Fyzikálny korešpondenčný seminár
28. ročník, 2012/2013
FKS, KTFDF FMFI UK, Mlynská dolina, 84248 Bratislava
e-mail: otazky@fks.sk web: http://fks.sk

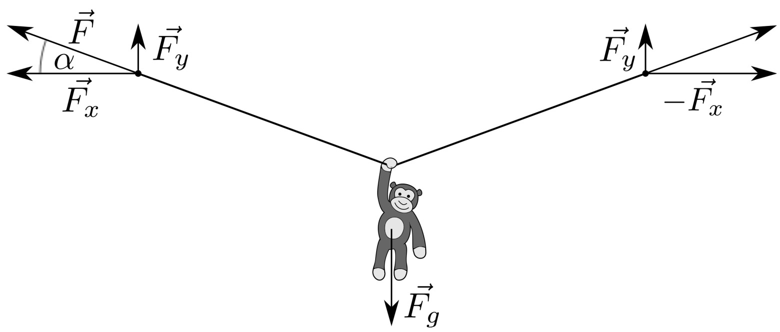
Vzorové riešenia 3. kola letnej časti 2012/2013

3.1 B0 – Opička na špagáte (opravovala Čajka, vzorák Dušan)

Kati spadla jej obľúbená opička do blata a zafúľala sa. Aby opäť žiarila čistotou, zobrala si 1,20 eura, strčila do práčky opičku, nasypala do kolóniek A, B prací prášok, do C aviváž, aby opička pekne voňala, nahádzala mince, vybrala prací program 5 a zatvorila dvere práčky. Keď sa po trištvrte hodine vrátila, vytiahla opičku z práčky a zavesila ju na nehmotný špagát do izby, ktorého konce sú v rovnakej výške. Kati sa nepáčilo, že špagát nie je rovný, preto ho chcela napnúť čo najviac. Predpokladajte, že opička má hmotnosť m a visí v strede špagátu dlhého l. Akou silou musí Kaťa napínať špagát, aby bol vodorovný?

Dnešná mládež je lenivá a všetko by si iba zjednodušovala, tak to teda urobíme aj my. Predstavme si, že Kaťa drží špagát na oboch koncoch aj s opičkou. Môžeme teraz nazerať na celú situáciu tak, že opička aj so špagátikom je jeden objekt, ktorý sa nehýbe. Musí platiť, že výslednica vonkajších síl na opičku so špagátikom je nulová.

Na opičku pôsobí gravitačná sila F_g. A Kaťa musí pôsobiť na špagát rovnobežne s ním silou F na oboch koncoch.



Obr. 1: Opička na špagáte

Vidíme, že horizontálne zložky Katiných síl F sa vykompenzujú, lebo situácia je symetrická. Pre vertikálne zložky síl môžeme zapísať:

$$2F \sin\alpha = F_g \Rightarrow F = \frac{F_g}{2\sin\alpha}$$

Kaťa by veľmi chcela, aby bol špagát úplne napnutý, čiže by malo platiť $\alpha = 0°$. Keďže pre veľmi malé uhly sa sínus blíži k nule, bude sila potrebná na udržanie opičky veľmi rásť. Ak sa naši kamaráti matematici nepozerajú, môžeme povedať, že pre $\sin 0° = 0$ bude sila potrebná na udržanie opičky nekonečná. No a takouto silou Kaťa určite nedokáže napnúť špagát... A to ani vtedy, keď si zavolá na pomoc Luxuska. Takáto situácia teda nemôže nastať.

Omnoho rýchlejší prístup bol rovno si nakresliť sily pôsobiace na opičku so špagátom, keď je špagát vodorovný. Vtedy sú Katine sily pôsobiace na špagát vodorovné, a teda nemá čo kompenzovať gravitáciu vo zvislom smere. Preto gravitácia aspoň trochu prehne špagát, ktorý už nebude vodorovný.

3.2 B1 – Sušiak (opravoval Marek)

Tina rada suší prádlo. Ešte v Starej Ľubovni sušila druhú juniorskú ligu. Jej obľúbený sušiak vyzerá takto: (viď zadania 3. série) Tina vždy zapĺňa priečky ľavej vyklápacej časti úplne zľava. Koľko priečok môže naplniť, aby sa sušiak neprevrátil? Sušiak je symetrický, má hmotnosť M. Prádlo, ktoré zavesí na jednu priečku, má hmotnosť m, vzdialenosť priečok je d. Aj úplne naľavo na sušiaku je priečka.

To, že sušiak je symetrický, nám hovorí, že má ťažisko na osi, ktorá vedie vertikálne stredom sušiaka. Keď pridáme nejaké oblečenie na ľavé rameno, tak sa može stať, že poloha ťažiska polonaplneného sušiaka už nebude nad jeho základňou (=medzi jeho nohami) a teda sa preváti. Z toho vidíme, že dôležitá je iba x-ová súradnica ťažiska, označme si ju X_T. Keďže sme záťaž pridávali na ľavú stranu, tak sa Sosiak prevráti okolo svojej ľavej nohy, a preto si určíme počiatok súradnicovej sústavy v mieste dotyku tejto nohy so zemou. Na začiatku je teda ťažisko napravo vo vzdialenosti $\frac{a}{2}$, teda $X_T = \frac{a}{2}$. Pridávaním oblečenia sa X_T bude zmenšovať a sušiak sa prevráti, keď $X_T < 0$. Pre polohu ťažiska n hmotných bodov platí $X_T = \frac{\sum_{i=1}^n m_i x_i}{\sum_{i=1}^n m_i}$. (Tento vzorec vieme získať vyriešením rovnice pre momenty síl. Zápis $\sum_{i=1}^n m_i x_i$ sa číta ako suma od jedna po n z $m_i x_i$ a je to to isté ako súčet $m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3 + \cdots + m_nx_n$.) Takže, ak je naplnených n priečok, poloha nášho ťažiska bude

$$X_T = \frac{M\frac{a}{2} - \sum_{i=1}^n \left(m(c - d(i-1))\cos\alpha\right)}{nm + M} \ .$$

Vyrátame súčet n členov, ktorý tam máme (pomocou vzorca na výpočet aritmetického radu).

$$X_T = \frac{M\frac{a}{2} - nm\left(c - \frac{d(n-1)}{2}\right)\cos\alpha}{nm + M}$$

Ako sme už povedali, sušiak spadne, keď $X_T < 0$, teda ak

$$\frac{Ma}{m\cos\alpha} - 2cn + d(n^2 - n) < 0 \ .$$

Pre n je to kvadratická (ne)rovnica s diskriminantom $D = (2c + d)^2 - \frac{4daM}{m\cos\alpha}$, takže aby mala riešenie(= aby sa vôbec mohol sušiak prevrátiť), musí byť diskriminant kladný, a teda

$$m > \frac{4daM}{(2c + d)^2\cos\alpha} \ .$$

Teraz nájdeme korene. (Keďže nám nevychádzajú pekné výrazy, tak aj úpravy sú zložitejšie, ako by sme čakali, keď hľadáme čo najjednoduchší tvar, ale to nás nesmie odradiť :D)

$$n_{1,2} = \left(\frac{c}{d} + \frac{1}{2}\right) \pm \sqrt{\left(\frac{c}{d} + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{Ma}{md\cos\alpha}}$$

Obidve riešenia sú kladné, ale pre nás má zmysel iba to menšie, lebo ľavé rameno, na ktoré Tina vešia prádlo môže mať maximálne $n = \dfrac{c}{d}$ priečok (viac sa ich tam proste nezmestí) a väčšie z riešení, ktoré sme vypočítali, nespĺňa túto podmienku. Takže Tina môže naplniť maximálne

$$n = \left(\frac{c}{d} + \frac{1}{2}\right) - \sqrt{\left(\frac{c}{d} + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{Ma}{md\cos\alpha}}$$

priečok, aby sa Sosiak neprevrátil.

3.3 B2 – Sysľova raketa (opravoval Paťo)

Syseľ má rád svoju raketu. Má takú špeciálnu vlastnosť, že prakticky okamžite dosahuje výslednú rýchlosť v, lebo spotrebuje všetko palivo. Minule ju chcel vodorovne odpáliť (to viete, ona sa tak ľahko nevzdá) na hrane veľkej hranatej jamy uprostred vodorovnej roviny okolo Močenku. Na Sysľove potešenie raketa neostala dole v jame, ale pružne sa poodrážala od dna a stien (nevie, koľkokrát) a vyletela z nej tak, že to vyzeralo, ako by tam žiadna jama nebola (teda na druhom okraji jamy mala opäť rovnakú vodorovnú rýchlosť v.) Keď si po ňu na druhý kraj jamy prišiel, cestou zmeral, že jama je široká d metrov. Aká môže byť hlboká?

Ako ste si všetci správne uvedomili, raketa bude štartovať s vodorovnou rýchlosťou v a teda pôjde o pohyb, ktorý voláme vodorovný vrh. Pre takýto a hocijaký iný vrh platí, že zložky rýchlosti vo vodorovnom a vo zvislom smere sú na sebe *nezávislé*. Platí teda

$$\begin{aligned} v_x(t) &= v & x(t) &= vt\,, \\ v_y(t) &= -gt & y(t) &= h - \tfrac{1}{2}gt^2\,. \end{aligned}$$

Trajektória pohybu však nebude trápna polparabola. Pružný odraz od zvislej steny vždy spôsobí zmenu znamienka x-ovej rýchlosti a odraz odo dna zasa otočí znamienko y-ovej rýchlosti. Stále platí, že tieto dva odrazy sú na sebe nezávislé, tj. odraz od zvislej steny nepôsobí na y-ovú rýchlosť a analogicky odraz odo dna jamy nijako nevníma x-ová rýchlosť.

Čo to znamená pre nás? Vo zvislom smere bude raketa najskôr padať voľným pádom po dráhe h. Z rovnice $y(t) = 0$ vyjadríme, že jej to bude trvať čas

$$T_0 = \sqrt{\frac{2h}{g}},$$

Zo symetrie problému jej bude trvať rovnaký čas dostať sa naspäť do pôvodnej výšky. Jeden odraz, teda cesta dole–hore, bude trvať čas $2T_0$. Ak sa odo dna odrazí i-krát, čas letu rakety bude[1] $T_i = 2iT_0 = 2i\sqrt{\dfrac{2h}{g}}$.

[1] V tomto príklade používame indexy i, j pri veličine ako vyjadrenie, že veličina je od hodnôt i, j závislá, nie je to na rozoznanie rôznych veličín.

Počas tohto času môže dochádzať aj k odrazom od vertikálnych stien. Dôležité je, že raketa nakoniec vyletí na *opačnom* konci jamy, ako do nej bola vpustená. Na začiatku aj na konci má raketa rovnakú kladnú rýchlosť. Keďže pri každom odraze sa zmení znamienko rýchlosti, musí nastať párny počet odrazov. Inak by bolo znamienko rýchlosti opačné, ako chceme.

Vyletenie na opačnom konci tiež znamená, že raketa v x-ovom smere nalietala nepárny násobok d. Ak teda nastalo j bočných odrazov, prešla v x-ovom smere $(j+1)d$. To ľahko uvidíme: pre $j=0$, čiže keď sa neodráža, prejde d. Keď ale zvýšime počet bočných odrazov od bočných stien o 2, prejde o $2d$ viac (proste preletenie naviac tam–naspäť vyžaduje dva odrazy od stien).[2]

Keďže sa v horizontálnom smere stále pohybovala konšt. rýchlosťou v, čas T_i vyjadríme ako

$$T_i = \frac{\text{dráha}}{\text{rýchlosť}} = \frac{(j+1)d}{v},$$

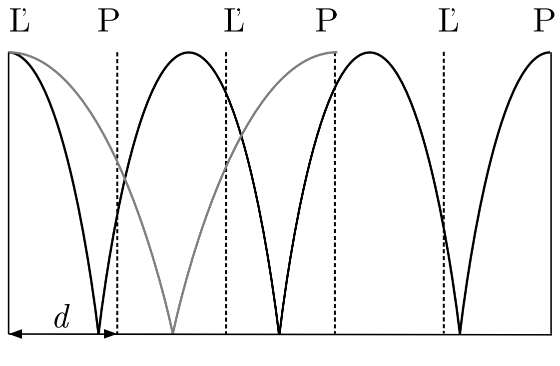
Porovnaním dvoch odvodených vzťahov pre T_i už vieme hĺbku jamy vyjadriť.[3] Pre i odrazov od dna a pre j odrazov od bočných stien bude teda hĺbka jamy rovná

$$h_{ij} = \frac{gd^2}{8v^2}\frac{(j+1)^2}{i^2},$$

Na i a j okrem parity j kladieme ale ešte jednu podmienku, ktorú si ukážeme na konci druhého spôsobu riešenia.

Príklad sa totiž dal riešiť aj elegante a umelecky. Môžeme totiž využiť tzv. *zrkadlenie*. A to tak, že si predstavíme, že steny jamy nie sú obyčajné steny, ale sú zrkadlá. A ešte si predstavíme, že Sysľovu raketu riadi inteligentý syslík. Keď sa raketa približuje k zrkadlu, vidí, že sa raketa jednoducho približuje. V momente odrazu sa však syslík začne pozerať nie na skutočnú raketu, ale na jej odraz v zrkadle. A čo nevidí? Obraz v zrkadle pokračuje po pôvodnej trajektórii rakety! To preto, lebo zrkadlo nám, rovnako ako pružný odraz od steny, obracia znamienko pozorovanej rýchlosti.

Náš problém sa nám zredukuje na takéto hopsanie:



Obr. 2: Znázornenie zrkadlenia trajektórie rakety

[2]Ak sa nepáči indukcia, tak si to nakreslite.
[3]Určite do ale dokážete aj sami :-) Preto uvádzame iba výsledok.

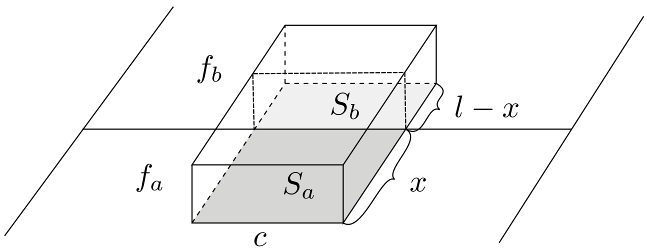
Ako vidieť, musíme si dávať pozor na správne označenie pravého a ľavého okraja steny. Výlet z jamy nastane vtedy, keď raketa bude prechádzať cez čiarkovanú čiaru v najvyššom bode svojej trajektórie a k odrazu od zvislých stien bude dochádzať vtedy, keď raketa bude prelietať cez čiarkovanú čiaru.

V takomto obrázku si môžme všimnúť jednu vec, v ktorej ste sa mnohí sekli: to, že trajektória rakety je symetrická, neznamená, že sa raketa musí odraziť práve raz v strede jamy alebo že od stien sa odráža v polke ich výšky! Sugestívne sú nakreslené dva prípady, pričom oba môžu nastať: jeden je krásne jednoduchý, druhý však nie! Jediná podmienka, ktorú (okrem parity j) musíme splniť, je nesúdeliteľnosť i a $j+1$. Ak by sme túto podmienku nesplnili, v obrázku by sme našli periodicitu, a teda periodicky by nám raketa musela z jamy vyskakovať a potom sa záhadne do nej vracať…

3.4 B3/A1 – Ako išiel kvádrik na vandrovku (opravovala Kaja)

Kvádrik dĺžky l sa vybral na vandrovku na naklonenú rovinu so sklonom α. A to veraže nie len tak hocijakú. S koeficientom trenia, ba až dvomi! Ej, skokovo sa mení jeden f_a na druhý f_b, po vzdialenosti a od začiatku a b od konca roviny. I spustil sa s nulovou počiatočnou rýchlosťou a na jeho veľké sklamanie na konci roviny zastal. To by nič nebolo, len kvádrik je švárny šuhaj a má nezanedbateľnú dĺžku l. Poraďte mu, aby sa vystríhal pred podobnými neplechami, aké je f_b, ak f_a a ostatné parametre roviny poznáte! Predpokladajte, že $a, b > l$.

Skôr, než sa rozhodneme, aký prístup si zvoliť, poďme sa pozrieť na trecie sily. Kým bude kvádrik celým spodkom na úseku s rovnakým trením, je to jasné. Zaujímavý je ten prechod.



Obr. 3: Trenie na prechode

Kedže kvádrik má rovnú podstavu, môžeme predpokladať, že tlak na podložku p je v každom bode rovnaký. A keď ho pozdĺž zlomu rozsekneme na dva kvádriky, normálové sily na ne budú v rovnakom pomere ako plochy. Keďže tieto plochy majú jednu stranu vždy rovnakú, pomer plôch $S_a : S_b$ sa rovná pomeru dĺžok x a $l-x$. Konkrétne ak normálová sila je F_N, tak výsledná trecia sila je

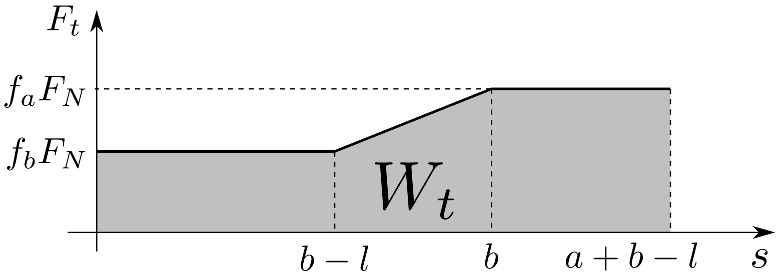
$$F_t = f_a p S_a + f_b p S_b = f_a \frac{F_N}{lc} cx + f_b \frac{F_N}{lc} c(l-x) = x\frac{F_N}{l}(f_a - f_b) + f_b F_N$$

Takže trecia sila a tiež zrýchlenie na tomto úseku sú priamo úmerné prejdenej dráhe, pričom trecia sila sa lineárne mení z $f_b F_N$ na $f_a F_N$. Závislosť zrýchlenia od času teda zrejme nebude nič príjemné.[4] Preto bude rozumnejšie zamerať sa na energie, nie na rýchlosti.

[4] Pre makáčov: premyslite si, aká to bude závislosť!

Keď si nakreslíme graf závislosti sily od dráhy, plocha pod grafom sa bude rovnať vykonanej práci, resp. zmene energie. A o akej energii sa vlastne bavíme? Poďme si to rozobrať.

Na konci pohybu má kvádrik nulovú kinetickú energiu a nulovú potenciálnu energiu (lebo tam si položíme nulovú potenciálnu hladinu). Na začiatku má nulovú kinetickú a kladnú potenciálnu energiu. Kam sa potom potenciálna energia stratí? Premení sa trením na teplo. Takže práca vykonaná trením sa rovná zmene potenciálnej energie.[5] A už si môžeme nakresliť graf.



Obr. 4: Závislosť trecej sily od prejdenej dráhy

Vyjadrením W_t pomocou plochy pod grafom dostávame:

$$W_t = (b-l)f_bF_N + \frac{1}{2}l(f_aF_N + f_bF_N) + (a-l)f_aF_N$$

$$W_t = F_N\big((b-l)f_b + \frac{1}{2}l(f_a+f_b) + (a-l)f_a\big) = F_N\left(f_b\left(b-\frac{l}{2}\right) + f_a\left(a-\frac{l}{2}\right)\right)$$

Veľkosť F_N zistíme tak, že si rozložíme tiažovú silu $F_G = mg$ na zložku rovnobežnú s naklonenou rovinou a kolmú na naklonenú rovinu a dostaneme $F_N = mg\cos\alpha$. Zmenu potenciálnej energie môžeme vyjadriť ako $\Delta E_p = mg\Delta h = mg(a+b-l)\sin\alpha$. Z rovnosti $W_t = \Delta E_p$ úpravami dostaneme:

$$mg\cos\alpha\left(f_b\left(b-\frac{l}{2}\right) + f_a\left(a-\frac{l}{2}\right)\right) = mg(a+b-l)\sin\alpha$$

$$f_b\left(b-\frac{l}{2}\right) + f_a\left(a-\frac{l}{2}\right) = (a+b-l)\tan\alpha$$

$$f_b = \frac{(a+b-l)\tan\alpha - \left(a-\frac{l}{2}\right)f_a}{b-\frac{l}{2}}$$

Niektorí z vás si ešte všimli nutnú podmienku $f_a > \tan\alpha > f_b$, bez ktorej by všetko vyzeralo úplne inak. Ako? To už nechám na Vás ;-) .

3.5 B4/A2 – Otoč sa! (opravoval Maťo, vzorák Mišo)

Odmerajte svoj moment zotrvačnosti okolo dvoch rôznobežných osí majúc stále rovnakú polohu tela.

[5] Obe sú záporné, lebo potenciálna energia sa zníži a trenie pôsobí proti smeru pohybu. Pre jednoduchosť budeme rátať s kladnými.

Úvodom experimentu si zvolíme metódu. Z povahy fungovania momentu zotrvačnosti vyplýva, že budeme chcieť niečo otáčať, alebo hojdať. My si zvolíme hojdanie, lebo je trochu menej náročné na realizáciu. Ako aparatúra nám bude stačiť hojdačka, alebo akýkoľvek iný záves, aby sme vytvorili fyzikálne kyvadlo. Avšak, pri zavesení na lano musíme dbať na to, aby sme sa neotáčali okolo osi lana, pretože sa tým mení rozloženie hmotnosti vzhľadom na os otáčania.

Načrtneme fyzikálny princíp. Ľudské telo na hojdačke môžeme považovať za fyzikálne kyvadlo, pre ktorého periódu platí známy vzťah: $T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgr_T}}$. Všetky veličiny okrem I vieme jednoducho merať - g je známe, m a r_T nameriame. Takže cesta je schodná: $I = \frac{T^2 m r_T g}{4\pi^2}$.

Keďže pri experimente chceme určiť náš moment zotrvačnosti vzhľadom na osi prechádzajúce našim ťažiskom (také hodnoty sú najužitočnejšie), musíme použiť Steinerovu vetu na prepočet momentu zotrvačnosti vzhľadom na inú, ale rovnobežnú os. Stačí si uvedomiť, kde má hojdačka os otáčania. Steinerova veta hovorí: $I = I_0 + mr^2$, kde I_0 je moment zotrvačnosti vzhľadom na os prechádzajúcu naším ťažiskom, m je naša hmotnosť a r_T je vzdialenosť nášho ťažiska od osi otáčania hojdačky. Po dosadení do prvého vzťahu a vyjadrení I_0 dostaneme: $I_0 = \frac{T^2 m r_T g}{4\pi^2} - mr_T^2$, čo je vzorec, z ktorého budeme počítať. Hmotnosti lán a sedačky hojdačky zanedbáme.

Môžeme sa pustiť do merania periódy fyzikálneho kyvadla. Moment zotrvačnosti máme merať v dvoch situáciách. My si bonusovo zvolíme tri rôzne osi vystretého ľudského tela. Predozadnú os označme x, ľavo-pravú y a vertikálnu z. Pri meraní sme na hojdačke umiestnení tak, aby naša zvolená os bola rovnobežná s osou otáčania hojdačky, teda pri meraní osi x sme stáli na hojdačke bokom, pri osi y čelom dopredu a pri osi z bolo treba ležať na hojdačke bokom, pričom telo prečievalo doľava a doprava od hojdačky, kvôli toľko zdôrazňovanej rovnobežnosti osí.

Potrebujeme ešte určiť polohu ťažiska, aby sme vedeli určiť jeho vzdialenosť od osi otáčania r_T. V pravo-ľavom smere je telo symetrické, v predo-zadnom už menej, ale stále sa to dá stráviť, pretože aj pri odhade by sme sa nedopustili chyby väčšej ako 5 cm, čo pri vzdialenosti od osi otáčania okolo $1,8\,\mathrm{m}$ spraví znesiteľnú chybu. Ostáva nám určiť polohu ťažiska v hornodolnom smere. To môžme určiť vybalansovaním tela na nejakej ľahkej doske. Vo vyváženom stave už ľahko odmeriame vzdialenosť bodu opretia od vrchu hlavy, k tomu už len pripočítame vzdialenosť vrchu hlavy od osi otáčania hojdačky. Vyšli nám hodnoty $r_x = r_y = 1\,\mathrm{m}$ a $r_z = 1,8\,\mathrm{m}$.

Nasleduje tabuľka nameraných period aj s priemernými hodnotami a štandardnými odchýlkami priemeru.

Tab. 1: Tabuľka nameraných periód

P.č.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	priemer	σ_T
T_x(s)	2,32	2,21	2,11	2,12	2,20	2,17	2,10	2,28	2,19	2,14	2,18	0.9%
T_y(s)	2,14	2,17	2,24	2,22	2,15	2,23	2,17	2,14	2,26	2,06	2,18	0.7%
T_z(s)	2,56	2,73	2,72	2,69	2,58	2,63	2,67	2,71	2,68	2,73	2,67	0.6%

Štandardné odchýlky priemeru nám hovoria o chybe nášho výsledku a boli vypočítané podľa ľahko nájditeľného vzorca $\sigma_T = \sqrt{\frac{1}{N(N-1)}\sum_{i=1}^{n}(T_i - \overline{T})^2}$. Nutnosť určovať pri experimentálnej úlohe neistoty vyplýva z toho, že potom vieme posúdiť dôveryhodnosť nášho výsledku. Avšak, takto sme určili len neistotu určenia periódy, ale do vzťahu pre výpočet I_0 vstupujú aj ďalšie údaje. Hmotnosť tela m vieme odvážiť dosť presne, bežné váhy merajú na desatinu kg, z čoho keď vezmeme polovicu najmešieho dielika pri hmotonosti človeka $m = 80\,\mathrm{kg}$ dostaneme zanedbateľnú chybičku asi desatiny percenta. Pri určení neistoty vzdialenosti nášho ťažiska od osi otáčania sme neistotu odhadli ako 5 cm, z čoho pri vzdialenostiach $r_x = r_y = 1\,\mathrm{m}$ a $r_z = 1,8\,\mathrm{m}$ dostaneme relatívne chyby 5% a 2, 7%, v tom istom poradí. Výsledné momenty zotrvačnosti potom sú, už aj so sčítanými chybami spôsobenými si, teda 7, 6% pre $I_0x = 1,4\,\mathrm{kgm}^2$, 7, 2% pre $I_0y = 1,4\,\mathrm{kgm}^2$ a 4, 5 % pre $I_0z = 0,8\,\mathrm{kgm}^2$, teda:

$$I_{0x} = 14 \pm 1\,\mathrm{kgm}^2, I_{0y} = 14 \pm 1\,\mathrm{kgm}^2, I_{0z} = 0{,}8 \pm 0{,}05\,\mathrm{kgm}^2$$

3.6 A3 – Súšošovie (opravoval Polik, vzorák Andrej)

Jano a Andrej spadli do ozrutného obludného zošívača siamátora, ktorý im poprepletal telá a orgány... A okrem iného, spolu teraz majú už len dve oči. Oftalmológ im prezradil, že by potrebovali okuliare s ohniskovou vzdialenosťou F. Andrej pôvodne nosil okuliare s ohniskovou vzdialenosťou f_1 a Jano s ohniskovou vzdialenosťou f_2. Ako majú umiestniť okuliare voči sebe a kde bude mať táto konštelácia ohnisko, aby pomocou nej videli opäť dobre? Vo výpočte nepoužite netriviálne tvrdenia, len bežnú geometrickú optiku.

Milí šošoviaci,

zopakujme si, o čom bolo zadanie. Chcete mať šošovku F umiestnenú v nejakom bode priestoru. Vy ju ale nemáte. Chcete ju teda nahradiť dvomi, pričom jedna má ohniskovú vzdialenosť f_1 a druhá f_2 a chcete, aby svetlo po prechode týmito dvomi šošovkami sa správalo rovnako, ako keby prešlo pôvodnou šošovkou s ohniskovou vzdialenosťou F.

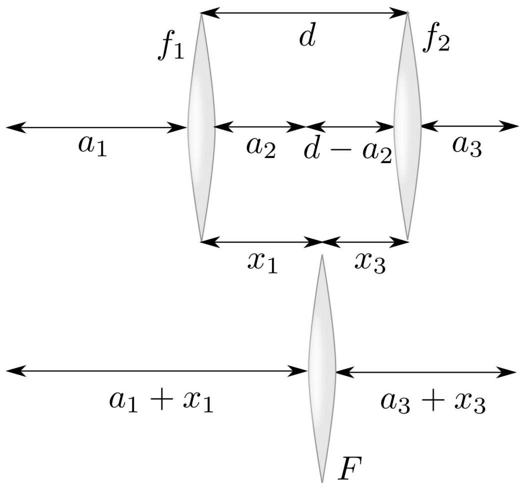
V prvom rade je dôležité si premyslieť, či to ide. Keď človek zapojí predstavivosť, vyzerá to nádejne. Tak zapíšme si zobrazovacie rovnice pre jednotlivé šošovky:

$$\frac{1}{f_1} = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2}, \qquad \frac{1}{f_2} = \frac{1}{d - a_2} + \frac{1}{a_3}$$

Tu si ľahko môžeme vyjadriť z prvej rovnice a_2 a dosadiť do druhej.

Nie, teraz neurobíme to, že $a_1 = +\infty$ a $a_3 = F$. Prečo by a_3 mala byť ohnisková vzdialenosť F? Vy chcete, aby vychádzajúce lúče sa správali ako zaostrené danou šošovkou. Na to nestačí mať ohnisko na rovnakom mieste. Zjavne ak mám dve šošovky, ktoré majú ohnisko na rovnakom mieste, tak zďaleka nezaobrazujú veci rovnako! V drvivej väčšine riešení ste natvrdo položili, že posledná šošovka musí byť na mieste nahrádzanej a tú druhú dáme tak, aby sa zachovala poloha ohniska. To, že rovnaké lúče budú vyzerať rôzne zobrazené týmto a šošovkou F, je vám úplne jedno.

Urobme sofistikovanejšiu verziu zoberme si niekoľko prípadov toho, ako majú byť tie dve šošovky ekvivalentné so šošovkou F a porátajme vzdialenosti x_1, x_2 a F.



Obr. 5: Ekvivalentné šošovky

Prvá bude tá, ktorú ste navrhovali – $a_1 = +\infty$. Z nej vyjde $a_3 = \dfrac{f_2(d-f_1)}{d-f_1-f_2}$. Keďže $a_3 + x_3 = F$, $x_3 = F - \dfrac{f_2(d-f_1)}{d-f_1-f_2}$. Druhá situácia bude taká, že si zoberieme bod, pre ktorý $a_3 = +\infty$ a dopočítame a_1. Vyjde $a_1 = \dfrac{f_1(d-f_2)}{d-f_1-f_2}$ a z toho $x_1 = F - \dfrac{f_1(d-f_2)}{d-f_1-f_2}$. A vezmeme si tretiu situáciu. Nekonečná skoro došli, ale iba skoro. Položíme $a_1 = f_1$. To vyjde $a_2 = +\infty$ a $a_3 = f_2$. Pre šošovku F má platiť zobrazovacia rovnica: $\dfrac{1}{F} = \dfrac{1}{f_1+x_1} + \dfrac{1}{f_2+x_3}$.

Máme tri rovnice s tromi neznámymi. Zatneme zuby a vyriešime. Výsledok[6] je tu:

$$F = \frac{f_1 f_2}{f_1+f_2-d},\ x_1 = \frac{f_1 d}{f_1+f_2-d},\ x_3 = \frac{f_2 d}{f_1+f_2-d}.$$

A teraz príde okamih pravdy. Podľa nákresu má platiť $x_1 + x_3 = d$. A to *neplatí*.

Niekde sa deje niečo veľmi, ale veľmi zlé. Zjavne máme 4 rovnice a 4 neznáme, ktoré spolu nesedia, teda jedna z rovníc je zle. A ukazuje sa, že zlá rovnica je *práve* $x_1 + x_3 = d$.

V optickej sústave máme akokeby medzeru. Dala by sa napadnúť voľba troch špeciálnych prípadov. Realita je ale, ako ukážeme ďalej, omnoho krutejšia.[7]

Principiálne medzera znamená to, že vzdialenosti pre šošovku F máte merať z jednej strany od jednej roviny a z druhej strany od inej roviny. Tieto roviny nazývame *hlavnými rovinami* optickej sústavy. Toto je vlastnosť všetkých optických sústav, dokonca to platí aj pre jednoduchú šošovku, len pre ňu tieto roviny splývajú a sú vo vnútri šošovky.

Keď sa pozrieme opäť na zobraovaciu rovinu z tretej situácie, zobrazovacia rovnica pre šošovku F by mohla vyzerať takto: $\dfrac{1}{F} = \dfrac{1}{a_1+x_1} + \dfrac{1}{a_3+x_3}$. Jej platnosť dokážeme porovnaním s výsledkom získaným po použití zobrazovacích rovníc pre f_1 a f_2:

[6] Prečo práve tieto korene uvidíte neskôr.

[7] Ak máte pocit, že autor tohto vzoráku vás ťahá za nos, tak si uvedomte, že šošovky to svojim správaním urobili už pred ním.

Vyjadríme z prvej rovnice a_2:

$$\frac{1}{f_1} = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} \Rightarrow a_2 = \frac{a_1 f_1}{a_1 - f_1}$$

$$\frac{1}{f_2} = \frac{1}{d - a_2} + \frac{1}{a_3}$$

A veľa úprav. (Dosadenie a_2. Odstránenie zlomkov vynásobením všetkými menovateľmi. Zase odstraňujeme zlomky násobením $a_1 - f_1$ a vynímame pred zátvorku. Osamostatnenie $a_1 a_3$.)

$$\frac{1}{f_2} = \frac{1}{d - \frac{a_1 f_1}{a_1 - f_1}} + \frac{1}{a_3}$$

$$\left(d - \frac{a_1 f_1}{a_1 - f_1}\right) a_3 = a_3 f_2 + f_2 \left(d - \frac{a_1 f_1}{a_1 - f_1}\right)$$

$$a_1 a_3 (d - f_1 - f_2) + a_1 (f_1 f_2 - f_2 d) + a_3 (f_1 f_2 - d f_1) + f_1 f_2 d = 0$$

$$a_1 a_3 + a_1 f_2 \frac{f_1 - d}{d - f_1 - f_2} + a_3 f_1 \frac{f_2 - d}{d - f_1 - f_2} + \frac{f_1 f_2 d}{d - f_1 - f_2} = 0$$

A porovnávame so zobrazovacou rovnicou pre šošovku F.

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{a_1 + x_1} + \frac{1}{a_3 + x_3}$$

$$(a_1 + x_1)(a_3 + x_3) = F(a_3 + x_3) + F(a_1 + x_1)$$

$$a_1 a_3 + a_1 (x_3 - F) + a_3 (x_1 - F) + x_1 x_3 - F x_1 - F x_3 = 0$$

Z toho porovnaním dostávame:

$$x_3 - F = f_2 \frac{f_1 - d}{d - f_1 - f_2}$$

$$x_1 - F = f_1 \frac{f_2 - d}{d - f_1 - f_2}$$

$$x_1 x_3 - F x_1 - F x_3 = \frac{f_1 f_2 d}{d - f_1 - f_2}$$

Všimnime si, že $F^2 = (x_3 - F)(x_1 - F) - (x_1 x_3 - F x_1 - F x_3)$:

$$F^2 = f_2 \frac{f_1 - d}{d - f_1 - f_2} f_1 \frac{f_2 - d}{d - f_1 - f_2} - \frac{f_1 f_2 d}{d - f_1 - f_2}$$

$$F^2 = \frac{f_1 f_2}{(d - f_1 - f_2)^2} ((f_1 - d)(f_2 - d) - d(d - f_1 - f_2))$$

$$F^2 = \frac{f_1^2 f_2^2}{(d - f_1 - f_2)^2}$$

A teraz treba odmocniť a vybrať si dobrý koreň. Očakávame, že pre dve spojky blízko seba bude výsledok opäť spojka, teda:

$$F = \frac{f_1 f_2}{f_1 + f_2 - d}$$

A vyjadríme x_1 a x_3:

$$x_1 = \frac{f_1 d}{f_1 + f_2 - d}, \quad x_3 = \frac{f_2 d}{f_1 + f_2 - d}$$

A dostali sme to, čo sme očakávali.

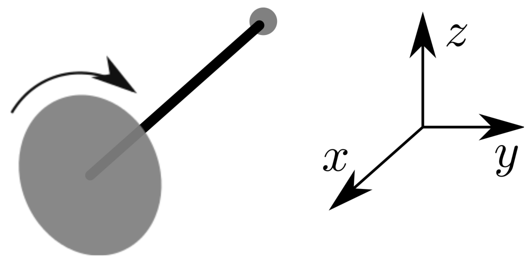
3.7 A4 – Zotrvačník (opravoval Andrej, vzorák Lukaf)

Peťo má rád svoj zotrvačník. Minule ho navliekol na jeho obľúbenú tyč s ložiskom a roztočil na vysokú uhlovú rýchlosť tak, aby jeho os bola vodorovná. Jeden koniec tyče uchytil v guľovom kĺbe, ktorý sa otáča bez trenia a druhý pustil a nechal napospas gravitácii. Peťa teraz zaujíma:

a) Kam a prečo sa pohne zotrvačník v prvom okamihu?

b) Opíšte a vysvetlite kvalitatívne celý pohyb zotrvačníka.

Zotrvačník sa skladá z tyče, ktorá je na jednom konci upevnená v čape a na druhom konci je koleso. Tyč je na začiatku vo vodorovnej polohe a koleso sa točí vysokou uhlovou rýchlosťou (bez ujmy na všeobecnosti si môžme predstaviť, že sa koleso točí v smere hodinových ručičiek pri pohľade zvonku a že tyč zotrvačníka leží v smere osi x).



Obr. 6: Začiatočná pozícia

Na počiatku je jediný pohyb krútenie sa kolesa zotrvačníka, čo je samozrejme otáčavý pohyb. Nastavíme si myslenie do módu „otáčavá mechanika“. Otáčavý pohyb je popísaný veličinou zvanou moment hybnosti a definovanou ako

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}.$$

Medzi otáčavým a posuvným pohybom je možno nájsť analógiu, čo sa týka významu fyzikálnych veličín a vzťahov medzi nimi. Moment hybnosti je otáčavým analógom hybnosti. Zmena hybnosti je v posuvnom pohybe spôsobená silou, čo popisuje 2. Newtonov zákon:

$$\frac{\Delta \vec{p}}{\Delta t} = \vec{F}.$$

Otáčavým analógom tejto rovnice je vzťah

$$\frac{\Delta\vec{L}}{\Delta t} = \vec{M},$$

kde $\vec{M}$ je moment sily, otáčavý analóg sily definovaný vzťahom

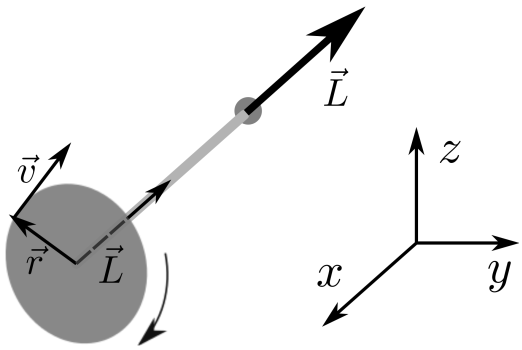
$$\vec{M} = \vec{R} \times \vec{F}.$$

$\vec{F}$ je pôsobiaca sila a jej rameno $\vec{R}$ je vzdialenosť pôsobiska sily od osi, vzhľadom na ktorú moment sily počítame.

Aplikujme teraz rovnice z predchádzajúceho odseku na náš zotrvačník. Koleso zotrvačníka sa otáča, jeho moment hybnoti je

$$\vec{L} = \sum m\vec{r} \times \vec{v} = I\vec{\omega},$$

kde v je obvodová rýchlosť malého elementu kolesa s hmotnosťou m nachádzajúceho sa vo vzdialenosti r od osi otáčania, I je moment zotrvačnosti vzhľadom na os, okolo ktorej rotuje a ω je uhlová rýchlosť tejto rotácie. Suma znamená sčítanie cez všetky elementy tvoriace koleso. Momenty hybnosti všetkých elementov kolesa majú rovnaký smer, a teda smer momentu hybnosti kolesa bude rovnobežný s tyčou (v smere $-x$), ako ukazuje obrázok.

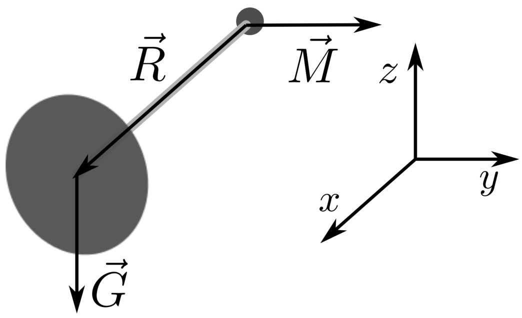


Obr. 7: Moment hybnosti zotrvačníka

Na koleso pôsobí jediná sila – tiažová sila – a pochopiteľne vo zvislom smere (okrem nej pôsobia na body kolesa dostredivé sily). Zmenu momentu hybnosti kolesa bude teda spôsobovať moment tiažovej sily, ktorý je (vzhľadom na pevný bod v zotrvačníku – bod upevnenia)

$$\vec{M} = \vec{R} \times \vec{G}.$$

Smer momentu tiažovej sily je y, ako ukazuje obrázok.

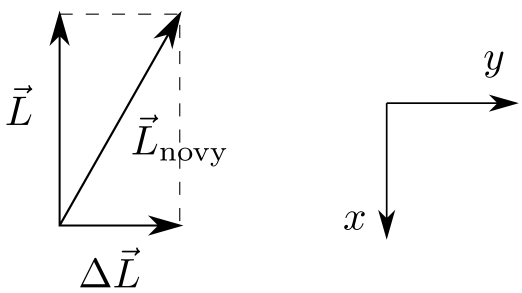


Obr. 8: Moment tiažovej sily

Podľa rovnice $\Delta\vec{L}/\Delta t = \vec{M}$ spôsobí moment sily zmenu momentu hybnosti v smere momentu sily, čiže v smere y. Zmena momentu hybnosti je jednoducho

$$\Delta\vec{L} = \vec{L}_{\text{novy}} - \vec{L}.$$

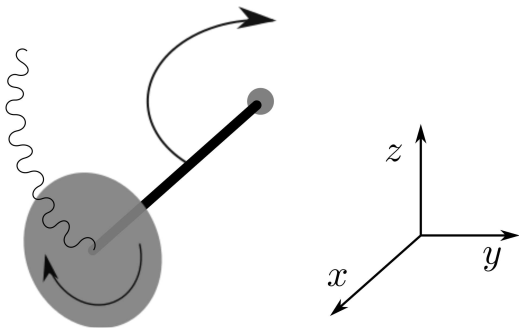
Poskladáme vektory, aby sme získali $\vec{L}_{\text{novy}} = \vec{L} + \Delta\vec{L}$ a zistíme, že nový moment hybnosti leží vo vodorovnej rovine, len je trochu pootočený. Pre veľmi malú hodnotu $\Delta\vec{L}$ môžeme povedať, že veľkosť nového momentu hybnosti je rovnaká ako veľkosť starého.



Obr. 9: Zmena momentu hybnosti

A ako sa to mohlo stať? Tak, že tyč zotrvačníka sa pootočila vo vodorovnej rovine a jej nový smer je totožný so smerom momentu hybnosti $\vec{L}_{\text{novy}}$. Tým sme odpovedali na prvú časť úlohy. Prvý pohyb zotrvačníka je otočenie sa tyče vo *vodorovnej* rovine v smere hodinových ručičiek (pri pohľade zhora).

Ako bude teda vyzerať celý pohyb zotrvačníka? Koleso rotuje okolo osi definovanej tyčou. Tyč rotuje vo vodorovnej rovine – tento pohyb sa odborne nazýva precesia. Ak však tyč rotuje vo vodorovnej rovine, má moment hybnosti vo zvislom smere $(-z)$. Ten na začiatku pohybu nebol a ani v sústave nepôsobí sila, ktorej moment by zmenu momentu hybnosti v smere osi z spôsoboval. Moment hybnosti v smere osi z sa má zachovávať a aby sa tak dialo, tyč trochu klesne a začne vykonávať pomalý krúživý pohyb, aby priemet momentu hybnosti kolesa do smeru osi z kompenzoval moment hybnosti tyče. Tento pohyb sa odborne nazýva nutácia. Celý pohyb zotrvačníka znázorňuje nasledujúci obrázok:



Obr. 10: Výsledný pohyb zotrvačníka

Výsledková listina po 3. kole letnej časti 2012/2013

A

	Meno	Škola	3	4	5	6	♡	Σ_3	Σ
1	Dušan Kavický	GJH	9	9	9	6	0	33,00	105,00
2	Jakub Šafin	GPH	9	9	6	5	0	29,00	98,00
3	Karolína Šromeková	ŠpMNDaG	9	7	6	6	0	28,00	91,00
4	Martin Gažo	G Pankúchova	8	9	6	9	-2	30,00	90,00
5	Tomáš Šoltinský	GPH	9	7	3	3	0	22,00	89,00
6	Jakub Bahyl	OG Varšavská	8	7	6	2	-2	21,00	83,00
7	Juraj Surovčík	G P.O.H.	6	8	6		0	20,00	73,00
8	Miroslav Gašparek	SGOCZA	9	8	9	7	-4	29,00	70,00
9	Samuel Sučík	GJH	7	7		1	-2	13,00	66,00
10	Matej Badin	GJH	9		9	3	-10	11,00	65,00
11	Michal Buráň	GJAK-UB	8		6	7	0	21,00	64,00
12	Jaroslav Valovčan	GĽŠ Zvolen	9	7	6	1	0	23,00	63,00
13	Mário Lipovský	GJH	9				0	9,00	60,00
14	Irena Bačinská	ŠpMNDaG	9	6	6		-6	15,00	57,00
15	Samuel Kočiščák	G Poštová	2			1	0	3,00	56,00
15	Róbert Lexmann	G Ľ. Štúra Trenčín	9	3		1	0	13,00	56,00
17	Marek Koščo	OG Varšavská	7	7			-4	10,00	52,00
18	Vladimír Macko	GĽŠ Zvolen	8			3	0	11,00	50,00
19	Alžbeta Kurdelová	ŠpMNDaG					0	0,00	48,00
20	Pavol Olexa	GAB	4	2			0	6,00	37,00
21	Martin Murin	GJH	1				0	1,00	33,00
21	Samuel Tomašec	OG Varšavská	1	3			0	4,00	33,00
23	Patrik Turzák	G Poštová					0	0,00	30,00
23	Milan Smolík	GJH	2		9	0	0	11,00	30,00
25	Peter Hojnoš	G SNV					0	0,00	26,00
25	Kamila Součková	ŠpMNDaG		7		1	0	8,00	26,00
27	Eduard Batmendijn	CGSM					0	0,00	24,00
28	Samuel Cibulka	GJH					0	0,00	18,00
29	Tomáš Gonda	Gamča					0	0,00	16,00
29	Matej Oravec	OG Varšavská					0	0,00	16,00
31	Matúš Jenča	GJH	4				0	4,00	12,00
32	Adam Hložný	OG Varšavská					0	0,00	9,00
33	Norbert Slivka	GJGT					0	0,00	8,00
33	Jerguš Stručka	ŠpMNDaG					0	0,00	8,00

B

	Meno	Škola	1	2	3	4	5	♡	Σ_3	Σ
1	Jaroslav Valovčan	GĽŠ Zvolen	9	8	5	9	7	0	33,00	93,00
2	Marek Bašista	GPH		9	5	9	7	0	30,00	91,00
3	Martin Gažo	G Pankúchova		9	9	8	9	-2	33,00	88,00
4	Peter Vašut	GJH	9	6	5	7		0	27,00	81,00
5	Jaroslava Kokavcová	Gamča		9	8	2	3	0	22,00	76,00
6	Pavol Olexa	GAB	9	6	5	4	2	0	24,00	75,00
7	Ondrej Bohdal	GJH		9	9	9		0	27,00	72,00
8	Vladislav Blšták	GJH			7	8		0	15,00	71,00
8	Natália Jankaničová	GS	1	5		9		0	15,00	71,00
10	Marek Koščo	OG Varšavská		5	2	7	7	-4	17,00	68,00
11	Adrián Pieš	ŠpMNDaG	9	4			7	0	20,00	62,00
12	Michal Ržonca	G Ľ. Štúra Trenčín	1	6		8		0	15,00	59,00
13	Jerguš Stručka	ŠpMNDaG	9	4	3			0	16,00	58,00
13	Samuel Tomašec	OG Varšavská		4	4	1	3	0	12,00	58,00
13	Martin Murin	GJH	*	5	5	1		0	11,00	58,00

	Meno	Škola	1	2	3	4	5	♡	Σ_3	Σ
13	Matej Hroboň	Gamča	9	2			1	0	12,00	58,00
17	Barbora Kováčová	ŠpMNDaG	3	6	6			-6	9,00	55,00
18	František Dráček	ZŠ D. Mariková		4	4	2		0	10,00	52,00
18	Lýdia Janitorová	GŠ	1	5	1	3	4	0	13,00	52,00
20	Matúš Berák	OG Varšavská		3	2	2	2	0	9,00	50,00
20	Zuzana Magyarová	GBST		8	5	2		0	15,00	50,00
22	Dominik Cenker	GsvMik	1	2	4	2	0	0	9,00	41,00
23	Adam Mečiar	G VBN Prievidza		6	4	2		0	12,00	37,00
24	Denisa Lampášová	G PB		9				0	9,00	34,00
25	Peter Pavel Arthur Petráš	ŠpMNDaG						0	0,00	31,00
26	Nikola Sokolová	G Hlinská				0	1	-2	-1,00	30,00
27	Tomáš Daneshjo	G Poštová						0	0,00	26,00
27	Kristián Kocan	SPŠE PO						0	0,00	26,00
29	Adam Škrlec	GJH						0	0,00	25,00
30	Dávid Gross	G VBN Prievidza						0	0,00	24,00
31	Adam Pankuch	EvGymJAK						0	0,00	23,00
32	Zuzana Moravcová	G bilingválne						0	0,00	19,00
32	Ivana Mrázová	G P.O.H.						0	0,00	19,00
34	Hana Ščigulinská	GPH						0	0,00	18,00
34	Matej Oravec	OG Varšavská						0	0,00	18,00
36	Adrián Bay	SPŠ J.Murgaša BB						0	0,00	16,00
36	Martina Beňová	G Bajkalská						0	0,00	16,00
38	Mário Janík	G Senec						0	0,00	12,00
39	Mark Daniel	GyPar						0	0,00	10,00
40	Marcel Paľovčík	GPH						0	0,00	8,00
41	Václav Skála	GJV						0	0,00	7,00
41	Rudolf Rovňák	GPH						0	0,00	7,00
43	Matej Repka	G JAR						0	0,00	5,00
44	Martin Šlauka	GAG						0	0,00	0,00
45	Samuel Hapák	MatFyz						0	0,00	-4,00