Fyzikálny korešpondenčný seminár
25. ročník, 2009/2010
FKS, KTFDF FMFI UK, Mlynská dolina, 84248 Bratislava
e-mail: otazky@fks.sk web: http://fks.sk

Vzorové riešenia 1. kola zimnej časti 2009/2010

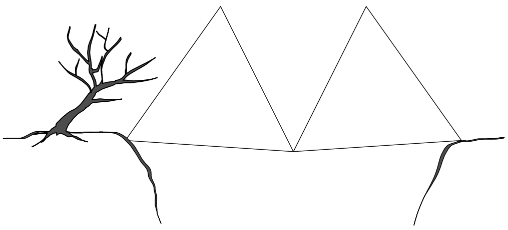
1.1 Most (vzorák Marcelka, opravovala Tinka)

Kubus bol cez prázdniny v Čiernej Hore. Okrem toho, že krajina vôbec nevyzerala čierna, ho zaujali železnice, ktoré musia v Čiernej Hore zápasiť s hlbokými kaňonmi križujúcimi túto obrovskú náhornú plošinu. Jeden z mostov, ktorý Kubus videl, vyzeral takto: Všetky tyče z ktorých je most postavený majú rovnakú dĺžku a na koncoch sú upevnené v kĺboch, ktoré tyčiam nebránia otáčať sa. Najľavší a najpravší bod konštrukcie je položený na zemi. Pozrime sa na najvrchnejšiu vodorovnú tyč mosta.

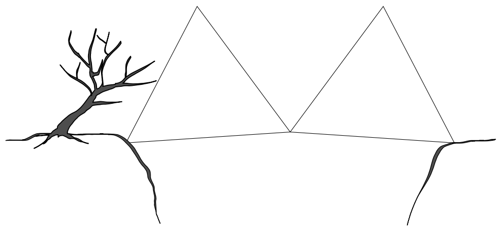
a) (5 bodov) Bude kvôli tiaži vlaku a samotného mosta naťahovaná alebo stláčaná?

b) (4 body) Nakreslite, ako sa zhruba zdeformuje most, ak túto tyč odstránime.

Najprv si rozmyslíme odpoveď časti b). Keď odstránime hornú tyč, dovolíme zvyšným trojuholníkom trochu sa pootočiť – môže teda nastať jeden z nasledovných dvoch prípadov:



Obr. 1: Prehnutie dole



Obr. 2: Prehnutie hore

Nič iné sa s konštrukciou diať nemôže: tyče sú z veľmi tuhého materiálu a dá sa predpokladať, že svoju dĺžku zmenia iba trochu. Stačí teda rozhodnúť, ktorý z dvoch nakreslených prípadov nastane. Správna odpoveď je ten prvý. Dôvodom je, že veci zvyknú sami od seba padať dole – keď zotnete strom, spadne; keď pustíte lotičku, spadne … Vo fyzike sa preto hovorí, že „sústava sa snaží zaujať stav s čo najnižšou potenciálnou energiou“ alebo „sústava sa snaží mať svoje ťažisko čo najnižšie“. Všimnime si, že v prvom prípade sa ťažiská trojuholníkov a tiež vlaku pohnú o kúsok nadol, v druhom prípade o kúsok nahor. Most sa zdeformuje preto tak, ako na prvom obrázku. Ak neveríte, môžte sa o tom presvedčiť napríklad tak, že si zo špajdlí a lepiacej pásky takú konštrukciu postavíte a skúsite do stredu niečo zavesiť.

Po vyriešení časti b) je už jednoduché odpovedať na otázku z časti a). Už vieme, že po odstránení vrchnej tyče sa trojuholníky pootočia smerom k sebe. To spôsobí, že sa vzdialenosť ich horných vrcholov zmenší. Vrchná tyč je preto stláčaná.

1.2 Kladky (opravoval Marek)

Pozrite sa na sústavu kladky + páka na obrázku. Je možné pomocou takéhoto zariadenia zdvihnúť človekom osobný automobil? Automobil váži 1 600 kg, človek dokáže ťahať lano silou najviac 600 N. Zľava je na páku

Seminár podporujú:

lano priviazané vo vzdialenosti 20 cm od osi otáčania, sprava 100 cm. Pokiaľ neviete s touto úlohou pohnúť, na našej stránke (`http://fks.sk`) nájdete krátky učebný text, ktorého prečítanie vám môže pri riešení úlohy pomôcť.

Najskôr si vyskúšame, či by vôbec náš človek auto udržal, keby už bolo zdvihnuté. Auto váži 1 600 kg, takže gravitácia na neho pôsobí silou $F_g = mg = 1600\,\mathrm{kg} \cdot 10\,\mathrm{N/kg} = 16\,000\,\mathrm{N}$. Touto silou pôsobí aj automobil na kladkostroj, na ktorom visí. Ten sa skladá len z jednej voľnej a jednej pevnej kladky. Auto je zavesené na dvoch lanách. Každé z nich je teda napínané silou $F_1 = F_g/2 = 8\,000\,\mathrm{N}$ a touto silou aj pôsobí na ľavú stranu páky. Teraz použijeme momentovú vetu:

$$M_1 = M_2$$

$$F_1 r_1 = F_2 r_2$$

$$F_2 = F_1 r_1 / r_2 = 8\,000 \cdot 20/100 = 1\,600\,\mathrm{N}$$

Takže pravá strana páky pôsobí na lano silou $F_2 = 1\,600\,\mathrm{N}$ a keďže pevná kladka, ktorá nasleduje, mení len smer sily, je to aj sila ktorou musí ťahať náš človek aby auto udržal. Ten však dokáže vyvinúť silu len 600 N, takže auto neudrží. Teraz sa dúfam zhodneme, že ak auto ani neudrží, tak ho ani nezdvihne.

Toto je bežný postup ako riešiť túto úlohu. Dvaja riešitelia, konkrétne Marián Horňák a Matej Balog, prišili však s iným riešením, ktoré je tiež dobré a ja by som vás o neho nerád pripravil. Tu je:

Čo sa stane ak ujo potiahne lano smerom dole o dĺžku Δd (ktorá je nekonečne malá)? Lano zdvihne koniec páky o výšku Δd. Druhý koniec páky je päťkrát bližšie k osi otáčania ($100\,\mathrm{cm}/20\,\mathrm{cm} = 5$), preto klesne o $\Delta d/5$(vychádzam z podobnosti trojuholníkov) a o túto vzdialenosť stiahne aj lano na ňom upevnené. Keďže voľná kladka je zavesená na dvoch lanách, tak sa zdvihne o polovicu, čiže o $\Delta d/10$. Pretože jednoduchými strojmi sa práca nedá ušetriť, ak človek zdvíha silou F_c, vynaloží prácu W_c, tiažová sila pôsobiaca na auto je $F_g = m_g = 16\,000\,\mathrm{N}$ a potenciálna (polohová) energia auta sa zmení o ΔE_a, potom platí:

$$W_\mathrm{c} = \Delta E_\mathrm{a}$$

$$F_\mathrm{c} \cdot \Delta d = F_g \cdot \Delta d/10$$

$$F_\mathrm{c} = F_g/10 = 1\,600\,\mathrm{N}$$

Takže ujo by mal ťahať silou

$$F_\mathrm{c} = 1\,600\,\mathrm{N}$$

ale on dokáže iba 600 N, čiže auto nie je možné zdvihnúť.

1.3 Cukor (opravoval Polik)

Odmerajte, koľko oxidu uhličitého sa uvoľní z dvojlitrovej perlivej Budišky, keď do nej pridáme cukor (stačí menšie množstvo).

Čaute decká, osobitne pozdravujem tých, ktorí spôsobili počas experimentovania záplavy. Napriek tomu verím, že vo vás ostanú len príjemné zážitky z experimentovania. Apropo, keď už spomínam technickosť, práve v nej popri estetickej stránke spočívalo čaro úlohy. A síce šlo o to nájsť najvhodnejší spôsob, ako unikajúci oxid uhličitý, ktorý rozpúšťajúci sa cukor z Budišky vytláčal, odmerať (či už jeho hmotnosť, alebo objem). Väčšina z vás využila jeden z dvoch rozličných prístupov, ktoré si na nasledujúcich pár riadkoch podrobnejšie popíšeme.

Taakže, najjednoduchšou a zároveň najpresnejšou metódou je metóda (pracovne nazvaná) „otvor a odváž“. Odvážim si fľašu „v panenskom stave“ pred jej otvorením, odkrútim uzáver, vhodím kocky cukru, počkám, kým prebehne šumivá reakcia a fľašu opäť odvážim. Vzniknutý hmotnostný rozdiel, po zohľadnení hmotnosti vhodeného cukru, prehlásim za hmotnosť uniknutého CO_2. Limitom tejto metódy je možnosť zaobstarať si elektronické laboratórne váhy vážiace v rozsahu gramov až miligramov. Najčastejšie využívanou metódou bolo preto zachytávať unikajúci plyn do všakovakých nádob, odmerných valcov, balónikov, sáčkov, prezervatívov, plastových tašiek nemenovaných obchodných reťazcov a pod.: či už priamo alebo prostredníctvom sofistikovaného systému trubičiek.

Vaše namerané hodnoty boli rozptýlené v dosť veľkom intervale od 50 po 1 500 ml. Určite sa pýtate, prečo je tomu tak. Je to spôsobené tým, že na naše meranie vplýva množstvo rôznorodých vplyvov: teplota minerálky (vplýva na rozpustnosť CO_2 a cukru; čím vyššia teplota, tým nižšia rozpustnosť oxidu uhličitého), tlak (pod akým tlakom bola fľaša dosycovaná oxidom uhličitým), „vek“ minerálky (PET fľaša Budišky nie je „vzduchotesná“, ale má póry, cez ktoré CO_2 uniká), použitý zachytávací materiál (balón má iné mechanické vlastnosti ako prezervatív) a mnoho ďalších. To sú faktory, ktoré sú nezávislé od našej technickej zručnosti. Tento celý odsek sa v hantírke experimentátora nazýva „diskusia“, t.j. slovné pojednanie o javoch, ktoré vplývajú, prípadne môžu vplývať na nameranú (alebo z experimentálnych dát vypočítanú) hodnotu veličiny. Už sme sa teda dozvedeli, že sú okolnosti pri meraní, ktoré vieme ovplyvniť len minimálne. Čo však ovplyvniť vieme, sú odchýlky spôsobené tzv. chybami merania. Môže ísť napríklad o nepresnosť odčítania na stupnici meradla, únik plynu z nedokonalej meracej aparatúry, „jedinečnosť“ experimentálneho materiálu a všakovaké iné javy. Pri experimentálnych úlohách platí, že presnosť získaného výsledku sa zvyšuje s počtom urobených meraní a výsledok udávam ako priemernú hodnotu z jednotlivých meraní plus-mínus odchýlka (vypočítaná, alebo rozumne odhadnutá a zdôvodnená). Čo nás ešte môže interesovať, je hmotnosť uniknutého oxidu uhličitého. Použitím stavovej rovnice v tvare

$$pV = (m/M)RT$$

pri objeme zachyteného plynu $V = 1\,000\,\mathrm{ml}$ vychádza jeho hmotnosť na približne dva gramy. Môžeme teda s kľudným svedomím rezignovať na meranie dvadsaťročnými kuchynskými váhami.

1.4 Galiba (vzorák Tomáš a Petrík, opravovala Bea)

Fajo sa cez prázdniny na záhradke nudil a tak experimentoval. Zobral sud, ktorý mal na sebe plno malých dierok a napustil ho až po vrch vodou. Voda začala samozrejme hneď vytekať cez všetky možné dierky. Z ktorej dierky dostrekne voda čo najďalej? Sud je položený na vodorovnom povrchu a môžte predpokladať, že voda v sude klesá dosť pomaly. Z dierok strieka voda kolmo na povrch suda, povrchové javy ako aj viskozitu vody môžte zanedbať.

Fajo sa cez prázdniny na záhradke nudil a tak experimentoval. Zobral sud, ktorý mal na sebe plno malých dierok a napustil ho až po vrch vodou. Voda začala samozrejme hneď vytekať cez všetky možné dierky. Z ktorej dierky dostrekne voda čo najďalej? Sud je položený na vodorovnom povrchu a môžte predpokladať, že voda v sude klesá dosť pomaly. Z dierok strieka voda kolmo na povrch sudu, povrchové javy ako aj viskozitu vody môžte zanedbať.

No teda, to sa musí človek naozaj nudiť, aby vytvoril deravý sud. Ale fyzikálnej predstavivosti sa medze nekladú, však ako inak by už len mali vzniknúť také ľudstvu prospešné zverstvá ako vláčik, či žiarovka. Teraz máme práve my možnosť posunúť ľudstvo vpred, a to v disciplíne… Kde sa už len dá uplatniť výsledok tohto príkladu? Hádam len pri súťaži v cikaní na diaľku, i keď zatiaľ neviem ako. No nič, poďme na ten príklad. Asi by nám hneď na úvod mala napadnúť tá základná otázka: prečo voda vlastne zo sudu vyteká? Asi tam bude nejaký tlak, ktorý tlačí na hladinu a ktorý sa volá, ako všetci správne tušíme, hydrostatický. Na chvíľku zaváhame pri slove hydrostatický – voda predsa vyteká von a tým pádom aj voda obsiahnutá v sude sa pomaličky hýbe. My však zo zadania vieme, že tento pohyb môžeme zanedbať a tlak počítať pomocou vzorca pre statickú situáciu. Pre tlak teda máme:

$$p = \rho g(H - h)$$

kde ρ je hustota vody, g gravitačné zrýchlenie, H výška sudu a h výška dierky nad dnom. Predstavme si malý kúsok vody valcovitého tvaru (aby sa zmestil do dierky), ktorý je akurát vymršťovaný zo sudu. Okrem všadeprítomného atmoférického tlaku ho zvnútra tlačí tlak p. Pri vytečení tohto kúska vody, ktorého objem označíme V vykonal tento tlak prácu pV, ktorá sa premenila na kinetickú energiu vytečeného kúska vody. Ak označíme v výtokovú rýchlosť, máme teda:

$$pV = 1/2(\rho V)v^2$$

Dosadením za p do poslednej rovnice máme:[1]

$$v = \sqrt{2g(H - h)}$$

Existuje aj iný prístup k problému, ľudovo nazývaný energetický. Keď zo sudu vytečie kus vody, hladina vody kúsok klesne. Z energetického hľadiska sa nestalo nič iné, ako že kúsok vody z hladiny klesol na úroveň dierky.[2] Predstavíme si, ako taký kúsok vody o objeme V klesne z vrchu súdka k dierke, pritom prekoná zvislú dráhu $H - h$. A keďže celková energia sa nemá kde stratiť, môžeme si rovno napísať ZZME (zákon zachovania mechanickej energie):

$$\rho V v^2/2 = \rho V g(H - h)$$

Čo je presne to isté ako horeuvedený vzorec.

Rovnaký výsledok pre v by sme dostali aj tretím prístupom, to jest použitím Bernoulliho rovnice[3]. Zastavme sa na chvíľu pri vzorci pre v, ktorý sme práve odvodili. Pre $h = H$ je výtoková rýchlosť nulová, takže v dierke rovno pri vrchu sudu voda len tak bez entuziazmu padá k podstave do nulovej vzdialenosti. Pokiaľ je h rovné nule, voda síce strieka až sa obláčiky pary spolu s dúhou dvíhajú, avšak hneď, ako vyletí zo sudu, padne na zem, takže vzdialenosť je nulová. Maximum teda bude asi niekde medzi, a s touto informáciou sa zase môžeme posunúť o kúsok dopredu. Dostrek vody je

$$x = vt$$

kde t je čas, za ktorý prameň vody dopadne na zem voľným pádom (nezabúdajme, že pohyby vody v zvislom a vodorovnom smere sú na sebe nezávislé) a v je výtoková rýchlosť vody (je orientovaná vodorovne). Pre čas t máme:

$$h = gt^2/2$$

[1] práve sme odvodili čosi zvané Torricelliho vzorec, ktorý niektorí z vás vo svojich riešeniach použili. Inak Evangelista Torricelli bol velice chytrý chlapík, ktorý dávno pred veľkým Newtonom a jeho konceptom sily zmeral fikaným spôsobom atmosférický tlak

[2] Samozrejme, kúsok čo vytiekol spôsobil pokles inej časti vody v nádobe ako seba, nás však zaujíma celková energetická bilancia systému a vtedy je jedno, ako sa presne voda v sude mieša (a ktorá voda je ktorá), pokiaľ to robí dostatočne pomaly.

[3] čo je však trochu astrálna záležitosť aj pre mňa

Z čoho
$$t = \sqrt{2h/g}$$
Po scucnutí rovníc sa nám vynára konečný výraz:
$$x = \sqrt{4h(H-h)}$$
čo je vlastne závislosť vzdialenosti dostreku x od výšky dierky nad zemou h. Vzorec pod odmocninou je kvadratická funkcia veličiny h. Ak ju chceme maximalizovať, potrebujeme výraz trochu upraviť:
$$x = \sqrt{H^2 - (H-2h)^2}$$
Z takto upraveného vzorca hneď vidno, že vhodnou voľbou h môžeme prinajlepšom vynulovať druhý, odčítavajúci sa člen pod odmocninou. Toto sa stane vtedy, keď h bude rovné $H/2$ teda polovici výšky suda. Odtiaľto teda dostrekne voda najďalej, pokiaľ presne v strede nie je dierka, voda dostrekne najďalej z dierky ktorá je k stredu najbližšie. Pre dierku v strede je najdlhšia dĺžka dostreku $x = H$.

1.5 Klinec (opravovala Halucinka)

Klinec K sme zabili do steny S tak, že na jeho vytiahnutie je potrebné ho vyťahovať silou $F = 50\,\mathrm{N}$.

a) (7 bodov) Vytiahne sa klinec, ak zaň zavesíme špagát $\check{S}$ ktorý zapriahneme do konštrukcie ako na obrázku? Hmotnosť závažia je $3\,\mathrm{kg}$, hmotnosť tyče $2\,\mathrm{kg}$, v bode B je tyč kĺbovo upevnená v zvislej stene (môže sa okolo kĺbu voľne otáčať), dĺžka tyče je $1\,\mathrm{m}$ a vzdialenosť medzi bodomi B a C je $60\,\mathrm{cm}$. Tyč zviera so zvislou stenou uhol $30\,°$, špagát je vodorovný.

b) (2 body) Akou silou je namáhaný kĺb v bode B?

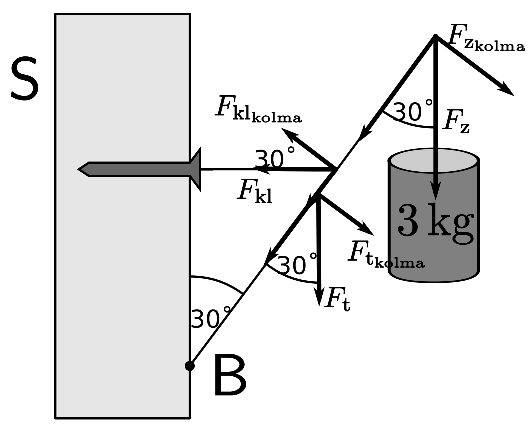
Na vytiahnutie klinca K potrebujeme silu $F = 50\,\mathrm{N}$. Skúsme si rovno porátať akou silou bude ťahaný klinec K v našej konštrukcii. Pokiaľ sa klinec nevyťahuje, tak je naša tyč so všetkými šamaninami na nej nehybná. To znamená, že všetky sily pôsobiace na tyč sú v rovnováhe. Ale o akých silách hovoríme?

(i) gravitačná sila tyče F_t, ktorá pôsobí v ťažisku tyče a je rovná $F_\mathrm{t} = M_\mathrm{t}g = 20\,\mathrm{N}$

(ii) gravitačná sila závažia F_z, ktorá je rovná $F_\mathrm{z} = M_\mathrm{z}g = 30\,\mathrm{N}$

(iii) sila klinca v stene pôsobiaca cez špagát na tyč F_kl

(iv) nejaka šamanská sila v kĺbe, ktorou sa budeme zaoberať neskôr



Obr. 3: Sily s nenulovým momentom na tyč

My chceme zrátať práve silu F_{kl}, teda akou silou pôsobí stena s klincom na tyč. Rovnakou silou, ale opačného smeru pôsobí tyč na klinec. Prečo sila F_{kl} vôbec existuje? Predstavme si, že by sila F_{kl} neexistovala. Potom by tyč v dôsledku svojej tiaže a tiaže závažia zaveseného na nej spadla dole. Lenže ona nepadá, lebo je pripevnená špagátom o stenu. Teda stena nejakou silou drží tyč, aby nespadla a to je práve naša sila F_{kl}. Silu F_{kl} vyrátame pomocou momentov síl, ktoré budeme rátať na bod B (je to veľmi príjemná a prirodzená voľba). Keďže sily pôsobiace na bod B majú „nulové rameno", tak nás ešte stále nezaujímajú. Sily F_{kl}, F_{t} aj F_{z} si rozložíme na dve na seba kolmé zložky: Zložka kolmá na tyč a zložka vodorovná na tyč (pozri obrázok). Vyjadríme si kolmé zložky síl na tyč:

$$
\begin{aligned}
F_{\mathrm{t}_{\mathrm{kolma}}} &= F_{\mathrm{t}} \sin 30\,^{\circ} \\
F_{\mathrm{z}_{\mathrm{kolma}}} &= F_{\mathrm{z}} \sin 30\,^{\circ} \\
F_{\mathrm{kl}_{\mathrm{kolma}}} &= F_{\mathrm{kl}} \sin 60\,^{\circ}
\end{aligned}
$$

Keďže sa tyč neotáča, tak momenty síl pôsobiacich na tyč musia byť tiež v rovnováhe, teda:[4]

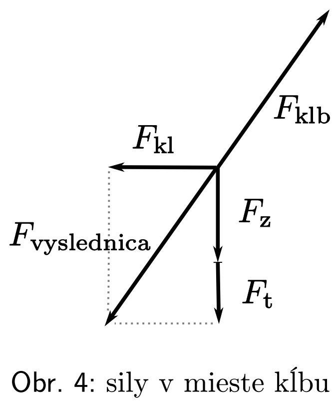
$$0{,}5\,\mathrm{m} \cdot F_{\mathrm{t}_{\mathrm{kolma}}} + 1\,\mathrm{m} \cdot F_{\mathrm{z}_{\mathrm{kolma}}} + 0{,}6\,\mathrm{m} \cdot (-F_{\mathrm{kl}_{\mathrm{kolma}}}) = 0$$

$$F_{\mathrm{kl}} = \frac{40}{0{,}6\sqrt{3}} N \approx 38{,}5\,\mathrm{N}$$

Keďže sila, ktorou pôsobí tyč na klinec je menšia ako 50 N, tak sa klinec zo steny nevytiahne.

Teraz nás bude zaujímať tá šamanská sila v kĺbe. Ako vyzerá vlastne kĺb? K stene je pripevnená taká škrupinka, a tyč má na konci takú guličku, ktorá sa vloží do škrupinky a v nej sa môže otáčať (pokojne to môže byť aj naopak). Predstavme si teraz, že máme len tyč a nemáme stenu so škrupinkou. Potom sa tyč bude pohybovať – ako presne? Pozrieme sa aké sily pôsobia na tyč, sú to: F_{t}, F_{z}, F_{kl}. Tyč (konkrétne, jej ťažisko) by sa pohybovala v smere výslednice týchto síl. Lenže my vieme, že keď si znova primyslíme stenu, tak sa tyč nepohybuje. To znamená, že stena so škrupinkou musí zabrániť tomuto pohybu. Teda sila, ktorá pôsobí v škrupinke kĺbu na guľôčku kĺbu na konci tyče musí mať rovnakú veľkosť ako výslednica síl pôsobiacich na tyč (F_{t}, F_{z}, F_{kl}), ale musí mať opačný smer. Tým sme vlastne všetko dôležité povedali, pre poriadok však ešte dorátajme jej veľkosť:

$$F_{\mathrm{klb}} = \sqrt{F_{\mathrm{kl}}^2 + (F_{\mathrm{z}} + F_{\mathrm{t}})^2} \approx 63{,}1\,\mathrm{N}$$



Obr. 4: sily v mieste kĺbu

[4]Zložky síl ktoré sú rovnobežné s tyčou na ňu nemajú žiadny otáčavý účinok a teda nie je potrebné ich do momentov nijako zarátavať.

Mnohí z vás riešili časť b) tak, že si vzali zložky síl, ktoré už poznali (sila od klinca, gravitačná sila závažia a tyče) pôsobiace v smere tyče, spočítali ich a výsledná sila v kĺbe bola taká, aby vyrovnala tieto zložky. Lenže aby sa tyč nehýbala, potom musí platiť, aby všetky sily, ktoré na túto tyč pôsobia (aj s tou silou v bode B) musia mať nulovú výslednicu. A pri tomto riešení keď sčítame zložky všetkých síl v smere tyče dostaneme nulu, ale keď sčítame zložky síl kolmé na tyč (= tie „druhé“ zložky) každej sily pôsobiace na tyč, tak veru nulu nedostaneme. Toto bol najčastejší problém, za ktorý som strhávala jeden bodík, pretože títo ľudia porátali presne jednu zložku sily pôsobiacej na kĺb. Tak sa teším na vaše ďalšie riešenia.

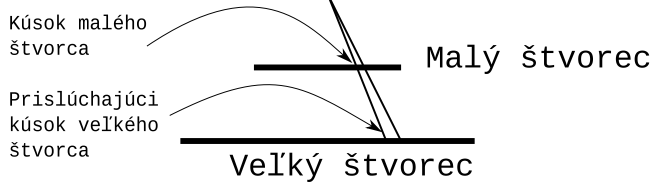
1.6 Teleso (vzorák Tomáš, opravovala Janka)

Mek Kajver pri svojich potulkách vesmírom našiel obrovské teleso v tvare kvádra so štvorcovou podstavou a veľmi malou výškou. V snahe zistiť čo-to o jeho hmotnosti, začal Mek merať telesom spôsobené gravitačné zrýchlenia na rôznych miestach. V mieste A malo gravitačné zrýchlenie rovnakú veľkosť ako pri povrchu našej zeme, jeho smer bol však od zvislého odchýlený o uhol α. Akú hodnotu gravitačného zrýchlenia môže očakávať v mieste B? Miesto A sa nachádza nad rohom štvorca vo výške a, miesto B sa nachádza nad stredom štvorca vo výške $a/2$. Môžte predpokladať, že celé teleso je homogénne – teda, má všade rovnakú hustotu.

Kto ho ešte nepoznáte, zoznámte sa, Newtonov gravitačný zákon: Dva *hmotné body* s hmotnosťami m a M vzdialené r sa priťahujú silou $F = \kappa m M/r^2$ kde κ je tzv. gravitačná konštanta. Upozornenie pre spotrebiteľa: Vzorec platí *výlučne pre hmotné body*. Komplikované telesá vo všeobecnosti *nie je možné* nahradiť hmotným bodom v ťažisku. Kto sa s tým trošku pohrá, hneď zistí, že by to viedlo ku škaredým veciam. Pri komplikovanejších telesách používame rôzne finty, napríklad takúto: Rozsekáme teleso na dostatočne malé hmotné kúsky, pre každý z nich použijem Newtona osobitne a celé to poskladám (vektorovo) dokopy. Toľko teoretická predpríprava. Ako sa to robí v praxi vám ukáže tento vzorák.

Zabudnime na chvíľu na prvý Mekov experiment a skúsme sa zamerať na ten druhý, teda Mek si kvasí vo vzdialenosti $a/2$ nad stredom štvorca ktorý má stranu dlhú a a hmotnosť m. Bez toho, aby som hocičo komplikovane rátal, hneď viem povedať, že gravitačná sila ktorá na neho pôsobí má veľkosť $kM_{\mathrm{Mek}}m/a^2$ kde k je nejaká konštanta. Táto sila potom samozrejme spôsobuje zrýchlenie o veľkosti $z_{\mathrm{r}} = km/a^2$. A ako som na to vlastne prišiel?

V rade prvom, gravitačné zrýchlenie sa asi bude dať nejako vypočítať (len) pomocou m a a, pretože nimi sme situáciu plne opísali. V rade druhom, evidentne $z_{\mathrm{r}} \sim m$ kde $\sim$ označuje priamu úmeru. Dôvod je jednoduchý, ak zmeníme hmotnosť štvorca x-krát, tak sme vlastne zmenili hmotnosť každého malého kúska hmoty z ktorého sa štvorec skladá tiež x-krát. Výsledné zrýchlenie je dané súčtom zrýchlení, ktorými pôsobia jednotlivé kúsky hmoty. Každý tento sčítanec narástol x-krát – výsledok teda tiež narástol x-krát. Potretie, tvrdíme že $z_{\mathrm{r}} \sim 1/a^2$. Skúsme to dokázať podobne ako v prípade hmotnosti. Zmeňme a x-krát, a skúsime ukázať že z_{r} sa zmení $1/x^2$-krát. Pozrime sa na obrázok 5.

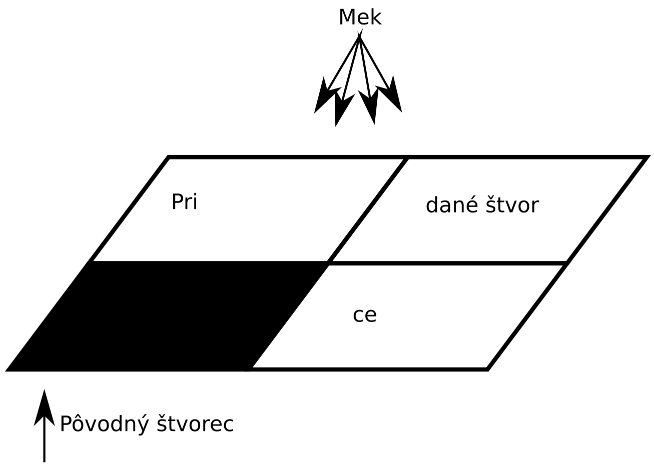


Obr. 5: Pohľad na situáciu s dvomi štvorcami zboku

Vidíme na ňom dve podobné situácie pre x rovné dvom, teda v jednom prípade má štvorec rozmer a a v druhom $2a$. Pripomeňme ešte, že hmotnosť majú oba štvorce rovnakú (teraz skúmame *iba* to čo so zrýchlením spraví zmena a).[5] Rozsekajme opäť štvorce na malé hmotné kúsky a „popárujme“ ich tak, ako naznačuje obrázok. Každý kúsok hore je jednoznačne priradený k nejakému kúsku dole. Kúsky majú rovnaké hmotnosti a ťahajú do toho istého smeru. Jediný rozdiel je, že kúsky spodného švorca sú x-krát ďalej. Výsledné zrýchlenie, či už od prvého alebo druhého štvorca, je súčtom zrýchlení malých kúskov – a keďže každý kúsok spodného štvorca ťahá $1/x^2$-krát menšou silou, výsledné zrýchlenie bude tiež $1/x^2$-krát menšie.

□ČBTD QED EJCHUCHU

So far so good, máme dokázaný vzťah $z_\mathrm{r} = km/a^2$. Načo nám to vlastne celé je, keď nepoznáme konštantu k? Do hry vstúpi prvý Mekov experiment. Na prvý pohľad nám veľa nepomôže, skúsme ho však modifikovať. Pridajme k štvorcu tri ďalšie tak, aby sa Mek nachádzal nad stredom obrovského megaštvorca so stranou dĺžky $2a$. Gravitačné zrýchlenie na neho pôsobiace bude vektorovým súčtom štyroch g, každé na neho pôsobí od jedného štvorca.



Obr. 6: Situácia zo zadania obohatená o tri štvorce

Zložky g rovnobežné s rovinou štvorca sa zjavne vyrušia, kolmé zložky sa zložia na výsledné zrýchlenie o veľkosti $4g\cos\alpha$

Záver je už jasný – megaštvorec má štyrikrát väčšiu hmotnosť a dvakrát väčšiu stranu ako situácia ktorú máme zrátať. Podľa vzorca $z_\mathrm{r} = km/a^2$ je zrýchlenie ktoré máme zrátať rovnako veľké ako zrýchlenie ktorým by Meka ťahal megaštvorec a to už spomínaných $4g\cos\alpha$.

1.7 Bublifuk (opravoval Jakub)

Z paličiek sme zostrojili dlhý obdĺžnik a natiahli v ňom mydlovú blanu. Na blanu sme teraz jemne položili veľmi ľahké vlákno, ktoré je na svojich koncoch prichytené k stenám obdĺžnika v dvoch oprotistojacich bodoch. Celé si to krásne existovalo, keď tu zrazu ľavá časť bubliny praskla. Aký tvar zaujme pravá časť bubliny za predpokladu že ostane natiahnutá medzi špagátom a zvyškom obdĺžnika a nepraskne? Podiskutujte ako bude situácia vyzerať pre rôzne dĺžky špagátu. Prehnutie blany kvôli tiaži samotnej bubliny ako aj kvôli tiaži vlákna zanedbajte. Môžte sa obmedziť na tie dĺžky špagátu, pri ktorých sa špagát nedotkne kratších strán obdĺžnika.

[5] Poznamenajme tiež, že štvorce vyzerajú ako úsečky, lebo je to pohľad zboku a všetky pokusy nakresliť to inak skončili v koši

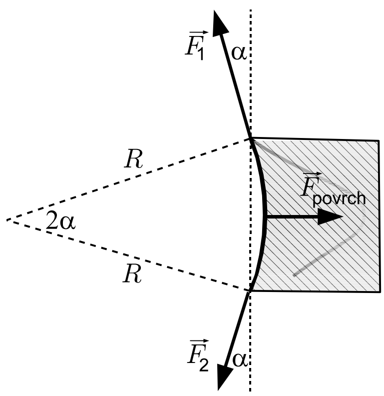
Budeme predpokladať, že vlákno sa stalo súčasťou blanky a po prasknutí dokáže udržať pravú časť, ktorá sa bude snažiť zmenšiť svoj povrch tak veľmi ako sa len dá. To znamená, že blanka sa po prasknutí ľavej časti stiahne do pravej časti a napne pritom vlákno, ktoré bude tvoriť jej ľavú hranicu.

Avšak, aký tvar zaujme vlákno vplyvom sily, ktorou naň bude pôsobiť blanka? Vieme, že na jednotku dĺžky vlákna pôsobí blanka silou 2σ, kde σ je povrchové napätie mydlovej vody, z ktorej pozostáva blanka. Tá 2-ka je tam kvôli tomu, že blanka má 2 povrchy, horný a dolný. Vlákno budeme považovať za dokonale ohybné. Zaostrime pozornosť na malý kúsok vlákna, pôsobia naň nasledovné sily:

- sila povrchového napätia od blanky;
- napätie vlákna cez 2 sily od susedných kúskov vlákna;
- gravitačná, ktorú zanedbávame.

Keď sa zameriame na dostatočne malý kúsok vlákna, tak nech má akýkoľvek tvar, môžem ho s dostatočnou presnosťou považovať za kružnicový výsek s nejakým maličkým stredovým uhlom 2α. Potom situácia vyzerá ako na obrázku.

V rovnovážnej situácii sa vlákno nepohybuje a nutne je súčet síl naň pôsobiacich rovný nulovému vektoru.[6] Hneď vidíme, že zvislé zložky síl od susedných kúskov vlákna musia byť rovnako veľké, a teda sila $\boldsymbol{F}_1$ musí mať rovnakú veľkosť ako $\boldsymbol{F}_2$. Túto veľkosť označíme ako F. Nakoľko toto tvrdenie platí pre ľubovoľný kúsok vlákna, tak napätie (sila medzi susednými kúskami vlákna) musí byť pozdĺž celého vlákna rovnaké, konkrétne F!



Obr. 7: Sily pôsobiace na vlákno

Požadujeme samozrejme aj rovnosť vodorovných zložiek, odkiaľ získame rovnicu

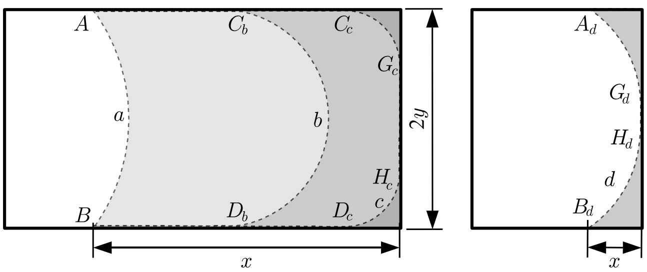
$$2F\sin\alpha = F_{\text{povrch}} = 2\sigma l, \qquad \text{pričom} \qquad l = 2R\alpha,$$

Posledná rovnica platí pre vyjadrenia uhla α v radiánoch. Vidíme, že polomer R zakrivenia vlákna je daný napätím F vo vlákne.[7]

[6] A euklidovskému priestoru ďakujem za úplný paralelizmus! Prosím vymazať tento môj výlev po čítaní recenzentom.

[7] Pre maličký kúsok kružnice je uhol α malý a môžeme smelo použiť vzťah $\sin\alpha \approx \alpha$. Tento približný vzorec však platí tým presnejšie, čím menšie α uvažujeme. Keďže naše α môže byť ľubovoľne malé, naša presnosť je ľubovoľne veľká. Polomer R potom ľahko vyjadríme cez napätie F, konkrétne $R = \frac{F}{2\sigma}$.

Spojením posledných 2 závažných poznatkov sme dospeli[8] k tomu, že kružnice, na ktoré sa lano lokálne v rôznych bodoch podobá majú všade rovnaký polomer. Toto je možné iba vtedy, ak blanka tvorí jeden súvislý kružnicový oblúk.[9] Označím si rozmery na rámčeku podľa druhého obrázka. V bodoch A, B je uchytené vlákno. Ak je vlákno kratšie ako πy, tak blanka svojim ťahom napne vlákno do podoby kružnicového oblúka prechádzajúceho bodmi úchytu, čo zobrazuje možnosť a.[10] Ak je vlákno dlhšie ako πy, tak nastávajú možnosti b, c. Treba si uvedomiť, že vlákno musí byť v bode, kde sa kružnicový oblúk napája na rámček (teda C, D, G a H), napojené hladko, lebo rámček samotný v týchto bodoch nemôže ťahať vlákno von z rámčeka tak, ako je tomu v bodoch uchytenia A, B. Preto sú možnosti b, c zložené z rovných úsečiek pozdĺž rámčeka a polkružnice, resp. 2 štvrťkružníc.



Obr. 8: Blanka v rôznych situáciach

Hodnotenie: Za dostatočné ukázanie toho, že napätie je v lanku všade rovnaké 3 body, za ukázanie, že tvar lanka pozostáva z kružnicových oblúkov rovnakého polomeru ďalšie 3 body. Posledné 3 body za odôvodnenie hladkého napojenia oblúkov ku rámčeku mimo bodov úchytu. Viacero z vás hľadalo výsledný tvar lanka tak, aby plocha (a teda aj povrchová energia) mydlovej bubliny bola čo najmenšia.[11] Tento postup je samozrejme v úplnom poriadku, keby ste vedeli plauzibilne (zrozumiteľne:-) odôvodniť, prečo je kružnicový oblúk to pravé orechové. Všeobecne sa síce vie, že kruh spomedzi všetkých útvarov maximalizuje svoju plochu pri danom obvode, avšak kružnicový oblúk ohraničený rámčekom, to je už trochu iná rozprávka. Taktiež by som rád poznamenal, že skutočne existujú aj iné pekné krivky ako kužeľosečky.

[8] Obávam sa, že som iba ja dospel. Aspoň vy ešte nie ste dospelí.

[9] Ak si predstavíte napríklad takú dosť pretiahnutú elipsu, tak na koncoch hlavnej polosi sa lokálne podobá na kružnicu s oveľa menším polomerom, ako na konci vedľajšej polosi.

[10] To platí, iba ak je x dostatočne veľké. Pre malé x dostávame možnosť d.

[11] Z čoho okamžite vidno, že tvar blany nezávisí od veľkosti povrchového napätia.