



Fyzikálny korešpondenčný seminár

27. ročník, 2011/2012

FKS, KTFDF FMFI UK, Mlynská dolina, 84248 Bratislava

e-mail: otazky@fks.sk

web: <http://fks.sk>

Vzorové riešenia 1. kola zimnej časti 2011/2012

1.1 B0 – Kúzelný deduško kupuje auto (opravoval Miso, vzorák Miso)

Kúzelný deduško sa rozhodol po mnohých rokoch v rozprávkach modernizovať svojho tátoša a vymenil ho za trabanta. Jeho nový trabant má päť prevodových stupňov, motor, ktorý zvláda pracovať na otáčkach od tisíc po dvetisíc a maximálna rýchlosť na prvom prevodovom stupni je desať kilometrov za hodinu. Na základe týchto údajov urobte čo najlepší horný odhad maximálnej rýchlosti auta kúzelného deduška.

Na základe údajov v zadaní máme určiť *horný odhad* maximálnej rýchlosti auta. To znamená, že máme vymyslieť taký model auta, ktorý spĺňa požiadavky zo zadania a spomedzi najvyšších rýchlostí všetkých mysliteľných spĺňajúcich zadanie je jeho najvyššia rýchlosť najvyššia.¹

Motor auta roztáča hriadeľ, a ten pomocou ozubených prevodov roztáča kolesá auta. Rôznym počtom zubov na kolesách a na hriadeli je zabezpečená rôzna rýchlosť otáčania sa kolies a motora, a to v pomere počtu zubov. Pri samotnom preradení sa tento pomer zmení tým, že sa jedno ozubené koliesko vymení za druhé, a tým sa zmení aj pomer otáčok motora a kolies auta.

Počas preradenia sa nemôže zmeniť rýchlosť auta (auto nedokáže zrýchliť ani spomaliť za taký krátky čas). Čo sa mení, sú preto otáčky motora, a nie otáčky kolies. Zamyslime sa preto, ako bude fungovať auto, ktoré nám umožní dosiahnuť čo najvyššie otáčky kolies, a teda aj rýchlosť.

Na prvom prevodovom stupni pri 2000 rpm ide auto rýchlosťou 10 km/h. Pri preradení klesnú otáčky na 1000 rpm (nižšie nemôžu). Auto na druhom stupni postupne zrýchľuje na maximálne otáčky a dosiahne rýchlosť 20 km/h. Toto sa opakuje aj na treťom, štvrtom a piatom stupni. Auto takto zdvojnásobí svoju rýchlosť celkom štyrikrát a dosiahne výslednú maximálnu rýchlosť:

$$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 10 \text{ km/h} = 160 \text{ km/h}$$

Mnohí z vás si povedali, že údaje v zadaní nie sú dostačujúce a zistili si rôzne údaje z internetu. Tým pádom riešili inú úlohu, ktorá, aj keď bola správne vyriešená, nemohla byť ocenená plným počtom bodov. Žiadne ďalšie väčšie problémy sa nevyskytli.

1.2 B1 – Ako Tinka vo vode (opravoval Maťo Ch, vzorák Maťo Ch)

Tinka je ako ryba – nerada chodí po súši, radšej pláva vo vode. Sedí si pri jabloni na jednom brehu rieky a dostala chuť na čerešne – presne oproti jabloni na druhom brehu rieky. Zistíte s presnosťou na jeden meter, ako najbližšie sa vie dostať k čerešni bez toho, aby spravila čo i len krok po súši, ak poznáte nasledovné údaje:

- Tinka pláva rýchlosťou 3 km/h;

¹Túto vetu si čítajte dovtedy, kým jej neporozumiete.



Seminár podporujú:



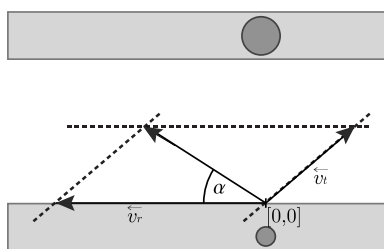
- voda v rieky sa pohybuje rýchlosťou 5 km/h;
- čerešňa je presne oproti jabloni vzhľadom na rieku;
- rieka je široká 300 m.

V tomto príklade bolo treba vyriešiť dva problémy:

1. nájsť rovnicu, ktorá popisuje náš problém,
2. zistiť, pre ktoré hodnoty premenných nám dáva najmenšiu hodnotu vzdialenosti Tinky od čerešne.

Po chvíli zamyslenia prideme na to, že Tinka sa oplatí plávať stále rovnakým smerom. Rieka je totiž všade rovnaká. Úlohou teda ostáva určiť optimálny smer, ktorým má Tinka vyplávať. Pokúsime sa preto nájsť rovnicu popisujúcu vzdialenosť Tinky od čerešne po preplávaní rieky v závislosti od smeru, ktorým Tinka vyplávala.

Aby sme mohli túto rovnicu nájsť, musíme najprv pochopiť, ako sa pohybuje Tinka vzhľadom na breh, keď pláva v tečúcej rieke. Keby neplávala a iba by sa nechala unášať riekou, mala by rýchlosť v_t rovnú rýchlosti vody v rieke v_r . Keďže však ešte sama v rieke pláva, jej výsledná rýchlosť v smere rovnobežnom s brehom bude súčtom (resp. rozdielom) rýchlosti vody v rieke a jej rýchlosti v tomto smere, viď obr.:



Obr. 1: Tinka v tom vie plávať.

Na základe tejto úvahy môžeme zostaviť sústavu rovníc popisujúcu polohu Tinky v čase doplávania:

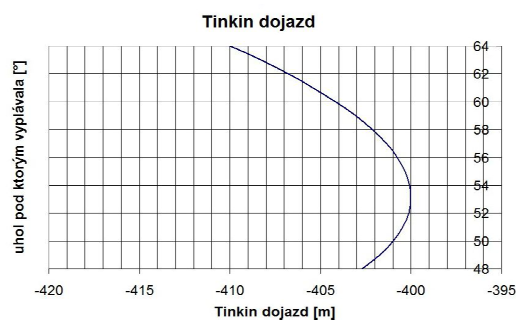
$$\begin{aligned}x &= (v_t \cos \alpha - v_r)t \\l &= (v_t \sin \alpha)t\end{aligned}$$

Vyjadrením času z druhej rovnice a dosadením do prvej dostávame pre závislosť x od α vzťah:

$$x = l / \operatorname{tg} \alpha - \frac{lv_r}{v_t \sin \alpha} \quad (1)$$

Juchú! Máme rovnicu, ktorá nám vraví, kam Tinka dopláva, ak vieme, pod akým uhlom vypláva. Tým sme vyriešili problém 1. z úvodu vzoráku a môžeme sa teda pustiť do riešenia problému 2.

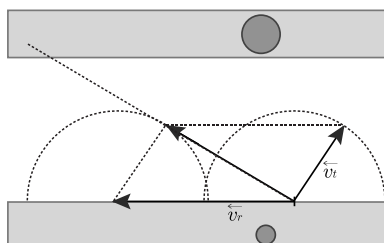
Treba nájsť také α , po dosadení ktorého do rovnice (1) nám vyjde najmenšie x . Jeden spôsob, ako takéto x nájsť, je nakresliť si graf závislosti x od α (napr. v programe *LibreOffice Calc*), pozrieť sa kde má približne funkcia minimum a potom zazoomovať graf natoľko, aby sme dostali presnosť požadovanú zadáním. Správna hodnota je 400 m, ako môžete vidieť na grafe:



Obr. 2: Kam dopláva?

Poznámky k riešeniam: Ak dáte do riešenia graf, ktorý má dieliky po 100 m, určite tým, že v takomto dieliku má funkcia minimum, nedosahujete presnosť 1 m. Keď však pošlete graf s dielikmi 1 m, ktorý zobrazuje minimum funkcie, je to už OK. Tentokrát som za to body nestráhal ale nabudúce si na to dajte pozor.

Niektorí z vás prišli aj na geometrické riešenie úlohy pomocou nasledujúceho obrázka:



Obr. 3: „Nedotýkajte sa mojich kruhov!“

Koncový bod rýchlosti v_t bude ležať určite niekde na pravej kružnici. Zostrojíme si výslednicu rýchlostí v_t a v_r , ktorá bude určite ležať na ľavej kružnici. Nakoľko Tinka pláva v smere výslednice rýchlostí, na druhý breh dopláva najbližšie k čerešni práve vtedy, keď bude vektor jej výslednej rýchlosti dotyčnicový k ľavej kružnici. (Rozmyslite si, prečo!)

1.3 B2 – Kyvadlo (opravoval JAno, vzorák Marika)

Marika sa rozhodla vyrobiť si betónové kyvadlo z veľmi dlhej betónovej tyče dĺžky l , ktorú našla vo FKS. Na koniec kyvadla chce pripevniť betónovú guľu, tú však najskôr musí objednať v betonárstve (vo FKS sme nemali). Ak označíme hustotu betónu ρ a medzu pevnosti v ťahu σ , akú najväčšiu guľu môže Marika objednať r , aby sa kyvadlo dalo zavesiť a nerozpadlo sa?

Medza pevnosti v ťahu σ udáva, akou maximálnou silou F môžeme pôsobiť na jednotkovú plochu prierezu materiálu S , aby sa tento nepoškodil. Teda platí $\sigma = F/S$. Má rozmer tlaku,

čo by sa dalo preložiť ako „hrubšie lano (s väčším prierezom) unesie viac“. Toto je kľúčová myšlienka príkladu.

Keď kyvadlo zavesíme, začne každý jeho kúsok ťahať nadol vlastná tiaž. Navyše všetky tieto kúsky začnú pôsobiť na ostatné a ťahať ich so sebou. Najhoršie na tom bude chudák kúsok na vrchu, lebo na ňom visia všetky ostatné.

Horný koniec s prierezom tyče musí teda znášať ťažobu celého kyvadla. Aby to vydržal, musí byť tlak (ťah) v ňom nanajvýš taký, aký materiál ešte znesie, teda $\sigma = F/S$.

Sila F , ktorá tu pôsobí, je celková tiaž kyvadla $F = m \cdot g$, kde m je hmotnosť kyvadla a g je tiažové zrýchlenie. Hmotnosť kyvadla je súčinom jeho hustoty a objemu $m = \rho \cdot V$. Objem kyvadla je súčtom objemu FKS-ákej tyče – valca a betonárskej gule $V = V_{\text{valca}} + V_{\text{gule}}$. Na vzorčeky pre objemy valca a gule siahneme do pamäti alebo do tabuliek. Podľa zadania a obrázka dĺžku tyče označíme l , jej prierez² S a polomer gule označíme r . Dostaneme tak $V = l \cdot S + 4/3\pi r^3$.

Toto dosadíme do pôvodného vzorca pre pnutie a získame:

$$\sigma = F/S = \rho \cdot V \cdot g/S = \rho \cdot (l \cdot S + 4/3\pi r^3) \cdot g/S$$

Z tohto vzťahu si teraz stačí osamostatniť to, čo nás zaujíma – polomer gule r . Po jednoduchých úpravách rovnice dostaneme výsledok³:

$$r = \sqrt[3]{\left(\frac{\sigma}{\rho g} - l\right) \frac{3}{4\pi} S}$$

Trikom v príklade bolo nezabudnúť na tiaž ťažkej betónovej tyče z FKS. Taktiež je vhodné si uvedomiť, že ak je tiaž závesu zanedbateľná, kritický je najmenší prierez – najslabšie ohnivko reťaze.

1.4 B3, A1 – Podtlak (opravoval Marek K, vzorák Miso)

Odmerajte, aký najväčší podtlak dokážete vytvoriť vo svojich ústach.

Chceme pomerať, aký najmenší tlak dokážeme vytvoriť v ústach, tak si zhotovíme vhodnú aparaturu. Princíp našej aparatury bude založený na vzťahu $p_a = p_u + p_h$, ktorý hovorí, že atmosférický tlak je rovný súčtu tlaku v našich ústach a hydrostatického tlaku. V praxi bude teda aparatura vyzeráť ako zvislá rúrka, ktorá bude dole ponorená do nádoby s vodou⁴, pričom na hornom konci budeme nasávaním z trubice vytvárať podtlak, pokiaľ to len pôjde. Po dosiahnutí maximálnej výšky ju odmeriame od hladiny v dolnej nádobe a vyjadríme tlak v našich ústach. Teda pre hydrostatický tlak stĺpca platí $p_h = h\rho g$, z čoho po dosadení do prvého vzťahu dostaneme⁵ $p_u = p_a - h\rho g$.

Meraní je vhodné urobiť viac, aby sa neskôr pri priemerovaní hodnôt „vypriemerovali“ náhodné chyby. Tie môžu vzniknúť ľudským faktorom, rôzne zatrasenou kofolou, ... Prejavujú sa rozptylom nameraných hodnôt okolo určitej strednej priemernej hodnoty.

²Nedostatkom zadania bolo, že táto veličina mala byť, ako uvidíte vo výsledku, zadaná. Za túto hroznú nedôslednosť sa ospravedľujeme.

³Ako vidno, výsledok je úmerný tretej odmocnine prierezu S chýbajúcemu v zadani.

⁴Poznáme hustotu: $1\,000\text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$.

⁵ $p_a = 101\,325\text{ Pa}$

Druhý typ nepresností sú chyby vyplývajúce z nedokonalosti aparatury, nevhodnosti postupu, nepresnej teórie. Tieto sa dajú odstrániť jedine zdokonalením aparatury, postupu, ...

Vykonalí sme 5 meraní, pričom namerané hodnoty v metroch boli:

$$1,798; 1,803; 1,801; 1,787; 1,809$$

Aritmetický priemer tým pádom vyšiel 1,800 m. Všimnite si, že som hodnotu nenapísal ako 1,8 m, ale pripísal som aj dve nuly. Toto je zaužívaný zvyk vo fyzike a aj ostatných vedách, ktoré pracujú s nepresnými dátami, ako dať najavo, ktoré desatinné miesta sú ešte relevantné.

Z rozptylu hodnôt okolo stredu môžeme určiť takzvanú smerodajnú odchýlku priemeru s . Tento údaj nám hovorí (za istých predpokladov), v akom intervale môžeme očakávať skutočnú hodnotu meranej veličiny. S pravdepodobnosťou približne 70 % je skutočná hodnota z intervalu $\bar{x} \pm s$. Ak by sme vzali polomer intervalu $2s$, resp. $3s$, pravdepodobnosti by boli 95 % a 99,8 %.

Vzorec na výpočet s je nasledovný (padol z neba)

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}{N(N-1)}}.$$

Hodnotu sme nemohli určiť s presnosťou väčšou, ako je polovica najmenšieho dielika na našom meradle. Tento príspevok pripočítame k s a dostaneme tak náš odhad chyby.

$$\Delta x_{\text{priemer}} = 0,0046 \text{ m}.$$

Nami nameraná výška teda bola:

$$x = (1,800 \pm 0,0046) \text{ m}.$$

Všimnite si, že posledná uvedená cifra hodnoty x je na rovnakej pozícii ako prvá uvedená cifra chyby. To má svoje opodstatnenie. Keď budete svojmu kamarátovi rozprávať, ako ďaleko bývate od školy, nepoviete mu: „Bývam 3 573,32 metra plus mínus jeden kilometer od školy.“ Mali by vás za blázna. Miesto toho poviete, bývam približne štyri kilometre od školy, hore dole jeden kilometer.

Ostáva nám určiť hodnotu a chybu pre tlak, nakoľko však stačí výsledok (podľa nášho vzorca) len vynásobiť ρg , nemáme ťažkú robotu

$$p_u = (17,65 \pm 0,05) \text{ kPa}.$$

PS: Hodnoty, ktoré sa nachádzajú v tomto vzorovom riešení pochádzajú od jedného riešiteľa. Kto príde na to, prečo viem, že nemôžu byť namerané a sú určite vymyslené, má u mňa čokoládu.

Samo

1.5 B4, A2 – Pol gule s vodou (opravovali Svetlana, polik, vzorák Lukas)

Sklená polsféra polomeru R s malou dierkou na vrchu je položená na gumenom stole (aby to tesnilo). Nádobu naplníme až po vrch vodou. Voda spod polsféry nevyteká. Aké hrubé je sklo?

Po prvom prečítaní tohto príkladu sa môže zdať, že otázka nesúvisí so zadáním. Prečo by teda voda mala pretekať, keď všetko dokonale tesní? A akú úlohu hrá hrúbka polsféry? Dozvieme sa.

Naša polsféra je vlastne nádoba s vodou objemu $1/2 \cdot 4/3 \cdot \pi R^3$, v ktorej je vzdialenosť hladiny od dna (povrchu stola) R . Na dne je hydrostatický tlak $p = R\rho_v g$, ktorý nezávisí od tvaru nádoby, iba od jej hĺbky – vzdialenosti hladiny od dna v smere tiažového poľa. Tento fakt sa na strednej škole učí pod názvom hydrostatický paradox. Paradoxom je preto, že by sme očakávali aj závislosť od množstva kvapaliny v nádobe.

Vzťah $p = H\rho g$ sa v škole odvodzuje z tiažovej sily, ktorou pôsobí stĺpec kvapaliny na dno bez uvažovania nádob exotických tvarov, preto je hydrostatický paradox len zvestovanou pravdou. Tento neutešený stav nášho poznania však možno napraviť.

Uvažujme všeobecnú nádobu s dnom o ploche S . Dno posunieme o nejakú malú vzdialenosť Δd , čím sa všetka voda v nádobe poposúva a hladina vody v nádobe poklesne o Δh . Potenciálna energia kvapaliny sa zmení tak, ako keby sme kvapalinu objemu $\Delta d S$ posunuli z hladiny na dno, teda o vzdialenosť h . Zmena potenciálnej energie je $\Delta d S \rho g h$. Túto zmenu potenciálnej energie možno stotožniť⁶ s prácou vykonanou tlakovou silou $F = pS$ pôsobiaceou po dráhe Δd :

$$\Delta d S \rho g h = p S \Delta d$$

$$p = \rho g h$$

Zaujímavé je, že táto úvaha platí nielen pre kvapaliny, ale aj pre sypké tuhé látky (piesok).

Na dne našej polguľovej nádoby je teda tlak $R\rho_v g$. Na jej dno (na povrch stola) pôsobí tlaková sila $F = pS = p\pi R^2 = \pi\rho_v R^3 g$. Rovnako veľkou reakčnou silou pôsobí stôl na vodu v nádobe. Táto sila môže podvihnúť polsféru, čím spod nej vytečie nejaká voda. Aby k tomu nedošlo, musí sklená polsféra vážiť toľko, aby bol súčet tiažovej sily pôsobiacej na polsféru a tiažovej sily pôsobiacej na vodu pod polsférou rovný reakcii na tlakovú silu. Z toho máme podmienku pre hmotnosť polsféry m :

$$F_g(\text{sklo}) + F_g(\text{voda}) = \pi\rho_v R^3 g$$

$$mg + \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \pi R^3 \rho_v g = \pi\rho_v R^3 g$$

$$m = \frac{1}{3} \pi R^3 \rho_v$$

Objem skla vypočítame ako $1/2 \cdot 4\pi R^2 h$ (predpokladáme $h \ll R$ a zanedbateľne veľký otvor), z čoho po dosadení do podmienky pre hmotnosť dostaneme hľadanú hrúbku skla (ρ_s je hustota skla):

$$d = \frac{\rho_v}{6\rho_s}$$

⁶Voda vykonala prácu na úkor svojej potenciálnej energie.

1.6 A3 – Mláčka (opravovala Tinka, vzorák Samo)

Maťo vylial pohár vody na stôl. Odhadnite, aká vysoká vrstva vody sa na stole vytvorila. Pri riešení považujte povrchové napätie stôl–voda rovnaké, ako voda–vzduch.

Cieľom tejto úlohy bolo spraviť nejaký (aspoň hrubý) odhad výšky mláčky vody na stole a porovnať ho s našou každodennou skúsenosťou. Systém sa po vyliatí vody na stôl snaží dostať do stavu s najnižšou energiou, našou úlohou je iba tento stav nájsť.

Uvažujme objem vody V vyliaty na stôl s výškou vodnej vrstvičky h . Celková energia sústavy voda stôl bude:

$$V/h \cdot (\sigma_1 + \sigma_2 - \sigma_3) + \frac{1}{2}V\rho gh$$

σ_1 , σ_2 , σ_3 sú povrchové napätia na rozhraniach voda–vzduch, stôl–voda, stôl–vzduch. Z týchto povrchových napätí poznáme len prvé, keďže nám však ide len o rádový odhad, môžeme si dovoliť predpoklad $\sigma_1 = \sigma_2$, ktorý bol v zadaní. Samozrejme, hodnoty budú závisieť od konkrétneho stola, ale je pomerne uveriteľné, že existuje stôl so $\sigma_1 \approx \sigma_2$. V zadaní sme však zabudli spomenúť, čo máte predpokladať o napätí na rozhraní stôl–vzduch. Za túto našu chybu sa ospravedľujeme a chválime všetkých riešiteľov, ktorí ju spozorovali. V tomto vzorovom riešení budeme uvažovať, že σ_3 je zanedbateľné.

Potom dostávame výraz pre energiu:

$$\frac{1}{h} \cdot 2V\sigma + h \cdot \frac{1}{2}V\rho g$$

Tento výraz chceme minimalizovať. To je to isté ako minimalizovať výraz:

$$\frac{2\sqrt{\sigma}}{h\sqrt{\rho g}} + \frac{h\sqrt{\rho g}}{2\sqrt{\sigma}}$$

A ako ste už možno počuli, výraz $a + a^{-1}$ nadobúda minimálnu hodnotu pre $a = 1$.⁷ To v našom prípade znamená, že energia sa minimalizuje pre:

$$h = 2\sqrt{\frac{\sigma}{\rho g}} \approx 5 \text{ mm}$$

1.7 A4 – Kmitajúce pero (opravovali Petrik Vanya, Marika, vzorák Petrik)

Robo má v poslednej dobe novú záľubu – položí si ceruzku na nohu, jemne do nej šťuchne a sleduje, ako kmitá. Určte periódu malých kmitov ceruzky, ak predpokladáte, že Robova noha má tvar valca s polomerom R a ceruzka má hmotnosť m a dĺžku l .

Počítanie periódy kmitov je vždy relatívne priamočiary proces. Objekt záujmu – v našom prípade pero – vychýlime a pozorujeme, aké sily naň začnú pôsobiť. Keď sa všetky naskladajú do jednej rovnice, vypadne z nej, že zrýchlenie plus konštanta krát výchylka (ktorou je vzdialenosť alebo uhol) sa rovná nule:

$$a + Cx = 0$$

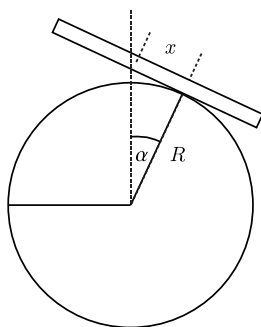
⁷Zrejme $(a - 1)^2 \geq 0$, potom $a^2 + 1 \geq 2a$, čiže $a + a^{-1} \geq 2$. Rovnosť zrejme nastáva pre $a = 1$.

Pri pohľade na túto tzv. rovnicu harmonických kmitov sa jednoducho prehlási, že C je uhlová frekvencia na druhú, a sme za vodou.⁸

Vychýľme teda pero tak, že jeho bod dotyku s nohou bude zvierat uhol α s kolmicou (ako na obrázku 4). Takto na pero začne pôsobiť moment tiažovej sily (pozrite obrázok), z ktorej berieme len zložku kolmú na os pera:

$$\tau = -xmg \cos \alpha$$

x je vzdialenosť stredu (ťažiska) pera od bodu dotyku. Tú si možno vyjadriť pomocou uhla α ako $x = R\alpha$. Znamienko naznačuje, že moment pôsobí proti smeru, v ktorom meriame α .



Obr. 4: Vychýlené pero.

Pohybová rovnica pre otáčavý pohyb je

$$\tau = I\varepsilon,$$

kde I je moment zotrvačnosti a ε uhlové zrýchlenie. S momentom zotrvačnosti si netreba lámať hlavu. Hráme sa na malé kmity, čo znamená, že $x \ll l$, a teda za os otáčania stále možno považovať stred pera. Moment zotrvačnosti vzhľadom na stred akejkoľvek rovnej palice snáď poznajú aj fyzikálne tabuľky, a ak nie ony, tak Wikipédia:

$$I = \frac{ml^2}{12}$$

Po napchaní jedného do druhého vzniká výraz:

$$xmg \cos \alpha = -\frac{ml^2}{12}\varepsilon$$

$$\varepsilon + \frac{12Rg}{l^2}\alpha \cos \alpha = 0$$

Ešte treba odstrániť ten nepeknný kosínus. Opäť raz využijeme poznatok, že ide len o malé kmity, a preto $\cos \alpha \approx 1$. Takže môžeme písať:

$$\varepsilon + \frac{12Rg}{l^2}\alpha = 0$$

⁸Ak máme nejakú harmonicky kmitajúcu vec s výchylkou $x = A \sin(\omega t + \phi)$, tak po zderivovaní platí $\dot{x} = \omega A \cos(\omega t + \phi)$ a po ešte jednom zderivovaní $\ddot{x} = -\omega^2 A \sin(\omega t + \phi) = -\omega^2 x$. That's it.

Uhlová frekvencia a následne aj perióda je teda:

$$\omega^2 = \frac{12Rg}{l^2}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{l^2}{12Rg}}$$

Okrem silového prístupu existuje ešte energetický. Ten môže byť v niektorých prípadoch príjemnejší na použitie, preto stojí za to si ho na takomto jednoduchom príklade natrénovať. Najskôr ale pomeníme označenie. Uhlové zrýchlenie bude odteraz $\ddot{\alpha}$ a uhlová rýchlosť (ktorú tiež využijeme) $\dot{\alpha}$. Všetko, čo potrebujeme spraviť, je spočítať celkovú energiu, t. j. kinetickú plus potenciálnu.

Za kinetickú znova v dôsledku $x \ll l$ berieme len otáčavú zložku (premýslite si presne, prečo), teda:

$$E_k = \frac{1}{2}I\dot{\alpha}^2 = \frac{ml^2}{24}\dot{\alpha}^2$$

Pre potenciálnu energiu položíme nulovú úroveň na vrch nohy, teda pôvodný bod dotyku. Potom (skúste si toto sami nakresliť):

$$E_p = mg[x \sin \alpha - R(1 - \cos \alpha)]$$

Použijeme priblíženie $\sin \alpha \approx \alpha$, $\cos \alpha \approx 1 - \frac{\alpha^2}{2}$, a tak dostávame:

$$E_p = \frac{mgR}{2}\alpha^2$$

Takže celková energia je:

$$E = E_k + E_p = \frac{1}{2}\frac{ml^2}{12}\dot{\alpha}^2 + \frac{1}{2}mgR\alpha^2$$

Fyzikálna kuchárka hovorí, že ak $E = \mu\dot{\alpha}^2 + \kappa\alpha^2$, tak $\omega^2 = \frac{\kappa}{\mu}$. A naozaj:

$$\omega^2 = \frac{mgR}{\frac{ml^2}{12}} = \frac{12gR}{l^2}$$

Prečo to tak funguje? Stačí obe strany rovnice poderivovať podľa času. Naľavo v dôsledku konštantnosti energie vznikne nula a napravo:

$$\frac{d}{dt}\dot{\alpha}^2 = 2\dot{\alpha}\ddot{\alpha}, \quad \frac{d}{dt}\alpha^2 = 2\alpha\dot{\alpha}$$

Potom:

$$0 = \mu\dot{\alpha}\ddot{\alpha} + \kappa\alpha\dot{\alpha}$$

$$\ddot{\alpha} + \frac{\kappa}{\mu}\alpha = 0$$

Ešte by to chcelo zopár teplých slov o tom, čo, prečo a ako zanedbávať, lebo tých zanedbaní tu bolo pomerne dosť. Pre (dostatočne) malé kmity sú všetky členy obsahujúce vyššiu ako prvú

mocninu α oproti zvyšným členom v rovnici zanedbateľné. Chceme vidieť rovnicu harmonických kmitov.⁹ Ak by sme pri silovom prístupe použili $\cos \alpha \approx 1 - \alpha^2/2$ namiesto $\cos \alpha \approx 1$, vo výslednej rovnici by sa nám zjavilo jedno α^2 , ktoré by sa však v praxi neprejavilo – bolo by príliš malé oproti ostatným členom. Preto si ho môžeme dovoliť zanedbať.

⁹Pre alternatívny, do extrému privedený výklad metódy pozri xkcd.com/759.