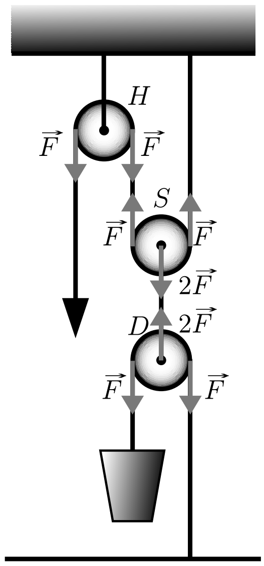
Fyzikálny korešpondenčný seminár
26. ročník, 2010/2011
FKS, KTFDF FMFI UK, Mlynská dolina, 84248 Bratislava
e-mail: otazky@fks.sk web: http://fks.sk

Vzorové riešenia 2. kola letnej časti 2010/2011

2.1 Filip dvíha (opravovali Filip a Jakub, vzorák Filip)

Akou silou musí Filip na obrázku ťahať za lano, aby vytiahol stokilové závažie?



Obr. 1: Vedro na kladkách

Aká je sila na vytiahnutie? Uvedomme si, že keď sa nám podarí nájsť silu, ktorú potrebujeme na dosiahnutie rovnováhy, tak potom stačí do sústavy len trošku ťuknúť a už to pôjde samo. Aká je teda sila, aby bola celá sústava v rovnováhe?

Začneme odspodu. Lano je napínané silou $F = mg$. Je otočené okolo kladky D. Aby sa kladka neroztáčala, musí byť výsledný moment síl nulový. Pozrime na kladku s hornou polkružnicou lana ako na jedno teleso v nami vyšetrovanom statickom prípade – nulový moment dostaneme práve vtedy, keď je napätie v lane na oboch stranách rovnaké, F. Aby sa kladka nehýbala, výslednica $F + F$ musí byť kompenzovaná ťahom $2F$ v lane medzi kladkami S a D.

Kladka S je rovnaká ako D, len zavesená opačne. Hneď teda vidíme, že sila $2F$ ťahajúca dole sa „rozdelí" medzi oba konce. Horné lano je teda napínané silou F.

Zostáva nám posledná (nazývaná pevná) kladka H. Už na začiatku sme napísali, že aby sa kladka netočila, musí byť sila na oboch jej stranách opäť rovnaká. Rozuzlenie tohoto zamotaného príkladu je teda jednoduché, musíme ťahať silou $F = mg$.

Seminár podporujú:
iuventa APVV

Alternatívne sa na úlohu dá pozrieť cez prácu: predstavme si, že Filip (ktorý na obrázku chýba) potiahne koniec lana pomaličky nadol o dĺžku d silou F. Vykoná pritom prácu $W = Fd$. Ak to urobí dosť pomaly, tak pri tomto úkone prakticky nezmení kinetickú energiu uvažovaných telies (kladky, lano, vedro, jeho ruka). Pevné ukotvenia lán sa nemôžu pohnúť, teda tam sa práca tiež nemohla vykonať. Práca bola teda vykonaná jedine na zdvih závažia. Treba nám určiť, o koľko sa toto zdvihlo pri potiahnutí konca lana o d: kladka S sa zdvihne o $d/2$, teda aj kladka D sa zdvihne práve o toľko isto; vedro sa však pritom zdvihne o d. Vykonaná práca teda je $W = mgd$, z čoho dostávame výsledok (zhodne s predošlým) $F = mg$.

2.2 Kvádre (opravovali Kamila a Mišo, vzorák Mišo, Kamila? a Jakub)

Vymyslite dva spôsoby, ktorými možno určiť koeficient odporu medzi podložkou a kvádrom, ak nemáte k dispozícii silomer, váhy, ani žiadne iné podobné silumeracie zariadenie. Aspoň jeden zo spôsobov zrealizujte a odhadnite chybu merania.

Prvý spôsob, ktorý si uvedieme, je z učebníc notoricky známy spôsob určenia statického koeficientu trenia na naklonenej rovine – na kváder na naklonenej rovine pôsobí tiažová sila a sila od podložky (normálová a trecia). Tiažovú silu si rozložíme na zložku rovnobežnú s rovinou a na zložku kolmú. V hraničnom prípade sklonu roviny, kedy akékoľvek malé štuchnutie uvedie kváder do pohybu, je rovnobežná zložka tiažovej sily $mg\sin\alpha$ veľkosťou rovná trecej sile. Vieme, že maximálna veľkosť trecej sily je súčin koeficientu statického trenia f a normálovej sily podložky (ktorá sa veľkostne rovná práve kolmej zložke tiaže $mg\cos\alpha$). Podosadzujeme, upravíme a dostaneme vzťah $f = \operatorname{tg}\alpha$, kde α je hraničný uhol. Stačí nám teda zmerať tento uhol. To treba zopakovať viackrát na rôznych miestach podložky, nakoľko koeficient trenia je spriemerovaná veličina. Nepresnosť každého jedného merania závisí od uhlomera, našej gramblavosti…

Druhý spôsob určenia môže byť nasledovný. Položíme kváder s určitými rozmermi na vodorovnú podložku a začneme pôsobiť silou kolmo na niektorú z jeho bočných stien – tú nazveme predná stena. Pôsobiť budeme v určitej výške h nad podložkou. Hĺbku kvádra označme a. Pre menšie výšky h bude pohybový účinok sily[1] posuvný a pri väčších zase otáčavý. V posuvnom režime nastane posun pri $F = F_t = fmg$. Kváder sa pritom nebude otáčať a bude teda preň platiť rovnosť pôsobiacich momentov síl a to vhľadom na akýkoľvek vzťažný bod. Vyberme si ako vzťažný bod miesto pod ťažiskom kvádrika na styku s podložkou. Zrejme je potom moment tiažovej a trecej sily vzhľadom na tento bod nulový. Moment sily F je Fh a moment normálovej sily (posledná sila pôsobiaca na kvádrik) musí byť potom presne opačný (veľkostne rovnaký). Nuž, tento moment však môže byť najviac rovný $mga/2$, lebo normálová sila nemôže pôsobiť ďalej od vzťažného bodu ako $a/2$ – to by bolo už mimo podstavu kvádra. Pre hraničnú výšku teda dostávame rovnicu

$$fmgh = mga/2 \qquad \Rightarrow \qquad f = \frac{a}{2h}\,.$$

Pre väčšie výšky h sa momentová rovnosť dá fyzikálne splniť iba pre sily menšie ako $F = fmg$ a preto nastane preklopenie skôr ako posuv. Nepresnosť merania spočíva v tom ako presne odmeriame výšku, v ktorej sa mení účinok sily. Ak budeme do kvádra tlačiť hrotom fixky, tak aj značka zostane.

Tretí spôsob je mierne upravený prvý spôsob, ktorým určíme koeficient dynamického trenia. Zoberieme dosku dĺžky s. Z tejto výšky (napr. popri doske) necháme padnúť kváder na zem,

[1] Prvý netriviálny pri postupnom zvyšovaní sily.

pričom meriame čas t_0. Potom necháme kváder kĺzať dole doskou, po celej jej dĺžke, a zmeriame čas t. Doska môže mať ľubovoľný sklon, stačí len aby kváder dakedy došiel na zem. Uhol sklonu α tiež odmeriame. Pre voľný pád platí $s = gt_0^2/2$ a pre šikmý pád $s = at^2/2$. Vydelením týchto rovností dostaneme $g/a = t^2/t_0^2$. Pre zrýchlenie a pri šikmom páde platí

$$ma = mg \sin\alpha - fmg \cos\alpha \ ,$$

po dosadení teda dostaneme

$$\frac{t_0^2}{t^2} = sin\alpha - fcos\alpha \ , \qquad\qquad f = \operatorname{tg}\alpha - \frac{t_0^2}{t^2 \cos\alpha} \ .$$

Nepresnosť je v tomto prípade väčšia ako v predošlých prípadoch, pretože do výpočtu vstupujú tri merané veličiny. Odpor vzduchu sme si dovolili neuvažovať.

Čujte posolstvo. Viacerí z vás počítali tangens uhla cez pomer odvesien, nemerali teda uhol uhlomerom, ale dĺžky pravítkom, čo je s ohľadom na presnosť pri bežných uhlomeroch dobrý nápad. Pri experimente je nevyhnutnosťou robiť viac ako jedno meranie – päť okej, desať spokojnosť. Všetky merania sa vždy zapisujú tabuľky a počíta sa odchýlka – údaj, ktorý nám povie ako nepresne sme merali. Tiež je dobrým zvykom v kraji niekde vypísať zoznam použitých značiek. Záverom ešte poznámka, že akékoľvek zariadenia, ktorým ste vo výslednom efekte merali tiaž/hmotnosť skutočne považujeme za váhy, či silumeracie zariadenia, ktoré sme v zadania zatrhli! Dosfksatenia.

2.3 Elektrina (opravovali Ado a Frico)

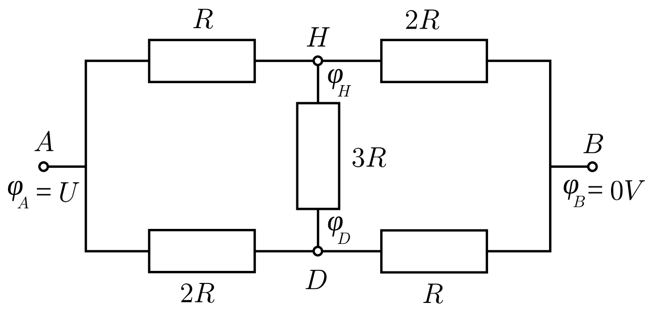
Vypočítajte elektrický odpor medzi bodmi A a B na obrázku. Bonus za nebodovú odmenu: Určte napätia a prúdy v obvode na `http://xkcd.com/730`

Azda najúčinnejšou metódou, pomocou ktorej možno vypočítať odpor našej súčiastky, je metóda uzlových potenciálov. Tá je založená na 1. Kirchhoffovom zákone. Ten hovorí, že pre každý uzol elektrického obvodu je súčet prúdov vtekajúcich do uzla rovný súčtu prúdov z uzla vytekajúcich. Inak by totiž musel elekrický náboj v uzle vznikať, zanikať alebo sa v ňom hromadiť a k ničomu takému v ustálenom stave nedochádza.

Predstavme si, že sme súčiastku pripojili na zdroj elektrického napätia U tak, že uzlu A možno priradiť potenciál $\varphi_A = U$ a uzlu B potenciál $\varphi_B = 0\,\mathrm{V}$.[2]

Označme si horný uzol sučiastky H a dolný D a im prislúchajúce potenciály φ_H a φ_D.

[2]Prúd (tzv. dohodnutý) v súčiastke teda potečie z bodu A do bodu B. Elektrický prúd má totiž vplyvom elektrického poľa snahu tiecť z miesta s vyšším potenciálom do miesta s nižším potenciálom. Potenciál v nejakom bode si pritom možno (s rezervou) predstaviť ako výšku kopca, po ktorom prúd prechádza. Zdroj napätia potom slúži ako akýsi rebrík, po ktorom prúd na svojej prechádzke po obvode lezie naspäť na kopec.



Obr. 2: Uzlové potenciály

Ak teraz pre každý z uzlov H, D napíšeme rovnicu podľa 1. Kirchhoffovho zákona, kde prúdy vo vetvách vyjadríme ako podiely napätia medzi ich koncami a ich odporu,[3] dostaneme sústavu dvoch rovníc o dvoch neznámych φ_H, φ_D,

$$\begin{aligned}
\text{rovnica pre } H: \quad 0 &= \frac{U - \varphi_H}{R} + \frac{\varphi_D - \varphi_H}{3R} + \frac{0 - \varphi_H}{2R} \,, \\
\text{rovnica pre } D: \quad 0 &= \frac{U - \varphi_D}{2R} + \frac{\varphi_H - \varphi_D}{3R} + \frac{0 - \varphi_D}{R} \,, \\
\Rightarrow \varphi_H &= \frac{8}{13}U \,, \qquad \varphi_D = \frac{5}{13}U \,.
\end{aligned}$$

Je zrejmé, že potenciály v jednotlivých bodoch vyjdú pre akokoľvek škaredý obvod vždy priamo úmerné veličine U.

Z Ohmovho zákona pre celú súčiastku, $U = R_{\text{celk}} I_{\text{celk}}$, kde I_{celk} je celkový prúd pretekajúcu obvodom, určíme celkový odpor obvodu R_{celk}. Celkový prúd opäť získame z 1. Kirchhoffovho zákona (napr. pre bod A) ako súčet prúdov v ľavej hornej a ľavej dolnej vetve vyjadrených cez jedinú neznámu U,

$$\begin{aligned}
I_{\text{celk}} &= \frac{U - \varphi_H}{R} + \frac{U - \varphi_D}{2R} = \frac{9}{13}\frac{U}{R} \,, \\
R_{\text{celk}} &= \frac{U}{I_{\text{celk}}} = \frac{13}{9}R \,.
\end{aligned}$$

Príklad bolo tiež možné úspešne vyriešiť napríklad využitím aj 2. Kirchhoffovho zákona pomocou metódy slučiek. Metóda uzlových potenciálov je však efektívnejšia, nakoľko zavedenie potenciálov v uzloch okamžite rieši všetky slučkové rovnice. Okrem toho je samotné zapísanie rovníc oveľa menej náchylné na chybu v znamienku.[4]

Najčastejšie sa medzi správnymi riešeniami vyskytovali dva prístupy. Prvý prístup, použitie Kirchhoffových zákonov, spočíval v preskúmaní napätí a prúdov vo vetvách obvodu (po pripojení na fiktívny zdroj napätia). Tu bolo možné vybrať si jednu z dvoch spomínaných metód

[3] V prípade, že by z uzlov vytekali niekam von zo schémy nejaké známe prúdy, tak by sme ich jednoducho pridali na ľavú stranu príslušnej rovnice.

[4] Pozri ako sme zapísali rovnice pre body D a H – súčet vtekajúcich prúdov má byť nulový, pričom však zápis je veľmi prehľadný a nemá problém so závadzaním smeru prúdu v jednotlivých vetvách.

– metódu slučiek alebo (očividne menej známu) metódu uzlových potenciálov. Zopár z vás sa dokonca dopracovalo k výsledku aj bez toho, že by bolo treba Kirchhoffa menovať – po niekoľkých úvahach o napätiach vo vetvách (typu „napätie medzi dvoma bodmi musí byť rovnaké, nech idem po akejkoľvek ceste“) vám to vyšlo. Tento prístup spoľahlivo a priamočiaro vedie k správnemu výsledku.

Mnohí z vás sa rozhodli pre dôvtipnejší prístup – použili ste trik známy ako transfigurácia (nie v rokfortskom slova zmysle) trojice rezistorov zapojených do trojuholníka na trojicu iných rezistorov zapojených medzi tými istými uzlami do hviezdy (alebo naopak), pričom táto trojica bude hrať v obvode rovnakú úlohu ako predošlá. Tým sa vám podarilo zmeniť úlohu na inú (s rovnakým výsledkom), kde sa už dala súčiastka roztrhať na sériovo a paralelne zapojené kusy. Pre záujemcov je to pekne popísané napríklad na českej Wikipédii pod názvom „Přepočet hvězda trojúhelník“.

Najčastejšou príčinou omylu bolo to, že zadaný obvod nemožno (bez transfigurácie) jednoznačne rozdeliť na skupiny sériovo a paralelne zapojených rezistorov. Preto sa bez vyššie uvedených metód zrejme nezaobídeme.

Čo sa týka bonusovej úlohy, výsledok je samozrejme $47\,\mathrm{Hz}^{-1}$. [5] Žiaľ, iba prekvapivo malý počet z vás sa pustil do riešenia bonusovky, takže máte smolu, prišli ste o 0 bodov. A tí, ktorí pri nej zapli, si od nás vysluhujú záverečné požehnanie.

2.4 Zo suda trubka (opravovali Halucinka a Bzdušo)

Zo sudu vychádza v blízkosti dna vodorovná trubka dĺžky ℓ. Do trubky sú v pravidelných intervaloch nastrkané zvislé trubice po celej jej dĺžke. Hovorí sa, že hladina vody v týchto trubiciach bude smerom k otvorenému koncu trubky lineárne klesať, keďže v dôsledku trenia v trubici klesá tlak. Vysvetlite, či sa toto tvrdenie zakladá na pravde. Ak áno, čo by sa stalo v prípade, že by sme trubku predĺžili, ako je znázornené na obrázku? Prestala by voda tiecť?

Fyzikálne učebnice a internet zhodne tvrdia, že výška vody v trubiciach *bude naozaj lineárne klesať*. Nebudeme sa s nimi hádať. Vezmime toto tvrdenie ako (experimentálne overený) fakt a pokúsme pochopiť, prečo je to tak.[6]

Ako vieme, výška vodného stĺpca hovorí o tlaku vody v danom mieste potrubia. Platí

$$p = p_{\mathrm{atm}} + h\rho g\ .$$

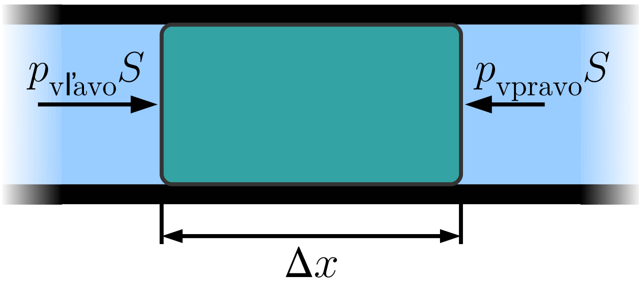
Pokiaľ výška h pozdĺž trubky lineárne klesá, musí pozdĺž trubky lineárne klesať aj tlak. Tieto tvrdenia sú de facto ekvivalentné. Avšak *čo znamená, že tlak v trubke lineárne klesá?*

Uvažujme vo vodorovnej trubke kus vody s dĺžkou Δx. Prierez trubky označme S. Keďže tlak v trubke klesá, tak na ľavej strane kusu vody bude väčší tlak $p_{\mathrm{vľavo}}$ než tlak na pravej

[5] Postup riešenia je však príliš triviálny na to, aby sme ho tu uvádzali, a preto riešenie prenechávame ako cvičenie pre čitateľa.

[6] Táto úloha je v princípe jasná, pokiaľ vysvetlenie javu človeku „napadne“. Po dostatočne dlhom čase bude iste napadnutý každý. Žiaľ, text o „zjavení zhora“ a čakaní na zázrak by sa viac ponášal na úryvok z Biblie, než na vzorové riešenie. Preto som ku vzoráku pristúpil trochu umelo, ako „nekonečne inteligentný hlupák“: Vysvetlenie nás nenapadne. Namiesto toho budeme z pozorovaní dôkladne robiť správne dedukcie, ktoré nás žiaľbohu, i keď niekedy je to aj chválabohu, ale tentokrát chválabohu, že žiaľbohu povedú k zdanlivo spornému záveru. Vzápätí odhalíme bezrozporné riešenie a v tom momente sa všetko vyjasní a budeme sa diviť, ako nás to mohlo nenapadnúť ihneď. Kto sa nechce hrať na hlupáka, ale chce sa hneď dozvedieť vysvetlenie, može hneď preskočiť na časť **Čo sa to teda v trubke naozaj deje?**.

strane p_{vpravo}. Z oboch strán teda na kus vody tlačí tlak tlakovou silou $F = pS$. Ak odčítame silu zľava a sprava, dostaneme výslednú silu F_{tlak} smerom doprava.



Obr. 3: Sily pôsobiace na kus vody vo vodorovnej trubke.

$$F_{\text{tlak}} = S(p_{\text{vľavo}} - p_{\text{vpravo}})$$

Nenulová pôsobiaca sila spôsobí zrýchlenie kusu vody. Na základe tvrdenia v zadaní je rozdiel tlakov $(p_{\text{vpravo}} - p_{\text{vľavo}}) \equiv \Delta p$ priamo úmerný dĺžke Δx (budem značiť $\Delta p \sim \Delta x$) a pritom nezávislý na polohe. Hmotnosť vody zjavne taktiež spĺňa $m \sim \Delta x$ a tento vzťah je tiež nezávislý od polohy.[7] To však znamená, že zrýchlenie kusu vody $a = \Delta p\, S/m$ vyjde nezávislé od voľby Δx. Čo je však zaujímavejšie, vyjde tiež nezávislé od polohy v trubke. To znamená, že *voda v celej vodorovnej trubici má rovnaké zrýchlenie.* A nielen to! Z rovnice kontinuity (nestlačiteľnosti) vieme aj to, že *voda v celej vodorovnej trubici má rovnakú rýchlosť* v jednom vybranom čase.[8]

Nakoľko nás zaujíma *v čase ustálený výtok* (pomalý pokles hladiny v sude zanedbávajúc), musí byť zrýchlenie vody v celej trubke *nulové.* Nulové zrýchlenie však znamená, že na kus vody v trubici pôsobí *nulová celková sila.* To možno zariadiť iba tak, že na každý kus vody bude pôsobiť *ďalšia sila*, ktorá bude mať rovnakú veľkosť ako F_{tlak} a opačný smer. Inak povedané, sila ktorá pôsobí proti smeru tečenia a ktorej veľkosť je úmerna dĺžke uvažovaného kusu vody Δx. Jedna takáto sila sa priam vsúva na jazyk: *Táto záhadná sila je odporová sila o steny trubice.*

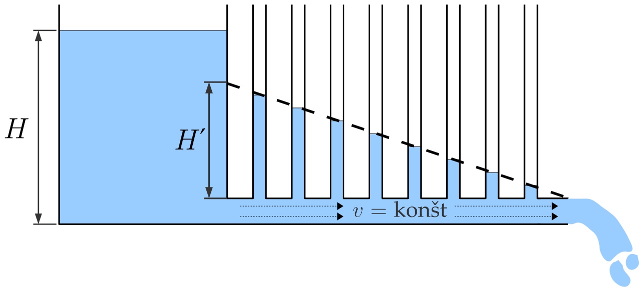
Čo sa to teda v trubke naozaj deje?

Predstavme si, že výtok trubky je upchatý zátkou. V istom momente zátku uvoľníme. Na vodu v trubici pôsobí tlakový rozdiel rovný výške vodného stĺpca H v sude, t.j. je roztláčaná silou $F = SH\rho g$. Voda začne zrýchľovať, čo má za následok rast odporovej sily o steny nádoby. Nárast odporovej sily má však za následok klesanie zrýchlenia. Po krátkom čase odporová sila narastie na hodnotu, pri ktorej už voda v trubke prestane zrýchľovať – tečenie dosiahlo *ustálený stav.* Voda bude tiecť trubkou konštantnou rýchlosťou.

Kebyže do trubky namontujeme zvislé trubice, tak priebeh výšky bude vyzerať nasledovne:

[7] Keby naša trubka nemala všade rovnaký prierez, tak by sme boli v kýbli. Vtedy by ani pokles tlaku pozdĺž trubky nebol konštantný!

[8] V skutočnosti má voda v trubke nezávisle od vzdialenosti od výtoku rovnaký *rýchlostný profil* – rýchlosť v závislosti od polohy v rámci prierezu trubky. Úvahám v texte podstatným pre príklad však tento detail nijako neublíži.



Obr. 4: Ako to bude naozaj vyzerať.

To znamená, že hneď za sudom (tj. na začiatku trubky) je hladina výška vodného stĺpca H' menšia, než výška vody H v sude. Tento rozdiel výšok (tlakov) spôsobí, že voda pri prechode zo suda do trubice naozaj zrýchli na rýchlosť (Torriceliho vzťah)

$$v = \sqrt{2g(H - H')} \,, \tag{1}$$

Táto ustálená rýchlosť je taká, aby v trubke nastala rovnováha síl, t.j.

$$F_{\text{odporová}} = SH'\rho g \,, \tag{2}$$

Vnútri trubky bude tlak lineárne klesať až na nulovú hodnotu pri otvore. Presný tvar $F_{\text{odporová}}$ nie je jednoduché určiť, zrejme však rastie s rýchlosťou vody, ktorá cez rovnicu (1) závisí od výšky H'. Rovnice (1) a (2) spolu s rovnicou pre odporovú silu v princípe umožňujú nájsť H' a v.

Čo sa stane, ak trubku predĺžime?

To už je jasné. Voda bude stále vytekať, len ustálené hondoty H' a v budú iné. Ako sa zmenia? V dlhšej trubke by sa pri zachovaní rýchlosti zväčšila odporová sila, ktorá by pri zachovanom H' začala prevyšovať silu $H'\rho g S$. Rovnováhu dosiahneme zmenšením rýchlosti. To totiž súčasne aj zmenší odporovú silu $F_{\text{odporová}}$, aj zväčší tlakovú silu $H'\rho g S$. Za zmienku tiež stojí, že výška vodného stĺpca pri ústí bude naďalej nulová, takže pokles vodnej hladiny na jednotku dĺžky sa zmenší. Na záver si skúste sami premyslieť, prečo v zadaní navrhnuté „zastavenie vytekania“ nie je nikdy riešením rovníc (1) a (2).[9]

2.5 Kmitajúce kalčeto (opravovali Cico a Poli, vzorák Jakub a Poli)

Bežný stolný futbal obsahuje líniu $N = 5$ obrancov v pravidelných rozostupoch $d = 10\,\mathrm{cm}$ od seba. Lukáš si vymyslel, že jeho obrana bude nepriestrelná, keď bude týmito obrancami zúrivo mykať zo strany na stranu. Šírka ihriska je $L = 50\,\mathrm{cm}$, polomer lopty je $R = 1\,\mathrm{cm}$. Hráčov považujte za zvislé valčeky s polomerom $H = 1\,\mathrm{cm}$. Lukášovo počínanie si predstavte pre jednoduchosť tak, že hýbe radom obrancov konštantnou rýchlosťou u dovtedy, kým nenarazí krajným hráčom do steny. Vtedy okamžite zmení orientáciu pohybu hráčov na opačnú s rovnakou rýchlosťou. Určte pre $u = 2v$ a pre $u = 4v$ pravdepodobnosť, že lopta vyslaná súperom kolmo na líniu obrancov rýchlosťou v prejde cez líniu obrancov bez dotyku!

[9] Hint: „Netiecť“ znamená $v = 0$. Vtedy $F_{\text{odporová}} = 0 \quad \Rightarrow \quad H' = 0$. Na druhej strane podľa (1) z $v = 0$ vyplýva, že $H = H'$. Odvodené tvrdenia si očividne odporujú.

Zdravím všetkých kalčetavých fanúšikov. Keďže už všetci určite horíte nedočkavosťou, pozrime sa rovno na to, čo sa dá všetko s úlohou povymýšľať. Kvôli jednoznačnosti ešte upresníme zadanie – rozostupmi obrancov d budeme rozumieť rozostupy ich stredov.

Predtým, než začneme čokoľvek rátať, ujasnime si, kedy sa lopta a obranca dotknú – bude to práve vtedy, ak by vzdialenosť stredu obrancu a stredu loptičky bola pri priamom pohybe loptičky v nejakom čase menšia ako $R + H = 2\,\mathrm{cm}$. Urobíme ešte taký trik – loptičku budeme považovať za bodovú a hráčom priradíme efektívny polomer $R' = R + H$. Efektívna šírka ihriska, ktorá hovorí o tom, v akom šírkovom rozmedzí sa môže pohybovať loptička, či hráči,[10] je potom $L' = L - 2R = L - 2H = 48\,\mathrm{cm}$.

Pozrime sa najprv na situáciu, keď sa rad obrancov nehýbe. Ako rozumne definovať pravdepodobnosť toho, či loptička prejde alebo neprejde? Keďže jej pohyb uvažujeme priamočiary a kolmý na líniu obrancov, zrejme to bude jednoducho pomer šírky zabratej (efektívnymi) obrancami a (efektívnej) šírky ihriska. Obránená šírka ale závisí od polohy obrancov. Ak sú obaja krajní (efektívni) obrancovia (= ich stredy) ďalej ako R' od efektívneho kraja ihriska, tak pravdepodobnosť p čistého priestrelu obrancov bude

$$p = \frac{L' - 5 \cdot 2R'}{L'} \approx 58{,}3\% \,.$$

Ak máme jedného z obrancov pri kraji, tak obráni iba R' efektívnej šírky, teda pravdepodobnosť priestrelu vyjde

$$p = \frac{L' - 4 \cdot 2R' - R'}{L'} = 62{,}5\% \,.$$

Čo nám to hovorí o výsledku nášho príkladu pre stojacich obrancov? Ak prijmeme predpoklad,[11] že čím rýchlejšie mykáme, tým menšia je šanca nestretnúť loptičku, tak by výsledok nemal byť väčší ako tieto čísla.[12]

Teraz už prejdeme k úlohe v takom šate, ako bola zadaná. Na riešenie sa núkajú viaceré možnosti – môžeme riešiť pohyb obrany a loptičky a overovať, kedy je a kedy nie je splnená podmienka dotyku – to znie dosť nepríjemne… Ďalej sa dá na problém pozrieť očami obrancov, ktorí vidia ako sa lopta myká zo strany na stranu a popritom sa blíži. My sme si zvolili ekvivalentný popis z pohľadu loptičky, ktorá vidí mykať sa obrancov zo strany na strany blížiac sa k nej.

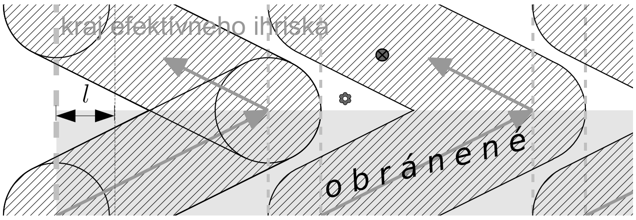
Máme teda stojacu efektívnu (t.j. bodovú) loptičku a pohyb obrannej línie bude taký cikcakovitý zo strany na stranu. Zamyslime sa nad tým, čo to znamená pre našu loptičku. Loptička prejde cez líniu obrancov, ak sa k nej v žiadnom čase žiadny z obrancov nepriblíži na vzdialenosť menšiu ako R'. Ako to zistíme? Keď zafixujeme čas, tak nám stačí zakresliť polohu obrancov ako kruhy s polomerom R' a zodpovedať, či sa bodová loptička nachádza v niektorom z nich. Pre všetky časy naraz sa to dá „jednoducho“ urobiť zakreslením cik-cakovitých čiar pohybu obrancov z pohľadu loptičty, ktoré „obalíme“ 2 cm širokou „nárazníkovou zónou“ – zónou, ktorá pre loptičku znamená kolíziu, viď obrázok nižšie. Ak by sme poznali úplnú informáciu o stave na ihrisku v nejakom čase (napr. v čase odpalu), tak by sme si mohli dať značku, kde je loptička, a mohli by sme dokresliť trajektórie obrancov z jej pohľadu, ktoré by sme obalili nárazníkovou

[10] Vďaka rovnosti $R = H$ je efektívna šírka pre loptičku aj pre hráčov rovnaká.

[11] Ktorý sa dá ručne-stručne overiť a je pravdivý.

[12] Kto sa chce pohrať, tak môže overiť, že stredná pravdepodobnosť priestrelu pri náhodnej polohe obrancov je $p = 19/32 \approx 59{,}4\%$.

zónou a s istotou by sme vedeli povedať, či lopta prešla bez dotyku alebo nie – tak napr. lopta v mieste kvetinky na obrázku by prešla a lopta v mieste žiarovky nie. Keď by sme poznali iba vzdialenosť l lopty od efektívneho okraja, tak by sme pravdepodobnosť čistého priestrelu počítali ako podiel dĺžky čiarkovanej línie mimo obránenej zóny ku celkovej dĺžke línie. Ak nepoznáme ani to (t.j. v našom prípade), tak pravdepodobnosť priestrelu je jednoducho plocha mimo obránenej zóny ku celkovej ploche.

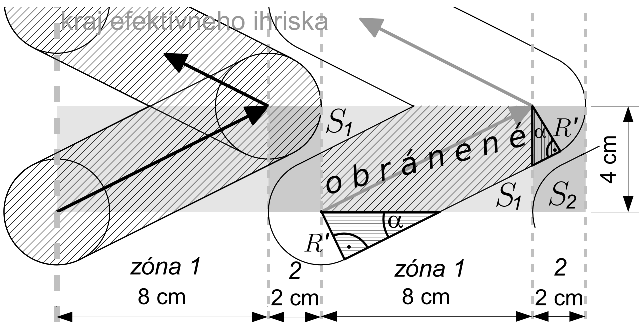


Obr. 5: Hráči v pohybe

Vďaka periodičnosti pohybu obrancov stačí zrátať pravdepodobnosť pre jednu periódu. Pri detailnejšom pohľade sa ukazuje, že stačí poriešiť polperiódu (= zašedený pás v obrázku hore).

Tak hor sa do toho. Tuto končí fyzika, a začína geometria. Neznamená to však vôbec, že by tu bolo vhodné prestať čítať. Ako bude vo všeobecnosti vyzerať „nárazníková“ zóna? Keby sa obrancovia pohybovali iba po priamkach (nie lomenej čiare), tak by to boli také rovnobežné pásy. Problém je s miestom, kde sa obrancovia otáčaju. Na vnútornom ohybe budú pásy správne stanovovať, kde loptička nesmie byť. Vonkajšok bude kruhovitý, pozri obrázok hore. V rôznych režimoch – t.j. pre rôzne pomery u/v sa oblasti môžu rozlične prekrývať.[13]

Pozrime sa na prípad $u = 2v$. Od kraja po kraj prejdú hráči $L' - 4d = 8\,\mathrm{cm}$. Počas tohoto času sa línia priblíži k loptičke o 4 cm.



Obr. 6: Prípad dvojnásobnej rýchlosti

Uhol α sa najlepšie určí zo zašedeného obdĺžnika v zóne 1, $\operatorname{tg}\alpha = v/u = 0{,}5$. Celková plocha zodpovedajúca polperióde je $L' \times 4\,\mathrm{cm} = 192\,\mathrm{cm}^2$. Celková neubránená plocha vo všetkých piatich zónach typu 1 je $10S_1$. Celková neubránená plocha vo všetkých 4 (!!) zónach typu 2 je $4(8\,\mathrm{cm}^2 - 2S_2)$.

[13] Vďaka rovnostiam $R = H$ a $L = (N+1)d$ existujú iba 3 rôzne režimy prekryvov, nás z nich budú zaujímať iba tie 2, do ktorých patria $u/v = 2, 4$.

Výpočet sa nám teda redukuje na výpočet plôch S_1 a S_2. Plocha S_1 sa dá s využitím šrafovaných trojuholníčkov spočítať takto,

$$S_1 = \frac{1}{2}\left(8\,\mathrm{cm} - \frac{R'}{\sin\alpha}\right)\left(4\,\mathrm{cm} - \frac{R'}{\cos\alpha}\right) \approx 3{,}1115\,\mathrm{cm}^2 \ .$$

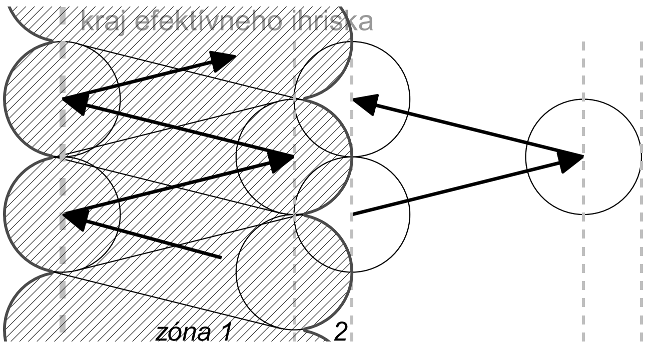
Plocha S_2 je súčet obsahu vertikálne šrafovaného trojuholníčka a kruhového výseku s uhlom $90^\circ - \alpha$,

$$S_2 = \frac{1}{2}R'^2 \operatorname{tg}\alpha + \pi R'^2 \frac{90^\circ - \alpha}{360^\circ} \approx 3{,}2143\,\mathrm{cm}^2 \ .$$

Celkovo je teda pravdepodobnosť priestrelu p rovná

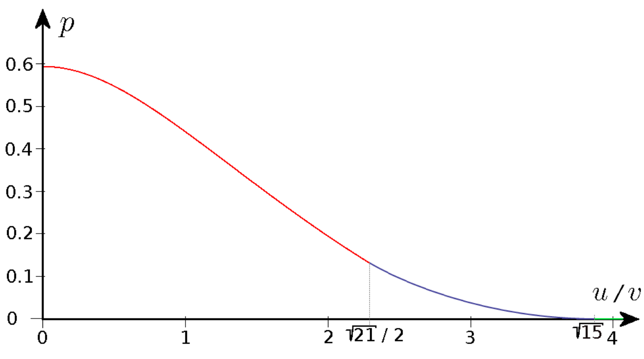
$$p = \frac{10S_1 + 4(8\,\mathrm{cm}^2 - 2S_2)}{192\,\mathrm{cm}^2} \approx 19{,}48\% \ .$$

Tento prípad sme teda úspešne rozlúskli. Pozrime sa na $u = 4v$. Tu nám bude stačiť veľmi jednoduchá úvaha. Za čas, za ktorý hráči prejdú 8 cm doboku, sa línia obrancov priblíži k loptičke o 2 cm. Z obrázka nižšie vidíme, že celý „priestoročas“ je obránený, preto pravdepodobnosť prejdenia bez dotyku je v tomto prípade nulová.



Obr. 7: Prípad štvornásobnej rýchlosti

Naozajstným masochistom zaiste nestačí poznanie p-čka iba pre pár konkrétnych hodnôt vstupných parametrov u/v, ale chcú vidieť celú funkčnú závislosť. Tá vyjde zložená z 3 kriviek (jedna pre každý z rôznych režimov prekryvov), viď obrázok nižšie:



Obr. 8: Pre masochistov

Ešte by som mal poznámku k významu pre vývoj kalčeta. Pravdepodobnosť dotyku s obrancom, nič nehovorí o pravdepodobnosti gólu. Spomeňme si, že keď sme riešili prípad stojacich hráčov, tak sme určovali šírku toho, kade loptička prenikne cez obranu – väčšina tejto šírky je však zákonite mimo bránky. V tomto prípade by teč mohol pomôcť skórovaniu.

Toľko teda z mojej strany, hrajte aj naďalej. priklad5.tex

2.6 Postriebrená šošovka (opravovali Lukáš a Marika)

Majme tenkú vypuklo-vypuklú šošovku, o polomeroch zakrivenia R_1, R_2. Tá je pokrytá polopriepustným zrkadlom z oboch strán. Index lomu materiálu, z ktorého je šošovka vyrobená, je n. Určte ohniskovú vzdialenosť pre lúče práve jedenkrát odrazené od oboch povrchov.

Na prvý pohľad sa zdá, že ide o zložitú optickú sústavu. Úloha sa však stane veľmi jednoduchou, keď si uvedomíme, že sa dá rozložiť na štyri ľahko popísateľné optické deje. Rozoberieme dva prístupy k riešeniu, jeden z nich využíva dva základné princípy optiky a trocha geometrie, druhý využíva dva nie až tak triviálne vzorce.

Ako to v geometrickej optike býva, budeme vyšetrovať len lúče idúce blízko optickej osi (paraxiálne) a ako hovorí zadanie, šošovka je tenká. Tieto dva predpoklady nám umožnia pracovať s pomerne estetickými rovnicami.

Najskôr si ukážeme druhý menovaný postup. V riešení budeme potrebovať dva vzťahy, prvý popisuje odraz lúča na dutom zrkadle:

$$\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{2}{R} \ ,$$

druhý lom na guľovej lámavej ploche:

$$\frac{n_1}{s} + \frac{n_2}{s'} = \frac{n_2 - n_1}{R} \ ,$$

kde s je vzdialenosť predmetu, s' vzdialenosť obrazu, R polomer krivosti guľovej lámavej plochy, n_1 index lomu vonkajšieho prostredia a n_2 index lomu materiálu za guľovou lámavou plochou (teda do hĺbky neohraničenej šošovky). [14]

Lúč, ktorý nás zaujíma, ide rovnobežne s optickou osou (prichádza z nekonečna) a láme sa najskôr na stene šošovky s polomerom R_2, pokračuje vo vnútri šošovky až kým nepríde k druhej stene, na ktorej sa odrazí ako na zrkadle. Potom sa rovnako odrazí na prvej stene, vracia sa vnútrom šošovky k druhej, kde sa tentoraz zalomí a pokračuje mimo šošovky vzduchom až do svojho ohniska. Rovnicami budeme popisovať postupne lom, odraz, odraz a lom.

Keď sme si vyjasnili, čo chceme počítať, môžeme dosádzať. Najskôr prvý lom: $s \to \infty$, teda $1/s \to 0$, vonkajšie prostredie je vzduch s indexom lomu 1 a polomer lámavej plochy R_2,[15]

$$\frac{n}{s'} = \frac{n-1}{R_2} \qquad \Rightarrow \qquad s' = \frac{nR_2}{n-1} \ ,$$

[14] Ak vás zaujíma odvodenie týchto vzťahov, skúste sa pohrať s postupom načrtnutým v ďalšom riešení tejto úlohy, alebo sa pozrite do Feynmanových prednášok.

[15] Keby ste ako prvú lámavú plochu zobrali našu zadnú s polomerom R_1, tak by ste dostali rovnaký výsledok, lebo aj zákony lomu aj odrazu sú pre lúč idúci jedným smerom a pre protibežný rovnaké.

teda lom vytvorí obraz vo vzdialenosti $nR_2/(n-1)$. Tento obraz bude predmetom pre nasledujúci odraz. Tu využijeme, že šošovka je tenká a za vzdialenosť predmetu dosadíme priamo túto hodnotu. Musíme si však dať pozor, pretože predmet je za zrkadlom. To vôbec nevadí, do rovnice dosadíme za s nie vypočítané s', ale $-s'$ (znamienková konvencia)

$$-\frac{n-1}{nR_2}+\frac{1}{s''}=\frac{2}{R_1} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{1}{s''}=\frac{2}{R_1}+\frac{n-1}{nR_2}\ .$$

Obraz z tohto odrazu bude predmetom pre nasledujúci odraz – posledný výsledok dosadíme do rovnice pre zrkadlo, opäť so znamienkom $-$, z rovnakého dôvodu ako v predchádzajúcom prípade,

$$-\frac{2}{R_1}-\frac{n-1}{nR_2}+\frac{1}{s'''}=\frac{2}{R_2} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{1}{s'''}=\frac{2}{R_2}+\frac{2}{R_1}+\frac{n-1}{nR_2}\ .$$

Nasleduje posledný lom („mínus“ posledný výsledok pekne do rovnice pre lom na guľovej ploche a vypočítaná poloha obrazu bude hľadaná ohnisková vzdialenosť),

$$-n\left(\frac{2}{R_2}+\frac{2}{R_1}+\frac{n-1}{nR_2}\right)+\frac{1}{s''''}=\frac{1-n}{-R_1}\ ,$$

z čoho po niekoľkých úpravách dostaneme

$$f=s''''=\frac{1}{3n-1}\frac{R_1R_2}{R_1+R_2}\ .$$

Iné riešenie využíva Snellov zákon lomu, známe

$$n_1\sin\alpha=n_2\sin\beta\ ,$$

a pre odrazy ešte známejšie uhol dopadu = uhol odrazu.

Pozrime sa na prvý lom. Nech lúč dopadá na šošovku vo výške h od optickej osi rovnobežne s optickou osou. Kolmicou na povrch šošovky je v tomto bode priamka spájajúca stred krivosti tejto plochy šošovky a bod dopadu. Táto priamka zviera s optickou osou uhol α_2, pre ktorý platí

$$\alpha_2\approx\sin\alpha_2=\frac{h}{R_2}\ .$$

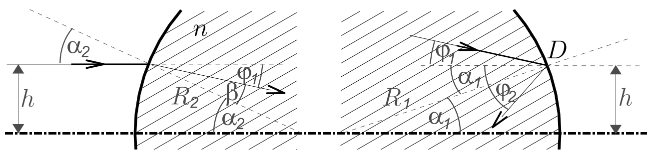
Zjednodušenie $\alpha_2\approx\sin\alpha_2$ si môžeme dovoliť, lebo uvažujeme paraxiálne lúče (blízko optickej osi) a uhly sú malé. Lúč sa láme ku kolmici podľa Snellovho zákona

$$\alpha_2=n\beta\ ,$$

kde sme opäť použili zanedbanie sínusu pre malé uhly a zobrali sme do úvahy, že vonkajšie prostredie je vzduch s indexom lomu 1 a index lomu materiálu šošovky je n. Lúč bude po lome zvierať s optickou osou uhol

$$\varphi_1=\alpha_2-\beta=\alpha_2\left(1-\frac{1}{n}\right)\ ,$$

viď obrázok (výrazne zveličenými uhlami sa nenechajte zmiasť – v skutočnosti uvažujeme maličké uhly).



Obr. 9: Lom lúča

Lúč vo vnútri šošovky dopadá na druhú plochu do bodu D opäť vo výške h (pretože šošovka je tenká) a s optickou osou zviera vypočítaný uhol φ_1. Kolmicou na povrch šošovky, na ktorom sa odráža je priamka spájajúca stred druhej plochy šošovky s bodom D; s optickou osou zviera uhol $\alpha_1 \approx h/R_1$. Uhol, ktorý zviera dopadajúci lúč s kolmicou je teda $\varphi_1 + \alpha_1$, rovnaký uhol len z opačnej strany bude s kolmicou zvierať aj odrazený lúč a s optickou osou bude odrazený lúč zvierať uhol

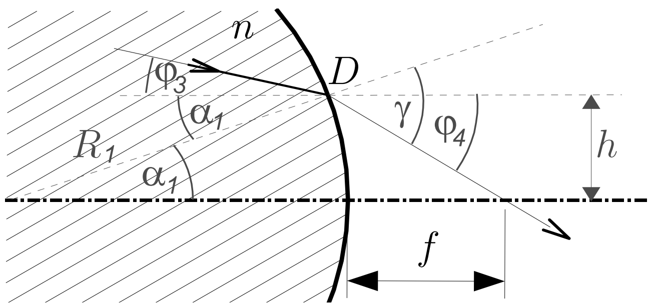
$$\varphi_2 = \varphi_1 + 2\alpha_1 = \alpha_2 \left(1 - \frac{1}{n}\right) + 2\alpha_1 \ .$$

Druhý odraz je zrkadlovo symetrický s prvým (znova vo výške h, len s uhlom α_2 namiesto α_1 a uhlom φ_2 namiesto φ_1), preto bude odrazený lúč s optickou osou zvierať uhol

$$\varphi_3 = \varphi_2 + 2\alpha_2 = 2\alpha_1 + \alpha_2 \left(3 - \frac{1}{n}\right) \ .$$

Posledný lom prebieha na guľovej ploche s polomerom R_1 a lúč prechádza z opticky hustejšieho do opticky redšieho prostredia. Snellov zákon má pre tento prípad tvar

$$n(\varphi_3 + \alpha_1) = \gamma \ .$$



Obr. 10: Lom z opticky hustejšieho do opticky redšieho prostredia

Zalomený lúč zviera s optickou osou uhol

$$\varphi_4 = \gamma - \alpha_1 = n(\varphi_3 + \alpha_1) - \alpha_1 = (3n - 1)(\alpha_1 + \alpha_2) \ , \tag{3}$$

a pritom vychádza zo šošovky vo výške h. Optickú os pretne vo vzdialenosti f od šošovky, čo je práve hľadaná ohnisková vzdialenosť. Platí[16]

$$\varphi_4 \approx \sin\varphi_4 = \frac{h}{f} \ .$$

[16] Opäť sa nenechajte oklamať ilustračným obrázkom – šošovku uvažujeme tenkú, takže všetky vzdialenosti v šošovke v smere pozdĺž optickej osi sú zanedbateľné (aj voči f).

Keď toto spolu s podobnými vzťahmi pre α_1 a α_2 dosadíme do rovnice (3) a vyjadríme f, dostaneme

$$f = \frac{1}{3n-1}\frac{R_1R_2}{R_1+R_2}\ ,$$

v zhode s výsledkom prvého postupu.

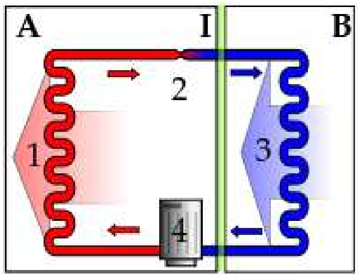
Akokoľvek sa tento druhý spôsob výpočtu môže zdať nešikovný, umožňuje (možno prácne, ale predsa) kontrolovane a výpočtovo jednoducho riešiť aj oveľa zložitejšie optické sústavy.

Vypočítaná ohnisková vzdialenosť platí len pre lúče, ktoré sa vo vnútri šošovky odrazili práve dvakrát – raz na každom povrchu. Takáto šošovka má v skutočnosti veľa ohnísk pre rôzne počty odrazov, niektoré sú vpravo a niektoré vľavo. K tomuto efektu dochádza aj u bežných šošoviek, pretože na ich povrchoch dochádza k lomu aj odrazu, čo prispieva k zobrazovacej chybe šošovky.

2.7 Chladnička (opravovala Tinka, vzorák Samo)

Chcem mať doma chladničku. V chladničke budem udržiavať stálu teplotu štyri stupne nad nulou. V kuchyni, kde chladnička bude stáť, je za horúcich letných dní teplota aj 24 °C. Poraďte mi, ako si mám takú chladničku postaviť a určte najmenšiu možnú spotrebu elektrickej energie najideálnejšou možnou chladničkou, ak jej koeficient prestupu tepla je $k = 20\,\mathrm{WK^{-1}}$.

Chladnička je zariadenie, ktoré je schopné chladiť. Každý ju má doma. V zadaní sme však boli zvedaví, či by ste boli schopní vymyslieť nejaký princíp, na základe ktorého by ste si jednu mohli zostrojiť. My si v tomto vzorovom riešení jeden najjednoduchší predstavíme, treba však upozorniť, že od v praxi používaných riešení ma ďaleko. Koho viacej zaujíma praktická stránka veci, môže použiť Google a na internete si určite potrebné informácie nájde.



Obr. 11: Chladnička

Naše zariadenie bude obsahovať kompresor, studený radiátor, teplý radiátor a plyn. Chladiaci cyklus bude fungovať nasledovne:

(i) Plyn ohriaty na teplotu chladničky (4 °C) sa stlačí kompresorom na zlomok objemu, pri tomto stláčaní kompresor koná na plyne prácu a tá sa prejaví zvýšením jeho vnútornej energie – plynu vzrastie teplota na 60 °C

(ii) Plyn preženieme teplým radiátorom, kde odovzdá svoje teplo okoliu (to je tá vec vzadu na chladničke). Po prechode radiátorom má plyn teplotu okolia 24 °C.

(iii) Plyn roztiahneme kompresorom, rozpínajúci sa plyn pritom koná prácu nad kompresorom, čo sa prejaví jeho ochladením a poklesom teploty na $-20\,°\mathrm{C}$.[17]

(iv) Plyn preženieme studeným radiátorom vnútri chladničky aby chladničku ochladil. (tak veľa chladu v jednej vete) Tým sa celý cyklus uzatvára.

Prejdime k druhej časti, minimálnej spotrebe chladničky. Naša chladnička musí vykompenzovať stály odlev tepla $k\Delta T$, musí mať teda zodpovedajúci chladivý výkon. Koľko elektrickej energie však chladnička minie, aby ho dosiahla? Ukážeme si, že optimálnym riešením je obrátený Carnotov stroj. Normálny Carnotov stroj odoberie z teplejšieho telesa teplo $Q + W$, vykoná prácu W a chladnejšiemu telesu odovzdá teplo Q, pričom platí rovnosť

$$W/(Q + W) = 1 - T_2/T_1\,,$$

kde T_2 je teplota chladnejšieho a T_1 teplejšieho telesa.

Carnotov stroj je však vratný, môžeme ho pustiť bežať odzadu. Vtedy chladnejšiemu telesu odoberie teplo Q, spotrebuje prácu W a teplejšiemu telesu odovzdá teplo $Q + W$. Keď trochu predošlú rovnosť upravíme, vidíme:

$$W/Q = T_1/T_2 - 1\,.$$

No a rovnaký pomer bude platiť aj pre výkony, pre spotrebu Carnotovej chladničky preto dostávame vzťah:

$$P = k(T_1 - T_2)^2/T_2 \approx 30\,\mathrm{W}\,.$$

Ostáva pred nami najťažšia otázka a síce, či sa nedá vymyslieť niečo lepšie. Nečakane, odpoveď znie „nedá“. Zapojme chladničku dokopy s vhodným Carnotovym strojom tak, aby sa teplota chladnejšieho z telies nemenila. Ak by chladnička mala účinnosť obráteného Carnotovho stroja, znamenalo by to obyčajné anulovanie účinku oboch strojov. Práca jedným strojom vykonaná je druhým strojom spotrebovaná, jeden stroj teplo prijíma, druhý odovzdáva. Ak však bude chladnička účinnejšia, znamená to, že spotrebuje menej práce, než Carnot vykoná. Keby sa to dalo, znamenalo by to porušenie druhého zákona termodynamického a možnosť vytvoriť stroj pracujúci len ná úkor ochladzovania vesmíru. To sa však dosiaľ nikomu nepodarilo a preto vládne všeobecné presvedčenie, že to nejde.

Dobrú noc deti!

[17] Keby bolo mimo kompresora vákuum, tak by kompresor samotný nemusel konať žiadnu prácu pri tomto deji.