Fyzikálny korešpondenčný seminár
27. ročník, 2011/2012
FKS, KTFDF FMFI UK, Mlynská dolina, 84248 Bratislava
e-mail: otazky@fks.sk web: http://fks.sk

Vzorové riešenia 2. kola zimnej časti 2011/2012

2.1 B0 – POlikova plavba II (opravovali Kamila a Mišo, vzorák Andrej)

Polik sa opäť vybral na plavbu okolo sveta. Tentokrát si zvolil plavidlo tvaru hranola, ktorý má ako podstavu pravouhlý trojuholník. Náčrt plavidla môžete vidieť na obrázku. Keď Polik nastúpil do loďky, ponor bol 0,8 metra. Keď k nemu pristúpila Bum, ponor sa zvýšil na jeden celý meter. Ak viete, že Polik váži 80 kíl, dokážete určiť Buminu hmotnosť?

V zadaní sme zabudli uviesť, že hmotnosť člna je zanedbateľná. Bez tohto predpokladu sa úloha vyriešiť nedala a za túto chybu sa riešiteľom ospravedlňujeme.

Na čln pôsobia dve sily – tiažová a vztlaková. Keďže čln sa po nastúpení osôb ustáli, musia byť tieto sily v rovnováhe. Vyjadriť tiažovú silu je ľahké ako facka. Ako vyjadriť ponorený objem?

Predpokladáme, že sa člnok nebude nakláňať (je predsa Poliho), a tak hĺbka ponoru bude kolmá na hladinu vody. Pohraním sa s geometriou môžeme ukázať, že predná ponorená plocha člnu je h^2_{ponor}. Vidíme teda, že druhá mocnina ponoru je úmerná tiaži (dĺžka člnu a hustota vody sú konštanty), čiže:

$$\frac{h_2^2}{h_1^2} = \frac{m_{\text{Poli}} + m_{\text{Bum}}}{m_{\text{Poli}}}$$

Z toho dostávame Buminu hmotnosť:

$$m_{\text{Bum}} = m_{\text{Poli}}\left(\frac{h_2^2}{h_1^2} - 1\right) = 80\,\text{kg}\left(\frac{1^2}{0{,}8^2} - 1\right) = 45\,\text{kg}$$

2.2 B1 – Kondík (opravovala Bea, vzorák Lukáš)

Lukáš sa vo voľnom čase rád hrá so svojou stavebnicou. Nedávno v nej našiel kondík – taká veľmi zaujímavá súčiastka. Tvoria ho dve platne v malej vzdialenosti od seba, ktoré sú oddelené nejakým izolantom, takže cez ne nemôže tiecť prúd. Napriek tomu, keď taký kondík zapojíte do obvodu s baterkou a žiarovkou, žiarovka sa na chvíľu rozsvieti a potom zhasne. Následne, keď batériu odpojíte a obvod spojíte, žiarovka sa opäť na chvíľu rozsvieti a opäť zhasne. Toto blikavé potešenie dokázalo zabávať Lukáša pomerne dlhú dobu, neskôr si však, ako správny fyzik, začal klásť otázku: „Sto striel hrmených, prečo to tak funguje? Veď cez ten kondík nemôže tiecť prúd, keď je tam izolant!“ Viete Lukášovi vysvetliť, ako je možné, že obvodom tečie prúd napriek tomu, že platne kondíku nie sú vodivo spojené?

Seminár podporujú:

V riešeniach ste fungovanie kondenzátora[1] v obvode vysvetľovali vy mne, teraz ho idem vysvetliť ja vám. Pointa je v tom, že samotným kondenzátorom (izolantom medzi platňami) elektrický prúd naozaj netečie.[2] Ak sa však pozeráme na celý obvod, elektrický prúd ním tečie.

Kondenzátor je súčiastka zostrojená tak, aby mala vysokú kapacitu, teda mohla pri danom napätí uskladniť veľa elektrického náboja. Po zapojení obvodu začnú na platničku kondenzátora pripojenú k zápornému pólu zdroja prichádzať elektróny a hromadiť sa na nej. Podobne z druhej platničky budú elektróny, ktorých je v relatívne veľkej kovovej platničke kondenzátora dosť, odchádzať do kladného pólu zdroja. Hovoríme, že kondenzátor sa nabíja. Nejaké elektróny prišli zo zdroja do kondenzátora, nejaké odišli z kondenzátora do zdroja, čo ale znamená, že obvodom tiekol elektrický prúd.

Ako sa počas nabíjania zväčšuje elektrický náboj na kondenzátore, vzniká na ňom určité elektrické napätie, ktoré pôsobí proti napätiu zdroja. Elektrický prúd tečúci obvodom sa postupne zmenšuje a po nabití kondenzátora (keď na ňom bude náboj $Q = CU$, kde C je kapacita kondenzátora a U napätie zdroja) nebude obvodom tiecť žiaden prúd. Preto žiarovka len blikne a nebude svietiť stále.

Po odpojení zdroja a opätovnom uzavretí obvodu začne kondeznátor fungovať ako nový zdroj, ktorého napätie bude klesať. Elektróny zo záporne nabitej platničky budú obovdom prechádzať na kladnú, až kým nebude náboj na oboch platničkách opäť nulový a vtedy už obovodom prúd tiecť nebude – žiarovka opäť iba blikne.

2.3 B2 – Pneumatika (opravoval Peťo, vzorák Lukáš)

Typický pretlak vzduchu v pneumatike osobného auta sú tri atmosféry (tj. v pneumatike je o tri atmosféry väčší tlak ako mimo nej). Bežné auto váži dve tony. Na základe týchto údajov sa pokúste odhadnúť plochu, ktorou sa koleso dotýka vozovky. Dostali ste uveriteľné hodnoty? Porovnajte na nejakom aute v okolí.

Pri odhadovaní plochy, ktorou sa pneumatiky dotýkajú zeme, budeme vychádzať len zo zadaných údajov – hmotnosti auta a tlaku v pneumatike. Hľadať alebo vymýšľať ďalšie parametre nebolo nutné.

Na auto pôsobí tiažová sila $F_\mathrm{g} = mg$ smerom nadol a reakcia od zeme T smerom nahor. Pretože auto sa v zvislom smere nehýbe, musia byť tieto sily v rovnováhe:

$$mg = T$$

Teraz sa pozrieme na jedno koleso, konkrétne na miesto, kde sa pneumatika dotýka zeme. Predpokladáme, že všetky kolesá sú ekvivalentné. Pneumatika je na mieste dotyku so zemou sploštená, dotykovú plochu označíme S. Vzduch v pneumatike pôsobí na túto plochu silou $F = pS$, kde p je *pretlak* v pneumatike, teda $3\,\mathrm{atm}$. Tlak vzduchu v pneumatike síce je $4\,\mathrm{atm}$, ale pôsobí proti nemu tlak okolitého vzduchu $1\,\mathrm{atm}$. Na jednu pneumatiku ďalej pôsobí reakčná sila od zeme, ktorej veľkosť je $T/4$ (štyri takéto sily za každé koleso sa sčítavajú do sily T pôsobiacej na auto). Sila pS sa snaží pneumatiku napnúť, sila $T/4$ sploštiť. V ustálenom stave (pneumatika sa v zvislom smere nehýbe) sú tieto sily v rovnováhe:

$$pS = \frac{T}{4}$$

[1] Áno, v zadaní sa pod krycím názvom kondík skrýval obyčajný doskový kondenzátor.

[2] Pri rozumne malých napätiach, ktoré neprekračujú elektrickú pevnosť izolantu medzi platničkami. Pri väčších napätiach by sa ale nikto nepýtal, či obvodom tečie prúd, pretože iskrenie medzi platničkami by hovorilo, že tečie.

Kombináciou rovnováhy síl pôsobiacich na auto a na pneumatiku dostaneme:

$$4pS = mg$$

Teda:

$$S = \frac{mg}{4p} = \frac{mg}{4 \cdot 3p_{\mathrm{atm}}} = \frac{2000\,\mathrm{kg} \cdot 9{,}8\,\mathrm{ms^{-2}}}{4 \cdot 3 \cdot 100\,\mathrm{kPa}} \approx 160\,\mathrm{cm^2}$$

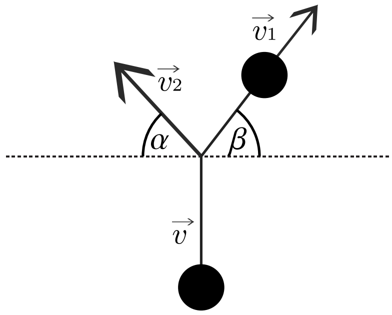
(Robíme približný odhad, takéto zaokrúhlenie úplne stačí.)

Pretože našou úlohou bolo predpovedať hodnotu fyzikálnej veličiny podľa určitého modelu, je dôležité porovnať našu predpoveď s meraním. Takže ideme na parkovisko, vytipujeme si niekoľko áut, ktoré by mohli mať približne dve tony, a zmeriame šírku a dĺžku dotykovej plochy pneumatiky so zemou (najlepšie všetkých štyroch pneumatík). Porovnaním s nameranými hodnotami vidíme, že sme veľkosť dotykovej plochy odhadli celkom dobre. Treba si uvedomiť, že náš odhad bol približný, výsledok závisí priamo úmerne od hmotnosti auta a nepriamo úmerne od tlaku v pneumatike, teda stačí malá zmena týchto parametrov a hneď máme rozdiel $\pm 10\,\%$. Tiež sme neuvažovali žiadne parametre gumy. Takže netreba hneď hľadať chybu v meraní hrúbky pneumatiky, ale potešiť sa, že nám to vlastne vyšlo.

2.4 B3, A1 – Biliard (opravovala Marika)

Marika sa učí hrať biliard a aby jej to šlo ľahšie, hrá na nekonečnom biliardovom stole. Taký stôl nemá hrany ani rohy a jediná šanca, ako sa pobaviť, je odrážať gule od seba navzájom. Najnovšia Marikina zábavka je rozostaviť gule (všetky samozrejme rovnaké) a do jednej ťuknúť tágom tak, aby sa *pohla*, poodrážala od ostatných gulí a vrátila na pôvodné miesto. Koľko najmenej gulí Marika potrebuje na uskutočnenie tohto plánu a ako ich treba rozostaviť? Ak sa prvá guľa okamžite po udretí tágom pohybovala rýchlosťou v, akou najväčšou rýchlosťou sa môže vracať späť na svoje miesto? Pri riešení uvažujte, že všetky zrážky sú dokonale pružné, koeficient trenia medzi stolom a guľami je nekonečný a koeficient trenia medzi guľami navzájom je nulový.

Keďže pri zrážke s jednou ďalšou guľou sa nemožno vrátiť na pôvodné miesto a guľa ostane stáť (kvôli zákonu zachovania hybnosti a zákonu zachovania energie), ďalší nápad môže byť rozostaviť gule do n-uholníka: pri každej zrážke sa guľa odchýli a napokon sa vráti na pôvodné miesto. Spočítajme si jeden takýto odraz. Guľa s rýchlosťou v vrazí do nehybne stojacej guličky a následne sa rozbehnú s rýchlosťami v_1 a v_2 tak, ako na obrázku.



Obr. 1: Guľa a guľka

Zapíšeme zákon zachovania energie:

$$v^2 = v_1^2 + v_2^2$$

A tiež zákon zachovania hybnosti v oboch smeroch:

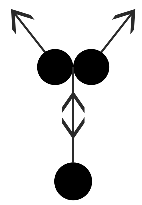
$$v = v_1 \sin\beta + v_2 \sin\alpha$$

$$v_1 \cos\beta = v_2 \cos\alpha$$

Z nich dostaneme pre v_1 riešenie $v \sin\beta$. Z výsledku vidno, že má zmysel uvažovať len $\beta > 0$, pre záporné β totiž dostávame rovnaký vektor rýchlosti $\vec{v}_1$ ako pre uhol $\pi - \beta$. Keďže chceme, aby sa sa guľa pri zrážke odchýlila čo najviac od pôvodného smeru, chceme mať β čo najmenšie, čo dáva pre uhol odklonenia $\pi/2 - \beta$ interval $\langle 0; \pi/2 \rangle$.

Ako teraz usporiadať guličky a koľko ich vlastne bude? Prvý nápad je mať dohromady 4 gule usporiadané do štvorca. To sme sa ale o chlp nezmestili do povoleného intervalu pre uhly. Avšak zrážky so 4 guľami budú len tri, preto len tri uhly musia byť tupé a štvrtý si môžme dovoliť dať ostrý. Takže už máme riešenie s 3 + 1 guľami.

Musíme ale gule vždy stavať do n-uholníka? Nápovedou nám môže byť fakt, že keby sa guľa zrazila s guľou ťažšou ako je ona, na pôvodné miesto by sa vrátila po jednom odraze. Skúsme porátať, či sa dokáže otočiť, keď vrazí naraz do dvoch gúľ tak, ako je to obrázku.



Obr. 2: Guľa a dve guľky

Zo zákona zachovania energie dostávame pre rýchlosti rovnicu:

$$v^2 = 2u^2 + v_1^2$$

Pritom u označuje rýchlosť každej z dvoch terčových gúľ po zrážke. Pri hybnosti si treba uvedomiť, že rýchlosti dvoch stojacich gúľ budú mať rovnaký smer, ako sila, ktorou na nich počas zrážky tretia guľa pôsobila. Nakoľko nemáme v úlohe žiadne trenie, všetky sily, ktorými na seba gule pôsobia, sú kolmé na ich povrch a smerujú od stredu tretej gule. Keď si nakreslíte obrázok gúľ v momente zrážky, spojíte ich stredy a vyhodnotíte niektoré uhly, ľahko zbadáte, že smery rýchlostí trčových gúľ (ktorých veľkosti sú rovnaké a označili sme ich u) zvierajú so smerom pôvodnej rýchlosti našej gule $\vec{v}$ uhly $\pi/6$. Zákon zachovania hybnosti vo vertikálnom smere nám potom dáva:

$$v = 2\cos\frac{\pi}{6}u - v_1$$

Respektíve:

$$v = \sqrt{3}u - v_1$$

Riešením týchto rovníc dostávame:

$$v_1 = \frac{v}{5}$$

To znamená nielen fakt, že guľa sa vráti na pôvodné miesto a že nám stačia dokopy len 3 gule, ale zistili sme aj s akou (najväčšou) rýchlosťou sa môže vrátiť, keď počet ďalších gúľ je najmenší možný.

Zadanie bolo tentoraz pomerne nejasné a viacerí ste rátali, aká môže byť najväčšia rýchlosť gule bez obmedzenia na počet gúľ. V tomto prípade sa rýchlosť na konci môže blížiť k pôvodnej rýchlosti, a to vtedy, keď na stole budeme mať strašne veľa gúľ usporiadaných do kruhu a pri každom odraze sa gule len jemne šuchnú sa rýchlosť pôvodnej gule sa zmení málo, čo sa dá vidieť zo vzorca pre rýchlosť keď β bude veľmi malé.

2.5 B4, A2 – Nevoľný pád (opravovali Ado a Frico, vzorák Frico)

Frico našiel na povale starú knihu od pánov Landaua a Lifsica. Ako si ju tak čítal, zaujalo ho, že sa v knihe rieši problém padajúceho telesa bez zanedbania odporu vzduchu. Frico sa potešil a začal rátať, o koľko spadne kilová olovená guľa za čas t po tom, ako ju vyhodí (pustí) z okna. Zrátal túto úlohu deväťkrát a vždy dostal iný výsledok. Pomôžte mu vyradiť výsledky, ktoré sú určite nesprávne.

(i) $1/2gt^2$

(ii) $1/3gt^2$

(iii) kgt^2

(iv) $gt(t-1/k)$

(v) $(g/k)(t+\exp(-kt)-1)$

(vi) $(g/k^2)(kt+\exp(-kt))$

(vii) $(g/k^2)(2kt+\exp(-kt)-1)$

(viii) $\frac{1}{2}(g/k^2)(\exp(kt)+\exp(-kt)-2)$

(ix) $(g/k^2)(kt\exp(-k^2t^2)+\exp(-kt)-1)$

Výsledky udávajú dĺžku, o ktorú guľa spadne za čas t, k je nejaká špecifická konštanta závislá od vlastností Fricovej gule a parametrov vzduchu.

Pri vyraďovaní sa dajú použiť rozličné argumenty, my uvedieme len niektoré z nich. Pre začiatok je dobré si uvedomiť, ako by vyzeral náš vzťah, keby sme odpor vzduchu zanedbali. Vyšlo by nám $\frac{1}{2}gt^2$. Zrejme, po zarátaní odporu vzduchu, sa náš vzťah zmení (a teda možnosť (i) môžeme hneď vyradiť).

Ďalší dôležitý poznatok, pomocou ktorého môžeme zahodiť hneď niekoľko riešení, je fakt, že po istom čase by malo teleso padať takmer konštantnou rýchlosťou (rýchlosť pri páde sa zväčšuje, avšak spolu s ňou aj odporová sila, až kým sa po čase nevyrovná s tiažovou silou, potom teleso už nebude zrýchľovať). Ako to uvidíme vo vzorcoch? Pri veľkom t by sa funkcia mala javiť ako takmer lineárna. Túto vlastnosť nemajú vzťahy (ii), (iii), (iv) a tiež (ix). Ak je $k > 0$, podľa posledného vzorca sa teleso dokonca zastaví. Dôvod: e^{-kt} v nekonečne pôjde do nuly a prvý člen – exponenciálna funkcia – klesá tiež veľmi rýchlo a nezastaví ho ani prenásobenie nejakou lineárnou funkciou – pôjde teda tiež do nuly. Ďalší argument je, že ak dosadíme $t = 1/k$, dostaneme záporné číslo – teleso by sa pri páde dostalo vyššie (kladný smer je smer nadol). V prípade $k < 0$ bude po čase prvý člen opäť zanedbateľný a druhý bude teraz rásť exponenciálne (čo je prirýchlo – oveľa rýchlejšie než by nám vyšlo, keby sme zrátali pád telesa v neodporovom prostredí).

Vo vzťahu (v) nesedia jednotky (a teda je zlý) – čas sa tu sčituje s číslom 1 a takisto s bezrozmerným výrazom e^{-kt} (poznámka do budúcnosti – to, čo vystupuje v exponente, rovnako aj v argumentoch sínusu, kosínusu, ..., musí byť tiež vždy bezrozmerné). V (vi) dostávame v čase nula nenulovú prejdenú dráhu – môžeme ho tiež vyradiť. V prípade (viii) je dominantný prvý člen (ak je k kladné; ak je k záporné, dominantný bude druhý člen) a ten rastie tak rýchlo ako exponenciálna funkcia (sčasti je to spôsobené tým, že to je exponenciálna funkcia :-)). To je zrejme opäť zle.

Ďalej, všimnime si, že pri začiatku pádu by odporová sila mala byť nulová – v prvých momentoch by sa preto náš vzťah mal podobať na $\frac{1}{2}gt^2$, a teda čas by tam mal byť (približne) v druhej mocnine. Toto ale určite neplatí vo vzťahu (vii) – pre veľmi malé (aj malé záporné) x totiž platí $e^x - 1 \approx x$. V našom prípade dostaneme:

$$\frac{g}{k^2}(2kt + e^{-kt} - 1) \approx \frac{g}{k^2}(2kt - kt) = \frac{gt}{k}$$

Čas tu vystupuje v prvej mocnine, a teda tento vzorec je takisto zlý. Iný spôsob: v prípade $k > 0$ dosadíme $t = 1/k$ a ukážeme, že teleso by v tomto čase prekonalo väčšiu dráhu než v prípade bezodporového prostredia. Ak $k < 0$, opäť dostaneme príliš rýchlo rastúcu exponenciálnu funkciu (prvý člen, lineárna funkcia, bude voči nej zanedbateľný). Záver: všetky vzorce sú zlé a Frico nevie počítať.

Poznámka pre derivovaniachtivých: ako je vo FKS zvykom, nebolo nutné derivovať, ani nič podobné! Dalo sa to vyriešiť aj obyčajnými jednoduchými úvahami. :-)

2.6 A3 – Autoloď (opravovali Lukáš a Majo, vzorák Majo)

Koľko minimálne energie musí spáliť auto hmotnosti m stojace na lodi hmotnosti M, aby sa začalo vzhľadom na loď pohybovať rýchlosťou v?

Označme si v_0 ako rýchlosť auta v laboratórnej sústave (vzhľadom na vonkajšieho pozorovateľa) a V_0 ako rýchlosť lode v laboratórnej sústave. V celom tomto príklade máme pod pojmom rýchlosti na mysli *veľkosti* rýchlostí, teda všetky v tu vystupujúce sú kladné. Preto si musíme rozmyslieť znamienka: ak sa auto pohne jedným smerom (v kladnom smere), loď sa pohne presne opačne (v zápornom smere).

Potrebujeme vyjadriť rýchlosť auta vzhľadom na loď (tá je zadaná), preto využijeme nerelativistické (newtonovské) skladanie rýchlostí[3]:

$$v = v_0 + V_0$$

Ďalej si všimneme, že ak zanedbáme všetky trecie a odporové sily (ale aj iné, napr. vplyv gravitačného poľa Mesiaca), potom na sústavu auto + loď (= autoloď) nepôsobia žiadne vonkajšie sily, teda $\vec{F}_{\text{ext}} = \vec{0}$. Toto má za následok, že celková hybnosť sústavy sa zachováva, alebo rovnako dobre aj to, že ťažisko sústavy sa z miesta nepohne (hovoríme mu, že je lenivé). So správnymi znamienkami platí:

$$-MV_0 + mv_0 = 0$$

[3] Pre tých, čo by nevedeli, takéto skladanie rýchlostí je dôsledkom Galileovej transformácie medzi dvoma vzťažnými sústavami. Pri tejto transformácii sa predpokladá absolútny čas. Ako nás učí pán Einstein, toto nie je pravda, a teda ani takéto skladanie rýchlostí nie je úplne presné. Je to však veľmi dobrým priblížením pre malé rýchlosti v porovnaní s rýchlosťou svetla (a presne takéto rýchlosti sa tu uvažujú).

A teraz prichádza pointa: energia sústavy sa nezachováva! Na začiatku bola kinetická energia sústavy nulová (žiaden pohyb), a na konci sa auto aj loď pohybujú nenulovými rýchlosťami. Rozdiel medzi týmito energiami je práve hľadaná spálená energia, teda práca (spaľovacieho motora auta). Naša intuícia najlepšie funguje v sústave spojenej s vonkajším pozorovateľom (nehybným). Tam vieme že musí platiť:

$$W = \frac{1}{2}MV_0^2 + \frac{1}{2}mv_0^2$$

Niekto môže namietať: „Veď auto sa vzhľadom na loď pohybuje rýchlosťou v! Prečo nemôžem počítať spálenú energiu ako $\frac{1}{2}mv^2$??“ Je to veľmi dobre položená otázka. Treba si uvedomiť, že vzťažná sústava, ktorá je celý čas spojená s loďou, sa pohybuje so zrýchlením (loď je na začiatku v pokoji). Takáto sústava je už *neinerciálna* a neplatia v nej Newtonove zákony a zákony zachovania v takom tvare, v akom ich poznáme. Môžeme počítať celú úlohu v sústave, ktorá od začiatku ide rýchlosťou $-V_0$, teda nezrýchľuje a je inerciálna[4]. Lenže keď chceme počítať spálenú energiu v tejto sústave, musíme si uvedomiť, že na začiatku auto ani loď *nie sú v pokoji* vzhľadom na túto sústavu. Musíme preto vypočítať *rozdiel* energie na konci (to je $\frac{1}{2}mv^2$) a na začiatku. Dostali by sme rovnaký výsledok.

V skutočnosti toho platí ešte viac. Čakali by sme od energie spálenej autom, že to bude *objektívna* veličina, ktorá nebude závisieť od toho, v ktorej inerciálnej sústave ju počítam. A naozaj to tak je! Skúste si to celé vypočítať v sústave, ktorá sa pohybuje rýchlosťou u voči vonkajšiemu pozorovateľovi – dostanete rovnaký výsledok.

V tejto chvíli sa končí fyzika a začína sa matematika (v sprievode hromadných výkrikov typu: „Hurá!“ a „No konečne!“). Z prvých dvoch rovníc si vyjadríme rýchlosti v_0 a V_0:

$$V_0 = \frac{m}{M+m}v \qquad v_0 = \frac{M}{M+m}v$$

A dosadíme ich do tretej rovnice pre W. Po úpravách dostaneme výsledok:

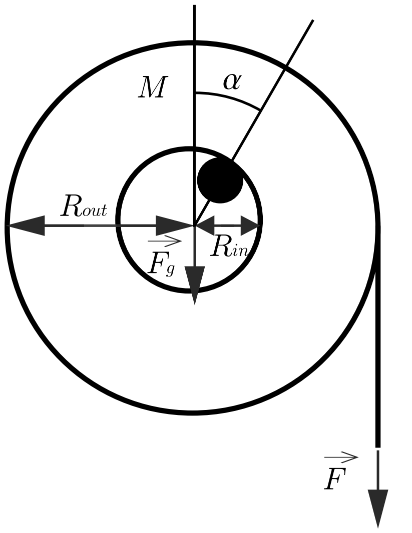
$$W = \frac{1}{2}\frac{Mm}{M+m}v^2$$

2.7 A4 – Toaleťák (opravoval MaťoCh)

Na matfyzáckych záchodoch majú obrovské toaleťáky. Tak veľké, že občas je problém odmotať si pásik bez toho, že by sa roztrhol. Inu, spočítajme si potrebnú silu sami. Hmotnosť toaleťáku je M, vonkajší polomer toaleťáku R_{out}, vnútorný polomer R_{in}. Toaleťák je upevnený na drievku valcového tvaru s polomerom r a koeficient trenia medzi drievkom a kotúľkou je f. Akou najmenšou silou musím ťahať, aby sa toaleťák rozkrútil?

Toaleťák bude tesne pred odtrhnutím papiera v polohe ako na obrázku.

[4] V tejto sústave sa na konci loď nepohybuje a auto ide rýchlosťou v.



Obr. 3: Toaleťák

Tesne pred rozkrútením bude valček v rovnováhe, t.j. výslednica síl $\vec{F} = 0$ a aj výslednica momentov síl $\vec{M} = 0$. Pre normálovú silu N (kolmú na drievko) a treciu silu F_t navyše platí:

$$F_\mathrm{t} = Nf \tag{1}$$

Valček sa nehýbe v smere osi x:

$$F_\mathrm{t} \cos\alpha = N \sin\alpha \tag{2}$$

Pre momenty síl vzhľadom na bod A platí:

$$MgR_\mathrm{in} \sin\alpha = F(R_\mathrm{out} - R_\mathrm{in} \sin\alpha) \tag{3}$$

Dosadením (1) do (2) a vyjadrením f dostaneme:

$$f = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \operatorname{tg}\alpha \tag{4}$$

Z (1) máme:

$$F = Mg\frac{R_\mathrm{in}\sin\alpha}{R_\mathrm{out} - R_\mathrm{in}\sin\alpha} \tag{5}$$

Teraz máme problém, pretože rovnica (4) nám vraví, čomu sa rovná $\operatorname{tg}\alpha$, ale v rovnici (5) máme len $\sin\alpha$. Musíme teda nájsť $\sin\alpha$ ako funkciu $\operatorname{tg}\alpha$. To urobíme nasledovným spôsobom:

$$\sin^2\alpha = \operatorname{tg}^2\alpha\cos^2\alpha = \operatorname{tg}^2\alpha(1-\sin^2\alpha) = \operatorname{tg}^2\alpha - \operatorname{tg}^2\alpha\sin^2\alpha$$

Z toho po vyjadrení $\sin\alpha$ s využitím (4) dostávame:

$$\sin\alpha = \sqrt{\frac{f^2}{1+f^2}} \tag{6}$$

Dosadením (6) do (5) dostávame výsledný vzťah pre silu F:

$$F = Mg\frac{1}{\frac{R_\mathrm{out}}{R_\mathrm{in}}\frac{\sqrt{1+f^2}}{f} - 1}$$