso potom na rám bicykla s cyklistom pôsobí cez tú brzdu a cez osku kolesa (predné iba cez osku). Neznámych je tu už pomerne veľa, ale všetky vyriešime, ak zapíšeme rovnice pre posuvný a rotačný pohyb oboch kolies a rámu bicykla s človekom. Pre spomalenie dostaneme výraz

$$a_{\text{zadná,nešmyk}} = \frac{fgl_1 + fgl_2\frac{m}{M-m}}{l + Hf - \frac{J}{(M-m)R^2}(l + 2Rf) - \frac{2m}{M-m}(H - R)f}.$$

[10] Je ľahké si premyslieť, že maximálne spomalenie sa dá dosiahnuť použitím samotnej prednej brzdy.

Posledné 2 odstavce nemajú byť odstrašením, ale povzbudením skúsiť si zriešiť aj takýto komplikovanejší problém, ktorý je ešte stále jednoducho riešiteľný systém lineárnych rovníc (a teda sa nedá očakávať FX-úloha Bicykel II v tomto duchu).