Fyzikálny korešpondenčný seminár
28. ročník, 2012/2013
FKS, KTFDF FMFI UK, Mlynská dolina, 84248 Bratislava
e-mail: otazky@fks.sk web: http://fks.sk

Vzorové riešenia 3. kola zimnej časti 2012/2013

3.1 B0 – Do školy (opravoval Luxusko)

Kajka beží do školy rýchlosťou $5\,\mathrm{km/h}$. Ako rýchlo musí bežať zo školy, aby jej priemerná rýchlosť bola $15\,\mathrm{km/h}$?

Označme si vzdialenosť, ktorú má Kajka prejsť do školy s_k, jej rýchlosť do školy v_1, rýchlosť zo školy v_2 a našu požadovanú priemernú v_p. V ďalšom postupe si vystačíme s jednoduchým vzorcom $s = v \cdot t$, ktorý by mal byť aj prvý, na ktorý natrafíme.

Nech teda Kajka dosiahla požadovanú priemernú rýchlosť. Potom celkový čas, ktorý jej trvalo bežanie zo školy a do školy, t si môžeme vyjadriť dvojako. Jednak ako čas, ktorý by jej to trvalo, keby išla primernou rýchlosťou $2s_k/v_p$, dvak je tento čas rovný tiež súčtu časov oboch ciest, vychádza nám teda

$$\frac{2s_k}{v_p} = \frac{s_k}{v_1} + \frac{s_k}{v_2}.$$

Z tohto vyjadríme vzorec pre priemernú rýchlosť (lebo je pekný) a potom aj v_2 (lebo sa naň zadanie pýta):

$$v_p = \frac{2v_1v_2}{v_1 + v_2}, v_2 = \frac{v_pv_1}{2v_1 - v_p}$$

Po dosadení dostaneme $v_2 = -15\,\mathrm{km/h}$.

A čo teraz? Po chvíli overovania našich krokov dospejeme k záveru, že vo výpočte sme chybu nespravili, aj tak nám však vyšiel blud. Počiatočná úvaha, že Kajka dosiahla danú priemernú rýchlosť pri zadaných podmienkach, nás zradila[1]. Uvažovanie typu musela by ísť zápornou rýchlosťou, čo nemohla, takže riešenie neexistuje, je namieste.

Z vyjadrenia v_2 vidno, že aby výsledok mal zmysel, teda bol nezáporný, musí platiť $2v_2 > v_p$. Toto je jednoduché na predstavu - aj keby Kajka išla zo školy nekonečne rýchlo, teda netrvalo by jej to žiaden čas, platilo by:

$$\frac{2s_k}{v_p} = \frac{s_k}{v_1},$$

teda $v_p = 2v_1$. Ak teda chceme vyššiu priemernú rýchlosť, mali sme do školy už rýchlejšie utekať!

[1] Zjednodušene, ak nám z predpokladu vyjde žvást, predpoklad nebol správny. Tento princíp, latinsky Reductio ad absurdum je základ dôkazu sporom.

Seminár podporujú:

Pozor – priemerná rýchlosť je aritmetický priemer dvoch rýchlostí iba ak nimi oboma ideme rovnaký čas, nie rovnakú dráhu! Ak by však Kajka išla zo školy takisto dlho, ako šla do nej, zase raz by mala rýchlosť 5 km/h a priemerná by bola potom zjavne tiež taká. Netreba sa nechať zviesť príliš jednoducho vyzerajúcim riešením, istá miera podozrievavosti nie je na škodu.

3.2 B1 – Fontánka (opravovali Katka a Andrej, vzorák Andrej)

Určite ste videli v animákoch postavičky vznášajúce sa na prúde vody z fontány. Na základe parametrov fontány (zvoľte si, ktoré potrebujete) a postavičky, odhadnite výšku, v ktorej sa bude vznášať.

Čo našu postavičku ťahá dole, je jasné - gravitačná sila mg. Nahor ju tlačí voda, ktorá sa od nej odráža a rozstrekuje na strany. Ako ale túto silu vyjadriť?

Vieme, že sila, ktorá na teleso pôsobí, je definovaná ako zmena hybnosti telesa za časový interval prislúchajúci tej zmene: $F = \frac{\Delta p}{\Delta t}$. Keď pomocou tohto zistíme, aká sila pôsobí na vodu, tak z akcie&reakcie dostaneme silu na postavičku.

Fontánka strieka vodu s hustotou ρ a prietokom Q, voda dopadá na hračku rýchlosťou v. Za čas Δt sa zmení hybnosť vode s objemom $Q\Delta t$, t.j. hmotnosťou $\rho Q\Delta t$. Voda rozstrekuje kade-tade, rozumné bude zobrať si model, že všetka nahor striekajúca voda sa po odraze bude pohybovať vodorovne. Zmena rýchlosti je teda v. (Premyslite si, aká by bola zmena rýchlosti, ak by sa voda odrážala priamo nadol.[2]) Dostaneme teda:

$$F = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{\rho Q \Delta t v}{\Delta t} = \rho Q v$$

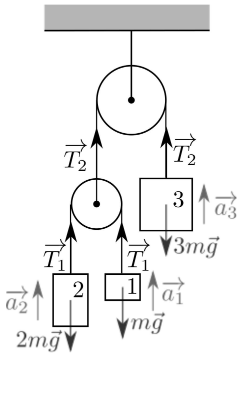
a to je rovné mg. Už treba len podľa konkrétnej fontánky porátať prietok a výšku. Ak má dole tryska fontánky prierez S a rýchlosť v_0, potom $Q = Sv_0$ a zo ZZE $v = \sqrt{v_0^2 - 2hg}$:

$$\rho S v_0 \sqrt{v_0^2 - 2hg} = mg \Rightarrow h = \frac{v_0^2}{2g} - \frac{m^2 g}{2S^2 v_0^2 \rho^2}$$

Zrejme niekedy teda môže byť hračka jednoducho priťažká. Kač!

3.3 B2 – Vodná váha (opravovala Kaja)

Popíšte, čo sa bude diať so sústavou kladiek na obrázku. Čísla napísané na závažiach vyjadrujú ich hmotnosti v kilogramoch. Zanedbajte hmotnosti kladiek, lana a trenie.



Pozrime sa najprv na hornú kladku. Na pravej časti lanka visia 3 kilá a na ľavej v súčte tiež. Lanko by sa teda nemalo hýbať, či áno? Ale áno, bude sa hýbať. Pes je zakopaný v tom, že na spodnej kladke rovnováha nie je. Ťažisko sústavy závaží 1 a 2 bude klesať vzhľadom na spodnú kladku, a preto nebude zaťažovať lanko hornej kladky plnou váhou.

Tak... Už vieme, ako to nebude. Poďme zistiť, ako to bude. Označme si hľadané zrýchlenia závaží $\vec{a_1}, \vec{a_2}, \vec{a_3}$. Aby sme nemali neporiadok v znamienkach, predpokladajme, že všetky vektory síl a zrýchlení smerujú nahor a ak nám vyjdú záporné, znamená to, že smerujú nadol.

[2] Bolo by to $2v$.

Ťah laniek $\overrightarrow{T_1}$, $\overrightarrow{T_2}$ je vždy na oboch koncoch rovnaký. Poďme si teda zostaviť rovnice pre jednotlivé závažia (podľa Newtonovho zákona).

$$ma_1 = T_1 - mg$$

$$2ma_2 = T_1 - 2mg$$

$$3ma_3 = T_2 - 3mg$$

Aj zrýchlenia koncov lanka vzhľadom na príslušnú kladku sú rovnako veľké, ale majú opačný smer. Preto má spodná kladka zrýchlenie opačné ako závažie 3, čiže $-\overrightarrow{a_3}$. Aj zrýchlenia závaží 1 a 2 budú opačné, ale len v sústave spojenej so spodnou kladkou! Označme si tieto zrýchlenia $\overrightarrow{a_1}'$, $\overrightarrow{a_2}'$. Platí $a_1 = a_1' + (-a_3)$, $a_2 = a_2' + (-a_3)$ a $a_1' = -a_2'$. Z toho dostaneme:

$$a_1 + a_2 = -2a_3,$$

Už máme 4 rovnice. Ale neznámych veličín je 5. Kde zoženieme tú piatu? Tak si skúsme napísať napríklad rovnicu Newtonovho zákona pre spodnú kladku[3]:

$$m_k(-a_3) = T_2 - 2T_1,$$

Ale $m_k = 0$, čiže

$$T_2 = 2T_1.$$

A teraz už len pracne vyriešime túto sústavu rovníc a dostaneme hodnoty zrýchlení:

$$a_1 = 7/17g \qquad a_2 = -5/17g \qquad a_3 = -1/17g$$

Závažie 1 teda zrýchľuje nahor a závažia 2 a 3 nadol. Hotovo :-)

3.4 B3/A1 – Kladky (opravoval Paťko)

Navrhnite a zrealizujte aspoň dva spôsoby na odmeranie povrchového napätia rozhrania voda sklo. Môžete využiť známu hodnotu povrchového napätia voda vzduch.

Na začiatku upozornenie: v tomto príklade neplatí obľúbené pravidlo, že ak niečo nepoznám, tak to zanedbám. To môžem urobiť iba vtedy, keď viem, že je to *zanedbateľné*. Chvíľka googlenia a na internete[4] nájdete, že povrchové napätie rozhrania sklo-vzduch je dokonca väčšie ako napätie rozhrania voda-vzduch, takže ho nemôžeme zanedbať!

Musíme teda nájsť experiment, v ktorom vieme dobre popísať všetky 3 rozhrania: voda-sklo σ_{VS}, voda-vzduch σ_{VA} a sklo-vzduch σ_{SA}. Tu sú 3 najpoužívanejšie experimenty, ktoré sa nám vo FKS dostali do rúk:

Meranie kontaktného uhla. Vezmeme si sklenenú podložku, kvapneme na ňu kvapku, odfotíme ju a na *dostatočne veľkom* obrázku odhadneme dotyčnicu k zakrivenému povrchu vody

[3] Keďže lanko pôsobí na závažie silou T_1, závažie pôsobí na lanko reakčnu silou $-T_1$.
[4] http://www.insula.com.au/physics/1279/L8.html - ďakujem Maťovi Večeríkovi.

a zmeriame kontaktný uhol α medzi dotyčnicou a podložkou. Múdre knižky[5] nám prezradia, že platí vzorec $\sigma_{SA} - \sigma_{SV} = \sigma_{VA} \cos \alpha$. S našimi povolenými vedomosťami sme teda schopní zmerať iba rozdiel $\sigma_{SA} - \sigma_{SV}$. Prišli nám riešenia s hodnotami α od 40 do 60°, čomu zodpovedá rozdiel povrch. napätí od 56 mN/m do 37 mN/m. Samozrejme, veľkosť uhla a napätie závisí od použitého skla.

Meranie hrúbky mláčky. Postupujeme nasledovne. Očistíme si sklo (lebo bordel na skle = bordel v meraní), vylejeme naň mláčku vody a zmeriame jej hrúbku. Už iba spočítať, ako povrchové napätie určuje hrúbku. Použijeme energie, lebo vieme, že každý fyzikálny systém sa ustáli v stave s najnižšou energiou. Konkrétne tu sú zaujímavé 4: potenciálna energia kvapky, energia povrchu voda-sklo, energia povrchu voda-vzduch a energia povrchu sklo-vzduch. Prvá s klesajúcou hrúbkou kvapky klesá, druhá a tretia za zväčšujú.[6]

Problém vzniká s poslednou energiou. Ako ju rozumne definovať? O tejto energii vieme, že klesne s každým zväčšením povrchu voda-vzduch. Môžeme si ju teda predstaviť ako zápornú energiu, pričom nulovú energiu zvolíme v stave, keď na skle ešte nie je žiadna voda.

Čo s okrajmi? Vylejeme si mláčku dostatočne veľkú tak, aby bol povrch rovnej časti omnoho väčší ako povrch zakrivenej časti a predpokladáme, že mláčka je útvar s plochou S a hrúbkou h.

Nakoniec už nie je také ťažké energie zapísať do rovnice:

$$\frac{mgh}{2} - S\left(\sigma_{VA} + \sigma_{VS} - \sigma_{SA}\right) = E$$

Plochu si vyjadríme pomocou hmotnosti a hustoty kvapky: $S = m/(\rho h)$. Teda energia v závislosti od hrúbky kvapky je:

$$\frac{mgh}{2} - \frac{m}{\rho h}\ \left(\sigma_{VA} + \sigma_{VS} - \sigma_{SA}\right) = E$$

Teraz chceme zistiť, pre aké h je energia minimálna. Vidíme, že jej závislosť je $E = Ah - B/h$. Jedna možnosť je otvoriť si Excel, skúšať numericky hľadať minimá pre rôzne A a B a nakoniec si tipnúť vzorec. Existuje ale aj druhá, sofistikovanejšia možnosť. Podaktorí už viete, že minimum nejakej funkcie sa hľadá derivovaním. Tí, ktorí to vedia, funkciu zderivujú a položia rovnú nule[7]. Tí, čo derivovať nevedia, si túto funkciu však môžu nechať zderivovať, napríklad na super stránke `www.wolframalpha.com` príkazom

```
d/dx Ax - B/x
```

Stroj vypľuje, že derivácia je $A + \frac{B}{x^2}$. Položíme si ju rovnú nule:

$$0 = A + \frac{B}{h^2} = \frac{mg}{2} + \frac{m}{\rho h^2}\ \left(\sigma_{VA} + \sigma_{VS} - \sigma_{SA}\right)$$

$$\sigma_{SA} - \sigma_{VS} - \sigma_{VA} = \frac{g\rho h^2}{2}$$

[5] Alebo rovnováha síl na trojrozhraní voda, sklo, vzduch.

[6] Lebo sa zväčšuje povrch kvapky.

[7] Lebo iné múdre knižky hovoria, že v minime funkcie je jej derivácia nulová.

Vidíme teda, čo experimentom dokážeme namerať, super.

Mláčka sa ale nerozleje na presný kruh - merať jej priemer je teda maximálne nepresné. Rovnako nepresné je merať jej hrúbku priamo, lebo by sme museli merať rádovo milimetre. Poznáme však vzťah medzi povrchom a hrúbkou. Preto najpresnejšia metóda je podložiť si pod sklo štvorčekový alebo milimetrový papier a počítať štvorčeky. A samozrejme nezabudnúť vyliať iba známy objem vody.

Prišli nám riešenia s hodnotami priemernej výšky mláčky 1,12 mm, po dosadení do vzorčeka 72 mN/m.

Kapilárna elevácia. Každému je snáď jasné, že meriame výšku vystúpenia vody v kapiláre. Treba sa ale zamyslieť, čo tento efekt spôsobuje. Viacerí ste si povedali, že vodu vytiahne hore sila od povrchu voda-sklo. To však nie je pravda - ak by sila pôsobila smerom hore kapilárou, znamenalo by to snahu o zvýšenie energie tohto povrchu, a to je predsa proti prírode! Táto sila pôsobí teda smerom nadol. Hore vodu ťahá sila od povrchu sklo-vzduch, lebo vystúpením vody do väčšej výšky klesá práve energia tohto povrchu. Posledná vec, ktorú si uvedomíme je, že povrch rozhrania voda-vzduch sa nemení, čiže ho do energetických úvah zaťahovať nebudeme. Celková energia pre kapiláru polomeru r bude takáto:

$$\frac{mgh}{2} + 2\pi rh(\sigma_{VS} - \sigma_{SA}) = E$$

Hmotnosť vody si vyjadríme pomocou r a h: $m = \rho V = \rho\pi r^2 h$ a dosadíme:

$$\frac{\rho\pi g r^2}{2}\, h^2 + 2\pi rh(\sigma_{VS} - \sigma_{SA}) = E$$

Tentokrát je energia vyjadrená ako $E = Ah^2 + Bh$. Vo wolframalpha funkciu zderivujeme pomocou `d/dx Ax2 + Bx` a dostávame podmienku $0 = 2Ah + B$, teda

$$2\pi r(\sigma_{SA} - \sigma_{VS}) = \rho\pi g r^2 h$$

Tentokrát vieme meraním výšky zistiť rozdiel povrchových napätí $\sigma_{SA} - \sigma_{VS}$. Otázne je znova, ako merať. Ideálne je zobrať si čo najtenšiu kapiláru, aby bola kapilárna elevácia čo najvýraznejšia. Polomer kapiláry vieme určiť pomerne presne - Miro Gašpárek vo svojom riešení navrhuje, aby sme do kapiláry pchali ihly rôznych veľkostí, potom merali ich priemer mikrometrom, čo je celkom presné meranie. Nepresné je odmerať výšku kapilárnej elevácie. Po prvé, hladina v kapiláre nie je rovná, ale zakrivená. Keďže sme do našej úvahy započítavali rozhranie sklo-vzduch, mali by sme merať výšku hladiny v mieste, kde sa toto rozranie vyskytuje - teda na stene kapiláry. Keďže stále nemeriame viac ako 1 cm, pri meraní pravítkom sa dopustíme chyby minimálne 10%, preto táto metóda v presnosti o kúsok zaostáva za predchádzajúcimi. Pre 2 mm kapiláru ste namerali eleváciu priemerne 1,5 cm, čomu zodpovedá rozdiel napätí 150 mN/m.

3.5 B4/A2 – Výťah (opravoval Mišo)

Stojím vo výťahu. Výťah sa zrazu pohne, cítim to. Prestane zrýchľovať. Netuším, ako rýchlo vlastne ide. Navrhnite experiment, pomocou ktorého by som mohol (ak začnem merať včas) určiť rýchlosť výťahu. Počítajte s tým, že zrýchlenie môže byť v čase dosť premenlivé a nemáte k dispozícií hightech hračky (váhy s nulovým reakčným časom).

Na začiatku si treba uvedomiť, že ak sa nachádzame v izolovanom výťahu, ktorý sa pohybuje rovnomerne vzhľadom na Zem, tak nemáme šancu zistiť, ako rýchlo ideme, pokiaľ sa nepozrieme von z výťahu. Všetky výsledky meraní budeme mať totiž rovnaké, ako keby výťah stál.[8] Ako teda potom budeme merať tú rýchlosť?! Uvedomme si, že výťah nejde zozačiatku rovnomerne, ale zrýchľuje – a zrýchlenie už výsledky meraní ovplyvní.

Keby sme mohli použiť váhy s nulovým reakčným časom, tak si v každom okamihu ľahko určíme zrýchlenie výťahu. To ale nerieši otázku zmyslu existencie - aká je tá rýchlosť! Dôstojné je vedieť, ako určiť tú rýchlosť pomocou váhy. Stačí, aby sme tým nakŕmili nejaký spreadsheet (napr. Excel) a ak máme zrýchlenia dodané s rozostupom[9] Δt, tak v každom kroku zmeníme rýchlosť o $a_i\Delta t$ a tieto rýchlostičky posčítame.[10]

A práve preto táto metóda nie je až taká dobrá a treba nájsť nejakú inú, ktorá by nám dala rovno rýchlosť výťahu. Najjednoduchšie by bolo, keby namiesto spreadsheetu rýchlostičky sčitovala príroda. Inak povedané – nechajme teda v zrýchľujúcom výťahu niečo sa voľne pohybovať a potom tomu zmeriame rýchlosť a potom... Uvidíme.

Umiestnime experimentátora Reného do výťahu. Dajme do ruky Renému iba naklonenú rovinu, guľôčku a stopky. René nastaví rovinu do takého uhla α, aby sa gulička gúľala dolu ňou počas celej doby zrýchľovania a neprešmykovala.

Na túto guličku bude pôsobiť tiažová sila mg a zotrvačná sila ma_i, kde a_i je okamžité zrýchlenie výťahu, teda jej zrýchlenie bude:

$$a = \frac{5}{7}\sin\alpha(g + a_i)$$

kde $\sin\alpha$ je tam kvôli naklonenosti roviny a na koeficient $5/7$ väčšina ľudí zabúda. Je spôsobený tým, že guľôčka rotuje a preto časť kinetickej energie sa premieňa na kinetickú energiu rotačného pohybu, čo sa vo výslednom efekte prejaví ako koeficient $5/7$.

René nechá guličku na naklonenej rovine čas t, kým skončí zrýchľovanie a potom zmeria rýchlosť guličky. Za malý časový okamih Δt gulička zrýchli o $\frac{5}{7}\sin\alpha(g\Delta t + a_i\Delta t)$. Keďže príspevky $a_i\Delta t$ sa sčítajú na celkovú rýchlosť výťahu v_v, rýchlosť guličky po čase t:

$$v = \frac{5}{7}\sin\alpha(gt + v_v)$$

Rýchlosť guľôčky už ľahko odmeriame (napríklad použijeme vodorovný vrh), čas t si stopneme, uhol α odmeriame a dostaneme kýženú rýchlosť výťahu v_v.

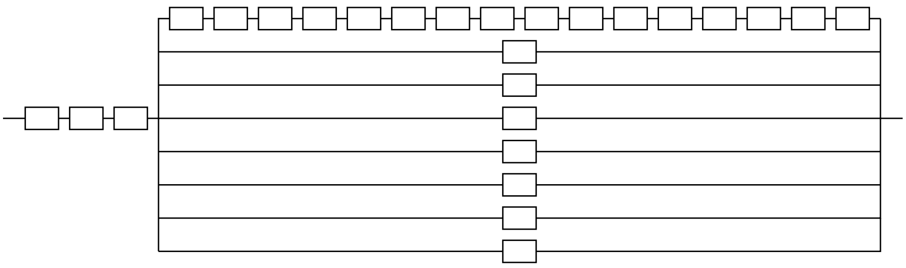
3.6 A3 – Odpor (opravoval Andrej)

S využitím stovky odporov veľkosti jeden ohm zostrojte obvod, ktorého odpor bude čo najpresnejšie π ohmov. Body za túto úlohu budú udelené v závislosti od toho, aké riešenia nám prídu. Zaručene však najlepšie riešenie dostane plný počet bodov.

Takže, začnime vzorák naopak - ako sa bodovalo. Jednoducho. $\frac{1}{2} - \log|R - \pi|$ zaokrúhlené. Skúste sa v tomto okamihu zamyslieť, na koľko desatinných miest sa bude najlepšie riešenie zhodovať s π. Padla sánka?

[8] Toto je v podstate to, čo tak honosne nazývame princíp relativity.
[9] Ak vaša váha pľuje zrýchlenia spojito, tak si ju naučte to aj rovno zintegrovať.
[10] Kto by chcel mať toto vysvetlené lepšie, odporúčam Peťov vzorák z minulej série.

Poďme sa pozrieť na bežné riešenie. Zoženieme si na internete zápis π ako nekonečného reťazového zlomku, zoberieme rozumný počet členov a dostaneme číslo $\frac{355}{113}$. To si rozbijeme na $3 + \frac{16}{113}$. Pokúsme sme sa to napísať… Cez niečo paralelné. Keď si všimneme, že $\frac{113-1}{16} = 7$, je celkom priamočiare vymyslieť zapojenie:



Obr. 1: schéma zapojenia

No ak chceme niečo lepšie? Nakódime si. Úprimne, schémy presnejších sú nechutné. Ak má na to niekto žalúdok, poproste Vlejda a Xellosa :).

3.7 A4 – Štvorec (opravoval Maťo Ch.)

Vodivý štvorec na obrázku sa nachádza v magnetickom poli generovanom dlhým vodičom, ktorým preteká prúd I. Chceme štvorec presunúť na miesto vyznačené šrafovaním, uvažujeme nad dvoma spôsobmi.

a) Posunieme ho tam;

b) Preklopíme ho tam okolo jednej svojej hrany.

V ktorom prípade sa štvorec menej zahreje?

Najskôr sa zamyslíme, ako sa štvorec zahrieva. Ako ste si všetci správne uvedomili, platí Faradayov zákon, ktorý vraví, že napätie naindukované v slučke za malý časový interval je rovné zmene indukčného toku slučkou za tento krátky časový interval. Ak je medzi bodmi vodiča napätie, vzniká prúd, ktorý časom zanikne kvôli stratám pri prechode vodičom s odporom. To sa prejaví práve zahriatím vodiča. Celý pohyb si v oboch prípadoch môžeme rozdeliť na malé časové intervaly, ktorých súčet bude v oboch prípadoch rovnaký.[11] Teda čím viac bude dokopy zmeny toku, tým viac sa štvorec zahreje.

Po matematicky:

$$\textit{súčet zmien toku za celý časový interval} = \sum_i \frac{\Delta\Phi_i}{\Delta t} = \frac{1}{\Delta t}\sum_i \Delta\Phi_i = \frac{1}{\Delta t}\left(\Phi_{\text{koneč}} - \Phi_{\text{poč}}\right)$$

Všimnime si na tomto výpočte dve veci:

- Krok, kde sme sumu nahradili rozdielom počiatočného a konečného toku. Mohli sme to spraviť preto, lebo pri oboch pohyboch štvorca sa tok mení vždy len jedným smerom (vždy klesá).

[11] V zadaní to nebolo síce napísané, ale stanoviť si nejké časy je rozumné, lebo inak by išlo iba o to, ako rýchlo hýbeme štvorcom.

- Z výpočtu vyplýva, že nezáleží na tom v ktorom časovom intervale ako rýchlo zmeníme tok, záleží len na celkovej zmene toku.

Poslednú vec, ktorú si bolo treba uvedomiť, je fakt, že toky štvorcom sú síce na začiatku oboch pohybov rovnaké, ale na konci už rovnaké nie sú! V druhom prípade bude na konci tok čo do veľkosti rovnaký ako v prvom, ale bude mať opačné znamienko. Menšia zmena toku je teda v prípade a.) a v tomto prípade sa štvorec aj menej zahreje.

Komentár k riešeniam: Veľa z vás sa pokúšalo rozdiely tokov v oboch prípadoch spočítať, kde ste narazili na integrály, ktoré ste nevedeli vypočítať. Z toho plynie poučenie do budúcnosti: Keď riešim FKS a mám stranu plnú integrálov, je načase zamyslieť sa nad iným spôsobom riešenia.