Fyzikálny korešpondenčný seminár
25. ročník, 2009/2010
FKS, KTFDF FMFI UK, Mlynská dolina, 84248 Bratislava
e-mail: otazky@fks.sk web: http://fks.sk

Vzorové riešenia 2. kola zimnej časti 2009/2010

2.1 Kmeň (opravovala Marika, vzorák Poli)

V africkom kmeni N!xau sa šaman rozhodol začať s vedou. Aby vedu čo najviac priblížil domorodému obyvateľstvu, zvolil si nasledovné jednotky miery: rýchlosť meria v jednotkách gepard (1 gepard $= 30\,\mathrm{m/s}$), dĺžku v žirafách (1 žirafa $= 6\,\mathrm{m}$), hmotnosť v morčatách (1 morča $= 200\,\mathrm{g}$) a silu v bugoch (1 bug $= 0{,}05\,\mathrm{N}$).

a) (4 body) Ako v týchto jednotkách vyjadrí tlak o veľkoti $1\,\mathrm{Pa}$?

b) (5 body) Ako splní zadanie a) pokiaľ vo výsledku nechce mať bug?

V africkom kmeni sa rozhodli používať skutočne nevšedné jednotky. Na to, aby sme zistili ako vyjadríme tlak v jednotkách nášho kmeňa, potrebujeme zistiť, ako sa vyjadrí tlak v „našich“ jednotkách:

$$[p] = [F]/[S]\,,$$
$$1\,\mathrm{Pa} = 1\,\mathrm{N/m^2}\,.$$

Pozrime sa na to: Newton na jednotky známe nášmu kmeňu premeniť vieme, metre tiež, teda by to malo ísť. Dosadíme $1\,\mathrm{bug} = 0,05\,\mathrm{N}$ teda $\mathrm{N} = 20\,\mathrm{bug}$, ďalej $1\,\text{žir} = 6\,\mathrm{m}$ teda $1\,\mathrm{m} = \frac{1}{6}\,\text{žir}$, pozor $1\,\mathrm{m}^2 = \frac{1}{36}\,\text{žir}^2$. Tým pádom

$$1\,\mathrm{Pa} = \frac{20\,\mathrm{bug}}{\frac{1}{36}\,\text{žir}^2} = 720\,\frac{\mathrm{bug}}{\text{žir}^2}\,.$$

Ako vyjadriť $1\,\mathrm{Pa}$, keď nechceme bug? Nájdime najprv vyjadrenie $1\,\mathrm{Pa}$ v „našich“ jednotkách, tak aby neobsahovalo Newton. Keďže jednotky SI neobsahujú Newton, nemalo by to byť také ťažké. $[F] = [ma] = \mathrm{kg\,m/s^2}$. Teda keď to dosadíme do Pascalu:

$$1\,\mathrm{Pa} = 1\,\frac{\mathrm{kg\,m}}{\mathrm{s^2\,m^2}} = 1\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m\,s^2}}\,.$$

Toto vyjadrenie nám vyhovuje, lebo neobsahuje N (teda nebude ani bug), na druhej strane sekundy nemáme vyjadrené v jednotkách kmeňa. Jediná jednotka, ktorú Afričania poznajú a obsahuje sekundy, je gepard $1\,\mathrm{gep} = 30\,\mathrm{m/s}$, vo vzorci potrebujeme mať v menovateli sekundu na druhú, teda geparda potrebujeme umocneného na druhú:

$$1\,\mathrm{Pa} = 1\,\frac{\mathrm{kg\,m^2}}{\mathrm{m\,s^2\,m^2}} = 1\,\frac{\mathrm{kg\,(m/s)^2}}{\mathrm{m^3}}\,.$$

Seminár podporujú:

Teraz už máme všetko tak ako to potrebujeme, $1\,\mathrm{kg} = 5\,\mathrm{mor}$, $1\,\mathrm{m/s} = \frac{1}{30}\,\mathrm{gep}$, $1\,\mathrm{m} = \frac{1}{6}\,\text{žir}$. Dosadíme:

$$1\,\mathrm{Pa} = 1\,\frac{\mathrm{kg}\,(\mathrm{m/s})^2}{\mathrm{m}^3} = \frac{5\,\mathrm{mor}\cdot(\frac{1}{30}\,\mathrm{gepard})^2}{(\frac{1}{6}\,\text{žir})^3}\,.$$

$$\mathrm{Pa} = 1{,}2\,\mathrm{mor}\,\mathrm{gep}^2/\,\text{žir}^3$$

Úloha to naozaj nebola ťažká, no je dôležité nezabudnúť pri umocňovaní umocniť okrem čísla, ktoré určuje pomer medzi odpovedajúcimi si jednotkami, umocniť aj dané jednotky, napr. $1\,\mathrm{m}^3 = \frac{1}{216}\,\text{žir}^3$.

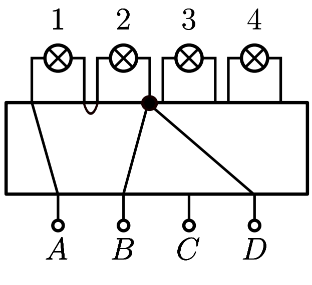
2.2 Čierna skrinka (opravovala Halucinka)

Máme čiernu skrinku, ktorá obsahuje v sebe nejaké elektrické zapojenie, o ktorom vieme že sa skladá iba z obyčajných vodičov a žiaroviek, ktoré z nej trčia von. Z čiernej skrinky vedú von 4 vývody (A, B, C, D) na ktoré môžme pripájať baterku a 4 žiarovky (1, 2, 3, 4). Vezmeme baterku a postupne ju budeme pripájať:

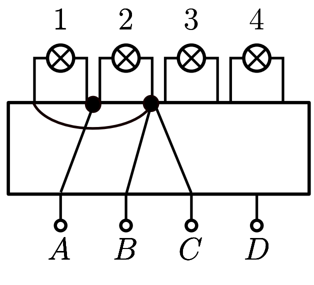
- na vývody $A, B \rightarrow$ zasvietia žiarovky 1 a 2
- na vývody $D, A \rightarrow$ zasvietia žiarovky 1 a 2
- na vývody $B, C \rightarrow$ zasvietia žiarovky 3 a 4
- na vývody $C, D \rightarrow$ zasvietia žiarovky 3 a 4

Všetky žiarovky pritom svietia vždy rovnako silno. Keď pripojím baterku na A, C svietia všetky štyri žiarovky, ale slabšie ako predtým. Čo sa stane ak pripojím baterku na B, D?

Čo sa skrýva v čiernej skrinke? Poďme si prečítať, čo to tá skriňa má byť vlastne zač. Keď baterku pripojíme na vývody A a B, tak začnú svietiť iba žiarovky 1 a 2. To znamená, že je to pekný uzavretý obvod, v ktorom sú dve žiarovky. Ako môžu byť zapojené tieto žiarovky? Paralelne (vedľa seba) alebo sériovo (za sebou). To ešte nevieme. Podobne keď baterku pripojíme na vývody A a D, tak svietia rovnaké dve žiarovky a rovnako môžu byť zapojené paralelne alebo sériovo.[1]



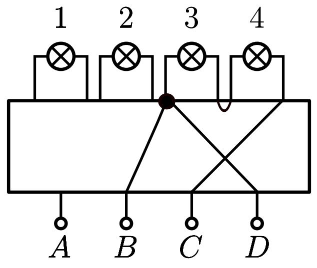
Obr. 1: Zapojenie žiaroviek 1 a 2 sériovo



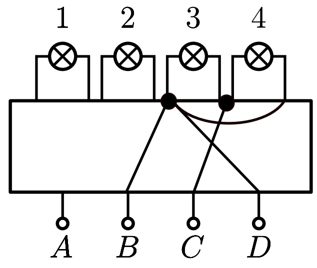
Obr. 2: Zapojenie žiaroviek 1 a 2 paralelne

Analogicky pripojíme žiarovky 3, 4 na vývody C, B a potom aj na vývody C, D. Zapojenie bude zase sériové, alebo paralelné.

[1] V obrázkoch sú čiernymi bodkami naznačené uzly, len krížiace sa vodiče, nie sú uzly.



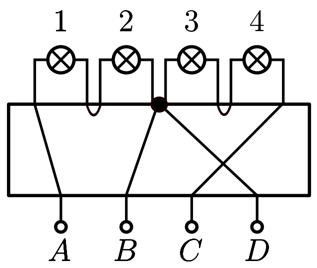
Obr. 3: Zapojenie žiaroviek 3 a 4 sériovo



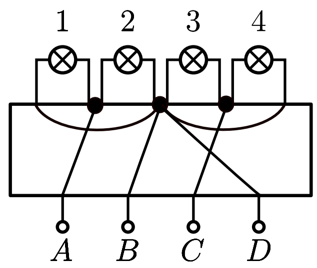
Obr. 4: Zapojenie žiaroviek 3 a 4 paralelne

V zadaní je napísané, že pri všetkých zapojeniach (okrem posledného) svietia žiarovky rovnako silno. Čo ma privádza na otázku, či žiarovky 1 a 2 môžu byť zapojené paralelne a žiarovky 3 a 4 sériovo a zároveň budú všetky sietiť rovnako silno. Odpoveď na túto otázku je samozrejme nie. Označme odpor jednej žiarovky R a napätie na baterke U. Odpor dvoch sériovo zapojených žiaroviek je $2R$ a z Ohmovho zákona prúd pretekajúci nimi bude: $I = \frac{1}{2}U/R$. Ak sú zapojené paralelne, tak každá z nich je vlastne (v podstate nezávisle) napojená na potenciálový skok (= napätie) o veľkosti U a prechádzjúci prúd U/R je dva krát taký veľký ako v predchádzajúcom prípade. To znamená rôznu intenzitu svietenia. Preto žiarovky 1, 2 musia byť zapojené rovnako ako žiarovky 3, 4.

Teda zapojenia (12) a (34) sú buď obe paralalné alebo sériové. Zatiaľ naša čierna skrinka vyzerá takto:



Obr. 5: Zapojenie všetkých žiaroviek sériovo



Obr. 6: Zapojenie všetkých žiaroviek paralelne

Teraz nám ostáva už len overiť poslednú podmienku zo zadania. Keď zapojíme zdroj na A a C, tak musia svieteť všetky štyri žiarovky, ale slabšie. Overme si túto podmienku pre našu čiernu skrinku, skladajúcu sa či už zo sériových alebo paralelných zapojení dvojíc žiaroviek. V uzle $B = D$ bude elektrický potenciál rovný priemernej hodnote z potenciálov v uzloch A, C. Toto platí vďaka symetrii celej situácie. Z toho hneď dostávame, že potenciálový rozdiel medzi A a B respektíve medzi B a C bude polovičný v porovnaní s rozdielmi pri predchádzajúcich zapojeniach baterky. Polovičné teda budú aj všetky prúdy tečúce baterkami a tieto teda skutočne budú svietiť slabšie.[2] Už sa len stačí pozrieť, čo sa stane, keď zapojíme baterku na vývody B a D. Keďže B a D sú priamo spojené vodičmi (obvod je uzavretý a neprechádza žiadnou žiarovkou), teda nebude svietiť ani jedna žiarovka, ba dokonca nastane skrat.

[2] Inými slovami, dvakrát to isté zapojené v sérii na danú baterku znamená že baterka musí svoje napätie rozložiť na obe polovice obvodu a na každú teda pripadá napätie iba polovičné.

Veľa z vás robilo chybu v tom, že ste predpokladali, že existuje práve jedno riešenie čiernej skrinky. Čítala som aj nejaké pokusy o empatiu: „Veď by ste nedávali príklad s dvoma riešeniami vedúci k dvom rôznym výsledkom“. Bohužiaľ takýto argument som neuznávala. Od úplne správneho riešenia som vyžadovala zmienku o tom, že hľadáme všetky riešenia a pár slov o paralelnom a sériovom zapojení jednotlivých žiaroviek. Nechcela som dôkaz, že sú to všetky riešenia, skutočne presný dôkaz koniec-koncov chýba aj tomuto vzoráku. Chcela som však vidieť, že ste sa nad tým zamysleli. Ak vám toto chýbalo, tak som strhla 1 alebo 2 bodíky. Ďalej som bodovala tradične. Za neoverenie poslednej podmienky (že na vývodoch A, C svietia všetky štyri žiarovky a slabšie) som strhávala tiež 1 až 2 bodíky. Za nepresné popisovanie, nebodaj chyby som strhla už viac. Celkovo sa však teším z toho, že bolo veľa správnych riešení a teším sa na ďalšie. Krásneho Mikuláša želám.

2.3 Kozmická nehoda (opravovali Tinka)

Na obežnej dráhe okolo Zeme v roku 2147: Na lukostreleckom cvičisku leží nebohý pán K. so šípom v hrudi! Nehodu vyšetruje detektív Očko. Zistil, že pán K. mal v práci zlý deň, ktorý sa podľa slov jeho kolegov rozhodol zahnať svojím jediným hobby, lukostreľbou. Kolegovia pána K. nevyzerali veľmi trúchlivo, pán K. bol údajne veľmi do seba uzavretý človek. Pre lukostreľbu slúži na vesmírnej stanici valcovitý modul, ktorý rotuje okolo svojej osi symetrie, čím vytvára „umelú gravitáciu“ o veľkosti pozemskej na vnútornej strane valca. Valec má dĺžku niekoľko kilometrov a priemer $D = 250\,\mathrm{m}$. Členovia streleckého klubu poskytli detektívovi záznamy o rýchlostiach pánom K. vystrelených šípov pri bežnom tréningu: $31{,}2\,\mathrm{m/s}$, $32{,}7\,\mathrm{m/s}$, $30{,}9\,\mathrm{m/s}$, $31{,}8\,\mathrm{m/s}$, $32{,}4\,\mathrm{m/s}$, $33{,}0\,\mathrm{m/s}\ldots$ Detektív Očko si všimol, že terč je navzdory zaužívanej praxi upevnený priamo nad mŕtvolou pána K. na osi symetrie valca. „Niet sa čo diviť,“ okomentoval smrť vedúci športového oddelenia pán Krnáč, „keď ten trpák strieľal rovno nad seba. Minul terč a šíp ho pri páde zapichol ako prasa.“ Kozmicky nešťastná nehoda?! Detektív Očko zobral luk, a skusmo vypálil jeden šíp nahor.

a) Aký pohyb šípu bude detektív vidieť? Bude bočiť do nejakej strany a ak áno, prečo?

b) Mohla to naozaj byť nehoda?

Odpor vzduchu pri výpočtoch zanedbajte.

Sľúbila som, že tento vzorák bude nablýskaný a to teda bude, nepovedzte že nie. Vyniká najmä tým, že sa v ňom nevyskytuje žiadna divoká goniometrická mágia, ani výsledné triviálne formule v tvare nechutných zlomkov a odmocnín. A priznajme si rovno, to sa väčšine z vás nepodarilo.

Malo by byť vašim Pavlovovským reflexom, že v okamihu, keď začujete niečo o rotácií okolo nejakej osi, nadobudnete neodbitný pocit, že do hry vstupuje dostredivá sila. Ale poďme na to pekne podrobne.

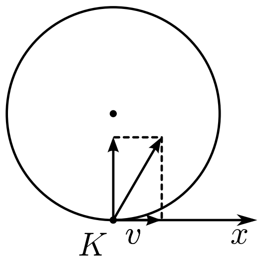
Pán K. si zdanlivo pokľudne stojí v rotujúcom valci. Predpokladajme, že valec rotuje rovnomerne[3] a teda nech je veľkosť jeho obvodovej rýchlosti v. V každom okamihu sa pán K. pohybuje v smere „dotyčnice ku povrchu valca kolmej na rotačnú os valca“ (ďalej len DKPVKNROV), a tento smer je nútený meniť – valec predsa prudko rotuje! Lenže ak sa rýchlosť mení, musí na K. pôsobiť nejaká sila. Tá, ako sa ľahko ukáže, smeruje do stredu valca a na počesť toho sa

[3] Keď dočítate celý tento odstavec, premyslite si, prečo to predpokladať môžeme (hint: simulujeme gravitáciu).

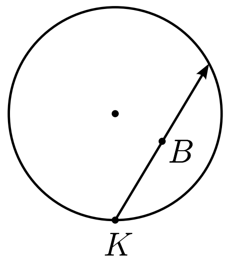
jej hovorí dostredivá. Jej fiktívny[4] náprotivok je odstredivá sila. Tou je pán K. pritláčaný na povrch. A to znie zaujímavo.

Pozrime sa teraz už konečne na náš šíp a to z inerciálnej sústavy vonkajšieho pozorovateľa. Táto sústava má tú výhodu, že v nej neexitujú žiadne fiktívne sily a v okamihu ako šíp vystrelíme, bude sa pohybovať rovnomerne priamočiaro, hoc' by sa fiktívnymi silami pomýleným obyvateľom vnútra valca zdalo čosi iné. Aká však tá rýchlosť rovnomerného priamočiareho pohybu bude? V okamihu tesne pred výstrelom sa rovnako ako pán K. pohyboval šíp v smere DKPVKNROV rýchlosťou v a teda jeho výslednú rýchlosť dostaneme zložením tej, ktorú mu udelil pán K. a v (tie sú na seba kolmé). Na to, aby šíp prebodol pána K., sa musí stať, že aj šíp aj pán K budú počas letu šípu v nejakom čase na rovnakom mieste. Pozrime sa na obrázok, konkrétnejšie na smer daný osou x. Šíp sa v tomto smere pohybuje konštantnou rýchlosťou v. A pán K.? V okamihu, keď sa valec pootočí z pôvodnej polohy o uhol α, bude jeho okamžitá rýchlosť v tomto smere $v \cos \alpha$.[5] Lenže kosínus je okrem prípadu $\alpha = 0$ menší ako jedna a teda pán K sa v smere osi x pohybuje stále pomalšie (okrem okamihu výstrelu) než šíp, jeho x-ová súradnica bude teda vždy (po výstrele) menšia ako x-ová súradnica šípu a teda sa nemôžu stretnúť!

Ešte nám zostáva rozhodnúť, či šíp ktorý vystrelíme nad seba bude bočiť a ako (pozorované v rotujúcej sústave). Pozerajúc sa na situáciu opäť zo sústavy vonkajšieho pozorovateľa, výšku šípu budeme najľahšie určovať pomocou jeho vzdialenosti od osi rotácie valca.



Obr. 7: Výsledná rýchlosť šípu



Obr. 8: Výsledná trajektória šípu

Z obrázka je hneď jasné, že šíp sa najprv približuje a potom vzďaľuje od osi rotácie valca a teda najprv poletí nahor a potom nadol. Umelá gravitácia teda neni až taká kravina – aspoň základnú predstavu o gravitačnom poli spĺňa. Čo s pohybom šípu do boku? Ten najľahšie analyzujeme pomocou rozdielu uhlových rýchlostí valca a šípu (vzhľadom na os rotácie valca). Valec sa pohybuje konštantnou obvodovou a teda aj uhlovou rýchlosťou, so šípom je to zložitejšie. V okamihu výtrelu sa pohybuje rovnakou uhlovou rýchlosťou ako valec (zložka rýchlosti, ktorú sme pridali výstrelom nemá vplyv na uhlovú súradnicu šípu). Z obrázka sa dá usúdiť, že uhlová rýchlosť šípu bude následne narastať, až kým šíp nepreletí bodom B – potom bude jeho uhlová rýchlosť opäť klesať a v mieste kde narazí do plášťa valca bude jeho uhlová rýchlosť zase rovnaká ako uhlová rýchlosť valca – to vieme zo symetrie problému. Detektív Očko teda uvidí šíp bočiť, pričom rýchlosť bočenia najprv narastá z nuly na maximálnu hodnotu, ktorá

[4]takto sa nadáva silám, ktoré v skutočnosti neexistujú, len my ich vnímame, pretože sa na situáciu dívame z neinerciálnej vzťažnej sústavy

[5]Ak ti toto nie je jasné, nakresli si obrázok a iba rozlož v do týchto dvoch smerov. Ale naozaj to sprav, never mi len tak, ja často kecám bludy!

sa dosahuje v najvrchnejšom bode trajektórie šípu – odtiaľ zase rýchlosť bočenia šípu klesá až na nulovú[6]. V rotujúcej sústave valca je za bočivý pohyb šípu zodpovedná tzv. Coriolisova sila. Táto vedie častokrát k prekvapivým zisteniam aj v bežnom živote – uvedomte si, že celá naša Zem sa otáča okolo svojej osi a keď sa napríklad blížite k pólu či padáte z vysokej veže, blížite sa k osi rotácie. Má to vplyv napríklad na balistiku, ale zemepisci tvrdia, že aj toky dlhých riek majú tendenciu sa kvôli Coriolisovi a jeho sile skrúcať. A všeličo iné, skúste si pohľadať, zaujímavé čítanie.

2.4 Experimentálka (opravovali Filip)

Vezmite špagát a tyč s priemerom niekoľko centimetrov. Omotajte špagát okolo tyče tak, aby uhol medzi krajnými dotykovými bodmi bol α Zatiahnime teraz za jeden koniec špagátu silou F_1 a označme F_2 najväčšiu silu, ktorou možno ťahať druhý z koncov tak, aby špagát po tyči neprekĺzaval. Experimentálne určite závislosť F_2/F_1 od α. Akou funkciou je závislosť rozumne aproximovateľná?

Máme skúmať akúsi závislosť dvoch parametrov – pomeru síl a uhla. To znamaná, že jeden z nich si môžeme zvoliť za premmennú a dosádzať také hodnoty, aké sa nám hodia a budeme merať veľkosť druhej veličiny.

Prvý prístup je teda taký, že za parameter zvolíme uhol. Najľahšie sa nám merajú uhly $\pi + 2k\pi$ – teda prípady, keď je lanko len prevesené cez tyč alebo párkrát otočené. Na jeden koniec zavesíme napríklad čokoládu o hmotnosti $m_0 = 123\,\mathrm{g}$. Pokiaľ nemáme po ruke silomer, tak si ho môžeme vyrobiť. Vezmeme fľašu, do ktorej budeme pomaly prilievať vodu, až kým lanko nezačne prešmykovať, a pripevníme ju na druhý koniec. Vždy, keď fľaša prekoná treciu silu, tak odvážime jej hmotnosť a aha, máme silu.

Meranie pre každý uhol trikrát zopakujeme. Takýmto spôsobom sme prišli k nasledujúcim výsledkom:

Tab. 1: Hmotnosť v závislosti od uhla

Φ [π rad]	m_1 [g]	m_2 [g]	m_3 [g]	$\overline{m}$ [g]	$p = \overline{m}/m_0$
1	173	166	175	171	1,39
3	300	296	330	309	2,51
5	635	681	618	645	5,24
7	1390	1260	1220	1290	10,49

V tabuľke sme zaviedli veličinu p – pomer hmotností závaží na jednej a druhej strane. Už teraz si môžeme všimnúť, že pomer rastie veľmi rýchlo. Žiadna lineárna závislosť to asi nebude.

Z nameraných hodnôt sa dá tušiť, že výsledok je niečo strašne rastúce. Nemohla by to byť exponenciála?[7] Skúsme teda preložiť našimi meraniami exponenciálu v tvare $p = e^{k\Phi}$, kde p je

[6] Priznajme však, že sme celú analýzu značne zjednodušili – nakoľko sa však jedná o kvalitatívnu otázku, uspokojíme sa s takýmto priblížením. Poriadny popis trajektórie šípu by sa robil najľahšie v rotujúcej vzťažnej sústave zahŕňajúc všetky fiktívne sily

[7] Každý, kto teraz povedal „Čóóó??“ a verí si, že zvláda aj ťažšiu fyziku si môže prečítať aj „časť pre makačov“ na konci.

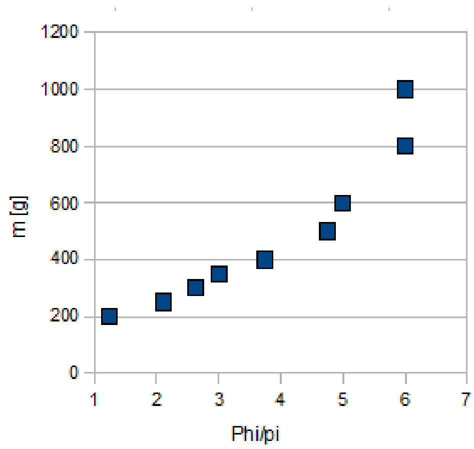
pomer $F/F_0 = m/m_0 = p$. Treba zistiť, či k v exponente je naozaj konštanta rovnaká pre všetky merania. Úpravou výrazu pre exponenciálu dostávame vzťah: $k = \ln(p)/\Phi$. Dosaďme výsledky jednotlivých meraní. Hodnoty $k = 0{,}105; 0{,}098; 0{,}105; 0{,}107$. Naozaj, výsledky sa takmer nelíšia a k je naozaj konštanta s nameranou hodnotou $\overline{k} = 0{,}104$.

Máme tých bodov však dosť málo, skúsme ešte jedno meranie, či to naozaj sedí. Teraz si za parameter zvoľme hmotnosť závažia. Budeme pridávať (vlastne prilievať) závažie a merať, pri akom uhle sa nám sústava posunie.

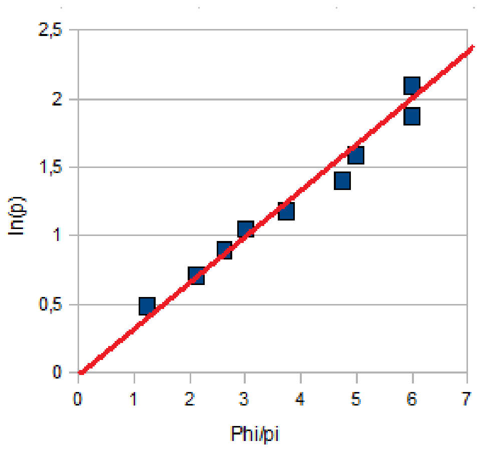
Tab. 2: Závislosť uhla od hmotnosti závažia

m [g]	Φ [π rad]	$p = m/m_0$	k
200	1,3	1,63	0,124
250	2,1	2,03	0,106
300	2,6	2,44	0,108
350	3,0	2,85	0,111
400	3,8	3,25	0,100
500	4,8	4,07	0,094
600	5,0	4,88	0,101
800	6,0	6,50	0,099
1000	6,0	8,13	0,111

Pre prehľadnosť zaznačme hodnoty do grafu:



Obr. 9: Závislosť hmotnosti od uhlu



Obr. 10: Závislosť logaritmu hmotnosti od uhlu

Kto už niekedy videl exponenciálu, mal by ju uvidieť aj tu. No poďme sa presvedčiť. Ak je závislosť naozaj v tvare $p = e^{k\Phi}$, potom závislosť $y = \ln(p) = k\Phi$ je lineárna od uhla. Nakreslime si ju. Nie je žiadny problém preložiť nameranými hodnotami priamku.[8]

[8] Zo skúseností viem, že preložiť priamkou sa dá hocičo. Opravovateľov to však potom nepoteší.

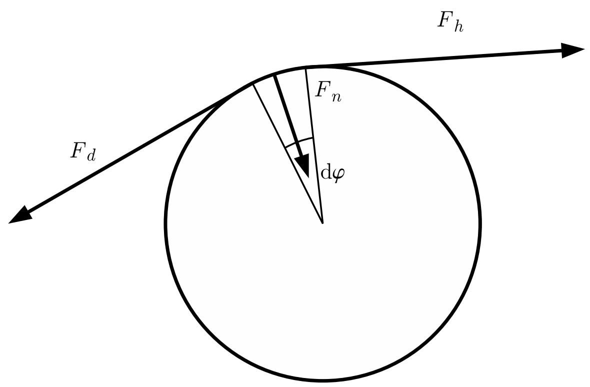
No tu príklad zďaleka nekončí. Zamyslime sa ešte nad presnosťou merania. Dobre. Stačilo. Za ten čas ste si mali uvedomiť, že chýb bolo vcelku dosť. Keďže sme nemerali žiadnu hodnotu, len závislosť, úplne mi stačilo, ak ste spomenuli, že nejaké chyby sa vyskytli. Moc rátania nebolo treba. Ale kto vyhlásil svoje riešenie za dokonalé, skvelé a bezchybné, ten bol presvedčený o opaku.

Okrem chýb merania hmotností závaží a uhlov sa vyskytli chyby spôsobené tým, že koeficienty statického a dynamického trenia sa líšia. To je hlúpe, lebo do sústavy v pokoji stačilo trochu drgnúť, čím sme prekonali statické trenie a dynamické už bolo príliš malé, aby pád zastavilo. A podľa toho, ako a kedy sme drgali/nalievali vodu/fúkal vietor sa nám sústava uviedla do pohybu pri rôznych hmotnostiach závaží. Preto treba urobiť viac meraní a na počítanie využívať ich priemernú hodnotu.

Poučenie z príkladu: exponenciálne závislosti sú vo fyzike veľmi časté. Ak vám teda niečo na jednom konci veľmi rýchlo narastá, skúste hodnoty zlogaritmovať, či náhodou nebudú ležať na priamke…

Druhá vec je, že keď máte n meraní, tak vždy sa dá nimi preložiť polynóm n-tého stupňa. A mnohé iné. To však neznamená, že tento polynóm je hľadaná závislosť! Vo fyzike očakávame niečo jednoduché a ak niekomu vyjde niečo strašne škaredé, mal by sa nad sebou zamyslieť. Riešenia typu $\mathrm{arctg}(4x) + 110 + 6x/x_0$ sú prinajmenšom podozrivé byť nesprávnymi. Jednoduchá rada, skúste už túto závislosť nemeniť a odmerať pár nových meraní – stavím sa, že tieto už nebudú pasovať do „zaručene správneho vzťahu“. A nie, pár koeficientov navyše tomu nepomôže.

Toto je koniec.[9] Nasleduje vysvetlenie prečo to vyšlo tak, ako to vyšlo, no matematicky to bude náročné. Je to pre tých, čo už čosi vedia. Varoval som vás.



Obr. 11: Pani s dáždnikom(pohľad zhora)

Pozrime sa na element špagátu dĺžky $\mathrm{d}l$. Keďže sústava je v pokoji, musí byť v pokoji aj každá jej časť a teda výslednica síl na náš element musí byť nulová. Pokiaľ si element špagátu len tak visí, tak naň pôsobia len tri sily – ťah smerom dole na jeho dolnom okraji veľkosti F_d, ťah na jeho hornom okraji dohora F_h a jeho vlastná tiaž. No tú zanedbáme. Potom vidíme, že $F_\mathrm{d} = F_\mathrm{h}$. Keďže to platí pre každý element, sila sa nemení a prenáša sa z jedného konca na druhý. No vtom príde kus tyče a situácia sa zmení. Okrem týchto síl sa objaví aj trecia sila.

[9] To ste ešte nevideli koniec uprostred vzoráku?

Platí známy vzorec $F_\mathrm{t} = fF_\mathrm{n}$, kde F_n je normálová sila. Poďme ju vypočítať. Nakreslime si obrázok.

Vidíme, že sily F_d a F_h zvierajú uhol $\mathrm{d}\varphi$. Keďže element dĺžky je veľmi krátky, môžeme predpokladať, že sily sa príliš nezmenia a sú približne rovné F. Normálová sila je teda ich vektorovým súčtom, čiže $F_\mathrm{n} = 2F \sin \frac{1}{2}\mathrm{d}\varphi$. Využijeme teraz aproximáciu $\sin \frac{1}{2}\mathrm{d}\varphi \approx \frac{1}{2}\mathrm{d}\varphi$ pre malé uhly. Môžeme dosadiť do rovnice pre rovnováhu síl:

$$\begin{aligned} \mathrm{d}F = F_\mathrm{d} - F_\mathrm{h} = F_\mathrm{t} &= \\ = fF\,\mathrm{d}\varphi\,, \\ \mathrm{d}F/F = f\,\mathrm{d}\varphi\,. \end{aligned}$$

To, čo sme práve urobili sa nazýva separácia premenných. Na ľavej strane sú sily, vpravo uhly. Veličina $\mathrm{d}F$ vyjadruje o koľko sa nám zmení napäťová sila F v lanku na danom úseku dlžky $R\mathrm{d}\varphi$. Výsledná zmena sily bude preto súčtom zmien na každom elemente lanka. Čiže integrálom:

$$\int_{F_0}^{F_1} \frac{\mathrm{d}F}{F} = \int_0^{\varphi} f\,\mathrm{d}\varphi\,.$$

Prečo také hranice? Sila sa nám mení od minimálnej F_0 na jej hornom konci po maximálnu na jej druhej strane, uhol sa mení tiež v nejakom rozsahu (podľa toho, čo považujeme za nulu). Výsledok je:

$$\ln \frac{F_1}{F_0} = f\varphi\,.$$

Teraz stačí vyjadriť silu F_d:

$$F_1 = F_0 e^{f\varphi}\,.$$

Ahaju![10] Exponenciála…

2.5 True story (opravovali Mazo)

V animovaných seriáloch občas vidíme, ako prúd vody, napríklad z hadice alebo fontány, vynesie postavičku do vzduchu (obrázok). Nech voda z hadice strieka prietokom $Q = 3\,\mathrm{l/s}$, pričom voda strieka do výšky maximálne $h_\mathrm{max} = 10\,\mathrm{m}$ nad ústie hadice. Predpokladajte, že voda po náraze na chrbát sa rozstrekuje vo vodorovnom smere.

a)Akú najmenšiu hmotnosť m_min môže mať postavička, aby ju prúd vyniesol aspoň do nejakej nenulovej výšky?

b)Nech má postavička hmotnosť $m < m_\mathrm{min}$. Do akej výšky ju prúd vody vynesie?

V zadaní sa vyskytla drobná chyba: chceli sme samozrejme maximálnu hmotnosť postavičky, nie minimálnu. Budeme ju označovať m_max.

Môžeme naše úvahy začať tým, že postavičky sa zvyčajne vo vzduchu nevznášajú – gravitačná sila ich stiahne k zemi. Aby sa postavička mohla vznášať, alebo dokonca stúpať nahor, musí byť táto gravitačná sila vyvážená inou silou. V našom prípade pôjde o silu, ktorá vznikne zmenou smeru pohybu vody pri náraze na chrbát postavičky. Voda letí smerom nahor a po náraze do postavičky už nahor neletí (ba dokonca pôjde vodorovne, ako uvádza zadanie). Fyzikálne povedané, voda stratila hybnosť v zvislom smere. Keďže hybnosť sa podľa zákona zachovania

[10] Ženský rod od ahaho.

hybnosti bez vonkajších vplyvov nemení, musela na vodu pôsobiť postavička nejakou silou. A podľa zákona akcie a reakcie presne opačnou silou zase pôsobí voda na postavičku a nadnáša ju. Treba si uvedomiť, že čím vyššie je postavička, tým menšiu rýchlosť má voda a tým menšou silou pôsobí (napríklad vo výške 10 m už voda nepôsobí žiadnou silou).

Ostáva nám porovnať veľkosť gravitačnej sily F_g a sily F_v, ktorou pôsobí voda na postavičku s hmotnosťou m vo výške h. Označme v rýchlosť vody v momente nárazu. Zo známych vzorcov vieme, že

$$F_\mathrm{g} = mg \qquad \text{a} \qquad F_\mathrm{v} = \Delta p/\Delta t\,.$$

Ostáva určiť zmenu hybnosti vody Δp v zvislom smere za čas Δt. Množstvo vody, ktoré za tento čas stráca hybnosť, zistíme z prietoku hadice: $Q = \Delta V/\Delta t$, čiže za čas Δt prejde hadicou $Q\Delta t$ metrov kubických vody s hmotnosťou $M = \varrho Q\Delta t$ (ϱ je hustota vody). Rýchlosť vody vo výške h je taká, akú by získala voľným pádom z výšky h_max do výšky h, čiže $v = \sqrt{2g(h_\mathrm{max} - h)}$. Celkovo pre silu F_v dostávame

$$F_\mathrm{v} = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{M\Delta v}{\Delta t} = \frac{\varrho Q\Delta t v}{\Delta t} = \varrho Q\sqrt{2g(h_\mathrm{max} - h)}\,.$$

Zaujíma nás, do akej výšky vynesie prúd vody postavičku s hmotnosťou m, čiže v akej výške je sila prúdu pôsobiaca na postavičku rovná gravitačnej sile pôsobiacej na túto postavičku. Inak povedané, pre aké h platí $F_\mathrm{g} = F_\mathrm{v}$?

$$mg = \varrho Q\sqrt{2g(h_\mathrm{max} - h)}\,, \qquad \text{teda} \qquad h = h_\mathrm{max} - \frac{m^2 g}{2\varrho^2 Q^2}\,.$$

Pre zadané hodnoty dostaneme $h = (10 - m^2 \cdot 0{,}55\,\mathrm{kg}^{-2})$ metra.

Aby prúd vody vyniesol postavičku do aspoň nejakej nenulovej výšky, musí sila vodného prúdu vo výške 0 m (v ústí hadice) presahovať gravitačnú silu pôsobiacu na postavičku, čiže chceme $F_\mathrm{g} < F_\mathrm{v}$. Z toho $m < \sqrt{10/0{,}55}\,\mathrm{kg}$, preto m_max je približne 5,28 kg. Pre zaujímavosť, postavičku s polovičnou hmotnosťou ako je maximálna vynesie prúd do výšky až 7,5 m.

Komentár: Mnohí z vás skúšali čosi spočítať cez energie. Tento prístup nám umožní čosi vyrátať, nie však to, čo chceme. V situácii, keď je postavička statická a len sa vznáša na prúde vody vo výške h, nevykonáva prúd vody žiadnu prácu. Časť pôvodnej kinetickej energie vody sa zmenila na potenciálnu energiu zodpovedajúcu výške h nad ústím hadice, zvyšok však ostáva vode ako kinetická energia a mohli by sme z toho vypočítať rýchlosť vody striekajúcej vodorovne po náraze na chrbát postavičky (nejaká časť energie sa pri náraze „stratí“ premenou na tepelnú energiu). Neumožňuje to však zistiť, akou silou pôsobí voda na postavičku – voda s rovnakým množstvom kinetickej energie pôsobí na prekážku rôznou silou napríklad v závislosti od uhla, pod ktorým dopadá či odráža sa. Taktiež je dôležité uvedomiť si, že hybnosť je lineárnou funkciou rýchlosti, kým kinetická energia kvadratickou: voda s rýchlosťou 1 m/s a hmotnosťou 100 kg bude pri náraze pôsobiť väčšou silou ako voda s rýchlosťou 10 m/s a hmotnosťou 1 kg, aj keď kinetickú energiu majú tieto dve „telesá“ rovnakú (predpokladáme, že sa nezmenia ostatné parametre nárazu, teda trvanie, uhol, …).

2.6 Súkolesie (opravoval Marek, vzorák Marcelka)

Majme ozubené súkolesie ako na obrázku (plus zuby). Najľavšie koleso je pevne zafixované a zvyšné dve okolo neho obiehajú, pričom ich stredy sú vždy fixované na jednej priamke (tyči). Počty zubov prvých dvoch kolies sú N, najpravšie koleso, má zubov M. Ako budú kolesá natočené, keď otočíme tyčou na ktorú sú fixované stredy kolies o jednu obrátku?

Najprv sa pozrime, čo sa deje so stredným kolesom. Konkrétne nás bude zaujímať, o aký uhol vzhľadom na tyč sa otočí stredné koleso, ak sa pohneme o „jeden zub“ na ľavom kolese (teda ak tyč pootočíme o $360\,°/N$). Pri točení tyčou sa stredné koleso točí tak, aby jeho zuby zapadali do zubov zafixovaného ľavého kolesa. Preto sa stredné koleso otočí vzhľadom na tyč tiež o jeden zub, čomu zodpovedá opäť $360\,°/N$.

Teraz zistime, o aký uhol vzhľadom na tyč sa otočí pravé koleso, ak stredné otočíme o jeden zub. Keďže aj zuby týchto kolies musia do seba pri otáčaní pekne zapadať, aj pravé koleso sa otočí o jeden svoj zub, čiže o $360\,°/M$.

Pootočeniu tyče o $360\,°/N$ teda zodpovedá pootočenie stredného kolesa o $360\,°/N$ a pootočenie pravého kolesa o $360\,°/M$ vzhľadom na tyč. Ak teda tyč otočíme o jednu celú obrátku (čiže N-krát o uhol $360\,°/N$), stredné koleso sa otočí o $360\,° \equiv 0\,°$ a pravé koleso sa otočí o uhol $(N/M)\cdot 360\,°$ vzhľadom na tyč. Keďže tyč bude v rovnakej polohe ako na začiatku, tieto otočenia bude rovnaké aj z pohľadu pozorovateľa zo sústavy spojenej so zafixovaným kolesom.

Alternatívnym spôsobom riešenia, ktorý niektorí z vás použili je predstaviť si situáciu z hľadiska sústavy pevne spojenej s otáčajúcou sa tyčou. V tejto sústave sa najľavšie koleso otáča a toto otáčanie sa prenáša až na najpravšie koleso. Samotné otáčanie celej sústavy na pootočenie najpravšieho kolesa nemá vplyv (lebo robíme celú jednu otáčku).

2.7 Pás (opravoval Bzdušo)

Na prepravníku (t.j. pohyblivý pás určený na prepravu nákladov) sa vezie krabica. Táto v istom okamihu príde na koniec prepravníka a hladko nabehne na už nepohyblivú tzv. odkladaciu rovinu. Krabica má tvar kocky so stranou dĺžky a, na prepravníku je položená tak, aby jej hrany boli rovnobežné, resp. kolmé na kraje pásu. Hmotnosť krabice je m, trenie medzi krabicou a prepravníkom či odkladacou rovinou je popísané koeficientom f, rýchlosť prepravníka je v. Zistite:

a) (5 bodov) Pre akú najmenšiu rýchlosť prepravníka $v_{\min}$ ešte nastane situácia, kedy krabica celá „zlezie“ z prepravníka na odkladaciu rovinu?

b) (4 body) Nech $v = v_{\min}$. Koľko bude trvať, kým krabica bude zliezať (t.j. bude stáť zároveň aj na prepravníku, aj na odkladacej rovine)?

Na Bratislavu sadla hmla, mne na balkón párok hrkútajúcich holubov. Šuhája do hája! Vtač sťaby v táčkach vrzgalo. A vraj spevavá… V hlave mi z nej duní ako keď horár od hladu drcne lopatou do plechového gulášového kotla. Jedlo v hrnci? Vraj len slepaciu polievku? (Pán iste pracuje v médiách.) A čaj? Máme rumančekový a harmančekový s rumom. Že nie? Ach tie čaje, čajky, čajníčky. Prečo majú taký štíhly driek? Kto krčí plecami, ten dostane skoliózu. A ešte aj tlstý pupok! Tento pás však žiadny čaj určite nebol. Ešte sa dohodnime, že krabicu budem v riešení nazývať kockou, pásový prepravník proste pásom a skončíme už to hrozné úvodné slovo.

Skôr než sa pustíme do samotného riešenia, zopakujme si niekoľko faktov o trecej sile.[11] Všetci ste už zrejme videli vzťah pre treciu silu. Zámerne ho zapíšem v tvare

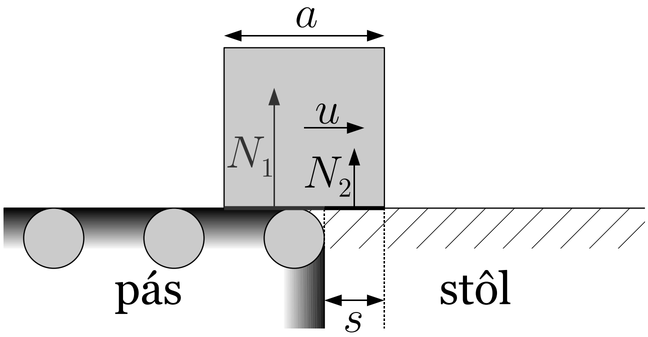
$$T_{\max} = fN\,.$$

[11] Hneď na začiatok zdôraznime, že v tejto úlohe sa nerozlišuje medzi statickým a dynamickým koeficientom trenia. Predpokladá sa $f_\mathrm{s} = f_\mathrm{d} = f$.

Ako sa má tento vzťah chápať?

Tak aby bolo jasné, to „max“ som tam nepripísal len tak náhodou. Je to totiž *maximálna* trecia sila, aká medzi uvažovanými povrchmi môže pôsobiť *a pôsobí v prípade, že tieto dva povrchy sa po sebe šmýkajú.*[12] V skutočnosti trecia sila pôsobí aj medzi povrchmi, ktoré sa po sebe nešmýkajú. V tomto prípade trenie *úplne* kompenzuje vonkajšie sily F (teda $T = -F$) tak, aby sa vzájomný pohyb povrchov ani nazačal. V prípade, že vonkajšie sily F prekročia medzu $F = T_{\max}$, trecia sila dosiahne svoje maximum a vonkajším silám sa podarí telesom pohnúť.

Teraz k pásu. Najprv sa dohodnime na pár označeniach: Dĺžku, ktorou kocka so stranou a presahuje na stôl, označíme s. Rýchlosť krabice budeme označovať u. Reakčná sila od pásu nech je N_1 a od stola N_2.



Obr. 12: Znázornenie situácie

Z rovnosti síl vo zvislom smere $N_1 + N_2 = mg$. Ak kocka tlačí na podložky rovnomerne (tj. N je úmerná styčnej ploche), tak ľahko dopočítame

$$N_1 = \frac{s-a}{x} mg \qquad \text{a} \qquad N_2 = \frac{s}{a} mg\,.$$

Ešte budeme používať označenia T_1, T_2 pre trecie sily na jednotlivých povrchoch. Trecia sila od stola T_2 pôsobí proti smeru pohybu, tzn. doľava. Trecia sila od pásu sa snaží kváder udržovať pri rýchlosti v a pôsobí doprava proti trecej sile od stola.

Všimnime si zaujímavú vec, že *kým* $s < \frac{1}{2}a$, *kocka sa bude pohybovať rýchlosťou pásu* v. Že prečo? Sporom: Keby kocka mala rýchlosť $u < v$, tak na stole je brzdená trecou silou najviac $fN_2 = fsmg/a$. Avšak keď $u < v$, tak kocka sa šmýka aj na páse a ten ju tlačí doprava maximálnou trecou silou $fN_1 = f(a - s)mg/a$. Vidíme, že pre $s < \frac{1}{2}a$ je $T_1 > T_2$, čiže kocka by zrýchľovala! Ako potom mohla kocka spomaliť na $u < v$? Tomuto problému sa vyhneme, ak uvážime, že kocka sa pohybuje rýchlosťou pásu. Vtedy sa kocka po páse nešmýka, preto trecia sila T_1 iba kompenzuje pôsobiacu silu T_2, čiže platí $T_1 = T_2 = fN_2 < fN_1$. Všetko je okej.

[12] To, že to tak *musí* byť, je zrejmé z tejto sedliackej úvahy: Zo skúsenosti vieme, že obrovský betónový blok položený na ceste sa posúva skutočne ťažko. Ak sa doň opriem len malou silou F, blok zostane stáť. To znamená, že trecia sila úplne kompenzuje moje silové pôsobenie, teda $T = -F$. Keby bolo moje tlačenie kompenzované trecou silou $T_{\max} = fN$, betónový blok by ma doslova „pretlačil“ – Rozbehol by sa proti mne a spravil zo mňa mäsokostný fľak na ceste.

Celkom iná situácia nastane, keď $a > s > \frac{1}{2}a$. Vtedy $N_1 < N_2$ a argument v predošlom odstavci neprejde. Trecia sila od pásu *nestačí kompenzovať* treciu silu od stola. Kocka teda začne spomaľovať a bude prešmykovať na oboch povrchoch. Výslednica trecích síl je

$$F = f(a-s)mg/a - fsmg/a = f(a-2s)mg/a\,,$$

kde sme za kladný smer sily zvolili smer pohybu pásu. Ak navyše zavedieme substitúciu $x = s - \frac{a}{2}$,[13] dostávame

$$F = -2fxmg/a\,.$$

To je úplne rovnaká závislosť, ako keby na kocku pôsobila pružina s tuhosťou $k = 2fmg/a$. Vágne zistenie? Nie! *Úplne fantastická vec!* O správaní pružiny toho totiž vieme celkom dosť. Napríklad, že pri jej natiahnutí o x treba vykonať prácu $\frac{1}{2}kx^2$. Presne to ideme teraz využiť.

V časti (a) sa pýtame, pri akej rýchlosti pásu $v_{\min}$ krabica zastaví po prejdení dráhy $x = \frac{1}{2}a$. Dobre platí analógia s pružinou. Ekvivalentne sa teda môžeme spýtať: *Akú rýchlosť treba udeliť kocke, aby sa „pružina" natiahla o $\frac{1}{2}a$?* Zo zákona zachovania energie[14] dostávame

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{2}mv_{\min}^2 &= \tfrac{1}{2}k\left(\tfrac{1}{2}a\right)^2,\\ v_{\min} &= \tfrac{1}{2}a\sqrt{k/m}\,.\end{aligned}$$

Ak ešte dosadíme za k a trochu upravíme, dostávame prvý výsledok

$$v_{\min} = \sqrt{\tfrac{1}{2}afg}\,.$$

Časť (b) vyriešime, ak s pružinovou analógiou zájdeme ešte ďalej. Vieme, že závažie na pružine koná periodický pohyb s periódou $T = 2\pi\sqrt{m/k}$. Ale my *máme* závažie na pružine! V realite síce nie, ale matematicky si ho tam môžeme predstaviť. Z rovnovážnej polohy do maximálnej výchylky sa teleso dostane za čas $\frac{1}{4}T$. To je však iba čas, za ktorý s narastie z $\frac{1}{2}a$ na a. Nesmieme zabudnúť na čas, za ktorý s narastie rovnomerným pohybom z 0 a $\frac{1}{2}a$. Až sčítaním oboch týchto časov dostávame aj druhý výsledok

$$t = \tfrac{1}{2}\pi\sqrt{m/k} + \frac{a}{2v_{\min}} = \left(\tfrac{1}{2}\pi + 1\right)\sqrt{\frac{a}{2fg}}\,.$$

Na domácu úlohu si skúste spočítať, za aký čas kocka zastane, ak $v \neq v_{\min}$, A dajte si aj ten čaj, nech neochoriete.

[13] Takto zvolené x označuje, o koľko sa posunul stred kocky od rozhrania pás-stôl.

[14] Nenechajte sa zmiasť! Energia sa v skutočnosti nezachováva. Rozdiel medzi pružinou a našou situáciou je, že v prípade pružiny vieme dodanú energiu získať späť a má zmysel hovoriť o potenciálnej energii. V prípade trecích síl sa to nedá. Nás zaujíma len „naťahovanie pružiny", takže problém nenastane.