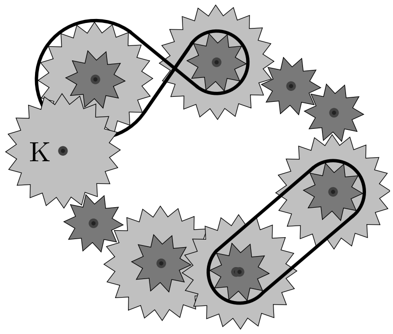
Fyzikálny korešpondenčný seminár
29. ročník, 2013/2014
FKS, KTFDF FMFI UK, Mlynská dolina, 84248 Bratislava
e-mail: otazky@fks.sk web: http://fks.sk

Zadania 2. kola zimnej časti 2013/2014

Termín: 28. 10. 2013

B0 – Kolieska (9 bodov)

Luxusko sa rozhodol postaviť pre Katku drvič banánov. Vytlačil si na 3D tlačiarni tento mechanizmus a zaujíma ho, akou uhlovou rýchlosťou sa bude otáčať každé z koliesok, ak koliesko K roztáča uhlovou rýchlosťou ω v kladnom smere.



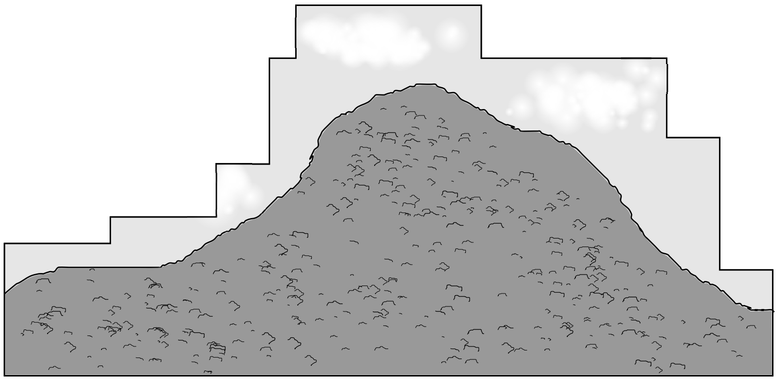
Obr. 1: Infraštruktúra drviča banánov

Kolieska majú dve veľkosti. Menšie majú 10 zubov a polomer r, väčšie majú 20 zubov a polomer $2r$. Sú tam aj 2 pásy (čierne), ktoré na zuboch neprešmykujú.

B1 – „Kopec so stromčekmi bez oblohy, poprosím.“ (9 bodov)

Squiddie si chcel nafotiť svoj obľúbený kopec. Tak vyliezol na náprotivný vrch a detailne si ho nacvakal. Potom dal programu Adobre FotoShrot všetky fotky a on to zložil. A tu sa Squiddie plesol po čele - zabudol nafotiť oblohu!

Seminár podporujú:
iuventa APVV

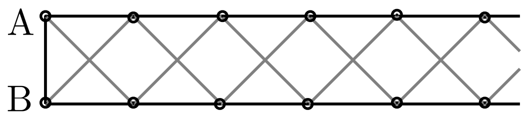


Obr. 2: Výplod FotoShrotu

Nevadí. Aj tak by toto dielo rád zavesil na stenu a chce kladivom udrieť po hlavičke, teda pribiť obrázok vytlačený na pevný papier o stenu priamo v jeho ťažisku. No nie a nie nájsť ťažisko. Nájdete ho vy zaňho pomocou pravítka a bez použitia gravitácie, kým si on vylieči nervy NesKvíkom?

B2 – Hrejivý šálik (9 bodov)

Vlejd si štrikuje šálik na zimu. Aby dobre hrial, tak bude z odporového drôtu a vodičov. Z časopisu O'Salsa zistil vzor pre najbližšiu módnu sezónu: uhlopriečky štvorcov. Ľaľa, aké sú sličné:



Obr. 3: Vzor pre šálik

Vlejd ale nie je žiaden amatérsky štrikatér a chce ho upliesť nekonečne dlhý. Aký bude mať jeho šálik odpor medzi bodmi A a B? Vlejd použil na uhlopriečky (sivé) dokonale vodivý drôt a na okraj šálu (čierny) odporový drôt taký, že jedna strana pomyselného štvorca má odpor R a vodiče sú vodivo spojené len v hrubo vyznačených miestach.

B3/A1 – Objavte teplú vodu! (9 bodov)

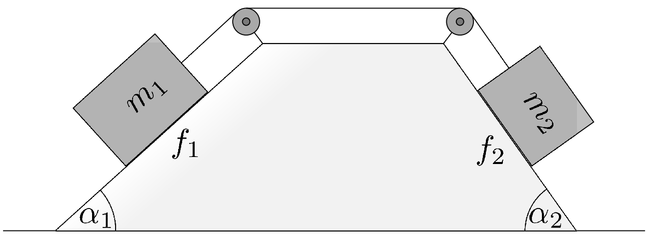
Kubo by sa rád stal agentom s teplou vodou. A aby ste boli dobrým agentom, treba mať dobré známky zo skúšok. Najbližšie má skúšku zo slamkometrie: máte barel s teplou vodou a so studenou vodou. A slamku. Vodu nemôžete piť a ani vaše teplotné senzory v koži nemôžu ucítiť jej prenesené teplo, lebo firma, kde agenti pracujú, garantuje nedotknutosť a neprecítenosť jej teplej vody.

Kubo zistil, že má niečo s výfukom a na skúšku ísť nemôže a chce poslať vás. Nacvičte si túto skúšku v pohodlí svojho domova.

Zoberte si teda dve nádoby s vodou, jednu s horúcou, druhú so studenou vodou. Vymyslite, ako ich meraním rozoznať za pomoci slamky a odmerného valca. Vysvetlite, prečo táto metóda funguje. Meranie zrealizujte a zdokumentujte svoje výsledky. Jedine tak Kubo zistí, či sa na vás môže spoľahnúť!

B4/A2 – Fakt kúl sústavy (9 bodov)

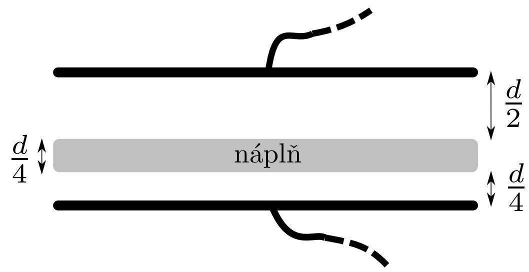
Jimi si otvoril obchod so sústavami. Nervová, tráviaca, rozmnožovacia, pohybová, periodická, dvojková, slnečná, distribučná, repro, menová, pozičná… Práve teraz by potreboval spustiť reklamnú kampaň na nové mechanické sústavy s trecími koeficientami a sklonmi a závažiami. A keďže všetkých dnes zaujíma len akcelerácia, s akým zrýchlením zrýchľuje m_1 v tejto sústave?



Obr. 4: Mechanická sústava

A3 – Luxusný sendvič (9 bodov)

Pekelný robot Hellboy si zoberie akýkoľvek leták, aký mu pred intrákmi strčia do rúk. A teraz dostal leták pre zmenu od Krute Fritovaných Súčiastok na luxusný sendvič plnený a) kovom, b) dielektrikom s relatívnou permitivitou ϵ_r. Náplň je hrubá $d/4$, rovnobežná s platňami a je vzdialená $d/4$, resp. $d/2$ od platní. Poraďte mu výpočtom kapacít oboch luxusných sendvičov, ktorý je luxusnejší, teda ktorý má väčšiu kapacitu, ak kapacita neluxusného prázdneho kondenzátora je C.



Obr. 5: Luxusný sendvič

A4 – Hrátky s toroidmi (9 bodov)

Kamilu už omrzelo počúvať o vesmíre stále tie isté fakty. Chcela vedieť viac. Chcela VIDIEŤ viac! Tak si teda socla Sysľovu raketu (od Maťa, ktorý ju používal naposledy)[1] a vybrala sa objavovať vesmír na vlastnú päsť!

Len čo preprogramovala raketu na nepravdepodobnostný pohon, svetelné roky sa začali mihať ako protóny v CERNe. V takej rýchlosti sa ale blbo pozoruje okolie. Nuž pribrzdila a

[1] `http://ufo.fks.sk/archiv/2013_14/7knizkaZima1.pdf`

s úžasom zistila, že je obklopená obrovskými kozmickými toroidmi! Dieťa v jej srdci zajasalo a už mierila po osi jedného z nich rovno cez jeho stred. Potom si spomenula, že je tam za vedeckými účelmi, a tak zapla lodný počítač. Ten jej povedal, že je vo vzdialenosti d od stredu homogénneho toroidu s hustotou ρ_m, s polomerom diery r a celkovým polomerom $3r$. Zistil aj intenzitu gravitačného poľa v onom mieste, a to E.

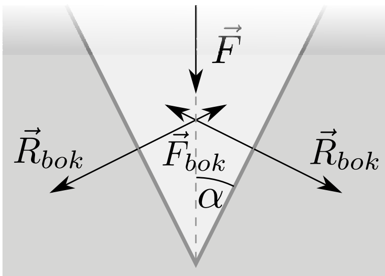
Keď sa vynorila, jej zmysly náhle upútal ďalší toroid. Vyzeral akosi étericky. Nuž nazbierala odvahu a poď ho priamo cezeň. Vtom však lodný počítač začal v panike vypisovať, že tento toroid je 2-krát väčší a rovnomerne objemovo vyplnený elektrickým nábojom! Polomer diery $2r$, celkový polomer $6r$, vzdialenosť od stredu $2d$, objemová hustota náboja ρ_e, intenzita elektrického po… Zhasol… Kamila skúseným informatickým okom usúdila, že elektrické pole lodnému počítaču neprospieva. Rada by teraz vedela, aké to elektrické pole vlastne bolo, nech si v manuáli môže prečítať, či je poškodenie lode trvalé. Keďže sa však zapredala informatike, musíte jej s fyzikou pomôcť vy.

Vzorové riešenia 1. kola zimnej časti 2013/2014

1.1 B0 – Nože sa zamysli! (opravoval Hellboy)

Prečo sú nože ostré? Ako ich tvar súvisí s ich funkciou?

Mnohí z Vás písali o tlaku ako o hlavnej zložke krájacieho procesu. Nabrúsený nôž je totiž tenší, má menšiu styčnú plochu s krájaným predmetom, a teda pôsobí na materiál väčším tlakom. Pri pôsobení dostatočného tlaku dochádza k porušeniu väzieb, čo spôsobuje trvalú – plastickú deformáciu. Tlak síce nemôžeme zanedbať, oveľa väčším dielom sa ale na krájaní podieľa štiepanie. Nôž sa v zásade správa ako klin.



Obr. 6: Sily pôsobiace medzi nožom a telesom

Povedzme, že máme nôž zaseknutý v materiáli a tlačíme naň silou F. Kolmo na boky noža materiál pôsobí dvomi rovnakými silami F_{bok}. Ich vertikálne zložky musia vyrovnať silu F, teda $2F_{bok}\sin\alpha = F$. Na materiál budú pôsobiť reakcie R_{bok} na F_{bok} s veľkosťou $R_{bok} = \dfrac{F}{2\sin\alpha}$. Materiál je rozťahovaný do opačných strán silami o veľkosti $\dfrac{F}{2\sin\alpha}$, na čom jasne vidíme, že čím lepšie (rozumej na čo najmenší uhol α) je nôž nabrúsený, tým bude hodnota $\sin\alpha$ menšia. Pre veľmi malé α bude $\sin\alpha$ skoro nulový, čo spôsobí obrovskú silu odtláčajúcu materiál.

1.2 B1 – Nevytrvalí bežci (opravoval Dušan)

Mišo a Dušan sa radi pretekajú. Napríklad dnes si dali beh na MatFyz. Mišo po štarte 4 sekundy rovnomerne zrýchľuje na rýchlosť $3\,\mathrm{m/s}$ a potom opäť 4 sekundy rovnomerne spomaľuje, až zastane. Sekundu po ňom vyštartuje Dušan, ktorý 3 sekundy rovnomerne zrýchľuje na $4\,\mathrm{m/s}$ a rovnaký čas spomaľuje do pokoja. Ako ďaleko od seba chlapci zastanú?

Najprv sa pozrieme na to, ako bežal Mišo. Na začiatku bola jeho rýchlosť nulová a v čase $t_M = 4\,\mathrm{s}$ bežal maximálnou rýchlosťou $v_M = 3\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$. Zo zadania ešte vieme, že počas behu iba rovnomerne zrýchľoval a spomaľoval, pričom obe etapy trvali rovnaký čas t_M. Zjavne zrýchlenia majú rovnakú veľkosť a opačné znamienko.

Teraz si môžme zapísať rovnice pre Mišovu prebehnetú dráhu, kde s_{M1} označuje prejdenú dráhu počas zrýchľovania a s_{M2} počas spomaľovania a a označuje zrýchlenie.

$$s_{M1} = \frac{1}{2}a{t_M}^2 \qquad s_{M2} = v_M t_M - \frac{1}{2}a{t_M}^2$$
$$s_M = s_{M1} + s_{M2} = v_M t_M = 12\,\mathrm{m}$$

Keď sa pozrieme na to, ako bežal Dušan, zistíme, že jediný rozdiel medzi Mišom a ním je jeho maximálna rýchlosť $v_D = 4\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ a polčas behu $t_D = 3\,\mathrm{s}$. Úpne analogicky ako u Miša dostaneme jeho prebehnutú dráhu $s_D = v_D t_D = 12\,\mathrm{m}$. Keďže chlapci začali na rovnakom mieste, nik nevyhral.

Na tento problém sa však dá nahliadnúť ešte jedným spôsobom. Pozrieme sa na grafy rýchlosti od času. Tí sveta znalejši možno vedia, že prejdená dráha je v skutočnosti plocha pod krivkou závislosti rýchlosti od času. Obaja len rovnomerne zrýchľujú a spomaľujú, plochy pod krivkami budú rovnoramenné trojuholníky.

Mišov trojuholník má základňu dlhú $2t_M$ a výška na ňu má veľkosť v_M, čiže obsah takéhoto trojuholníka je naozaj prejdená vzdialenosť $s_M = 12\,\mathrm{m}$. Rovnako aj v Dušanovom trojuholníku so základňou $2t_D$ a výškou v_D. Ako vidieť, oba spôsoby dospeli k rovnakému výsledku. Nech sa teda chlapci pretakajú ako chcú, nikto nevyhrá, lebo obaja sú rovnako dobrí.

1.3 B2 – Nákružnica (opravovala Tinka)

Tinka sa chce pomstiť, keďže jej potiahli cviká (a dali ich Katke). Preto potiahla z labáku odporový drôt s odporom R a vyrobila si z neho náušnicu. Zaletovala konce, čím vytvorila kružnicu homogénneho prierezu. Pripadala si pritom odporne a odpor náušnice si odmerala tak, že na náušnicu pripla dve svorky ohmmetra. Aký najmenší a najväčší odpor mohla Tinka odmerať? Aký odpor namerala, keď jej svorky zvierali zo stredu kružnice uhol α?

Zadanie je trocha zavádzajúce. Neuvádza totiž otázky v poradí od najľahšieho po najťažšie. Vyplatí sa nám najprv riešiť všeobecnú úlohu: zistiť R_α - odpor keď uhol svorka-stred-svorka je α.

Ak si zapojenie nakreslíte a pozorne sa zadívate, zistíte, že sa jedná len o neštandardne nakreslené paralelné zapojenie. Jediné, čo v ňom nevieme sú hodnoty odporov, ktoré vytvárajú samotné drôty. Ale tie spočítať je ľahké! Odpor je priamo úmerný dĺžke a teda ak má celý drôt odpor R, tak úsek pri uhle α [2] bude mať odpor $R \cdot \alpha/(2\pi)$ a ten druhý $R \cdot (2\pi - alpha)/(2\pi)$. Dosadené do vzorčeka pre paralelné obvody dostávame

$$R_\alpha = \frac{1}{\frac{2\pi}{R\alpha} + \frac{2\pi}{R(2\pi-\alpha)}} = R\frac{\alpha(2\pi - \alpha)}{4\pi^2}$$

.

Menovateľ výsledku je konštantný, takže ak hľadáme minimálny a maximálny odpor, záleží len na čitateli. Kedže odpor nemôže byť záporný, rovno z toho vidíme, že minimum je nula, ktorú dosiahneme pri $\alpha = 0$, alebo $\alpha = 2\pi$, teda keď sú obe svorky na tom istom mieste. A ako nájsť maximum? Tí z vás, ktorých už postrašili škaredou matikou, použijete derivácie, inžinierske typy si to nechajú vykresliť v grafe a zbadajú to, no a my ostatní si môžeme pomôcť takýmto trikom.

Súčin v čitateli môžeme chápať ako výpočet plochy nejakého obdĺžnika. A vždy je to obdĺžnik s obvodom 4π! Využijúc pomerne známy fakt, že pri danom obvode obdĺžnika má najväčšiu

[2] udanom v radiánoch, kde $360° = 2\pi$ rad, sme nejakí fyzici predsa!

plochu štvorec, dostaneme, že ten súčin je maximálny, ak $\alpha = 2\pi - \alpha$, a teda $\alpha = \pi$. Najviac teda môžem namerať $R/4$, ak sú svorky presne oproti sebe.

1.4 B3/A1 – Paťkove pružiny (opravoval Jimmy, vzorák Kubo)

Paťko mal rád svoju krabičku nehybne zavesenú na pružine s nulovou počiatočnou dĺžkou. Bohužiaľ, už ho trochu omrzelo predĺženie pružiny x a rád by ho zmenil. Rozhodol sa preto pohrať so zavesením a pružinu takto poprekladal:

Aké je predĺženie pružiny teraz?

Na začiatku, keď sa Paťova krabička v pokoji nachádza zavesená na pružine, celú jej gravitačnú silu kompenzuje ťahová sila pružiny, ktorá v konečnom dôsledku naťahuje samotnú pružinu. Inak povedané:

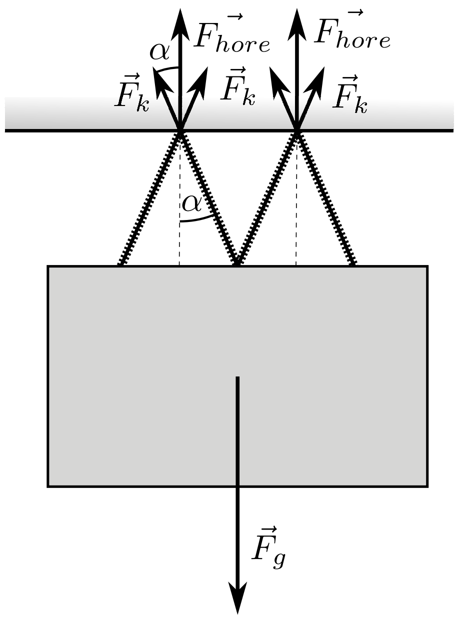
$$F_g = mg = kx,$$

kde k je tuhosť pružiny a m hmotnosť kabičky. Keď však pružinu poprekladáme tak, ako to urobil Paťo (čiže ju rozdelíme na 4 kratšie pružinky dĺžky $\frac{1}{4}x$), situácia sa výrazne mení.

Aká je tuhosť týchto pružiniek teraz?

Na pružinu tuhosti k sa vieme pozerať ako na 4 menšie pružiny zapojené za sebou. Keď natiahnem celú pružinu o Δx, tak sa každá z menších pružiniek, keďže sú rovnaké, natiahne o $\Delta x/4$. Sila, ktorou je ale naťahovaná, je rovnaká, ako sila, ktorou ťaháme celú pružinu, teda F. Potom je ale tuhosť týchto malých pružiniek $k' = \dfrac{F}{\frac{\Delta x}{4}}$. Keďže pre celú pružinu platí $F = k\Delta x$, potom $k' = 4k$. Tuhosť štvrtiny pružiny je teda **štvornásobkom** tuhosti pôvodnej pružiny.

V tomto prípade celá gravitačná sila krabičky pôsobí rovnako silno na tri úchytné body. Zo symetrie situácie je jasné, že všetky štyri pružiny sú naťahované rovnako silno. Otázkou je, o koľko sa dané pružinky natiahnu, pretože našou úlohou je nájsť celkové predĺženie pružiny. Na toto však potrebujeme dobrý model s pekným obrázkom. Nuž, poďme na to.
Predpokladajme symetrické rozloženie pružiniek vzhľadom na krabičku, pričom uhol, ktorý zviera každá pružinka s osou kolmou na strop, je α.
Výborne, teraz je čas na sľubovaný obrázok:



Obr. 7: Pôsobenie síl v sústave krabička-pružiny-strop

Z obrázku je zrejmé, že na vyrovnanie gravitačnej sily F_g potrebujeme dve sily F_{hore} (tipnite si opodstatnenosť dolného indexu), ktoré vzniknú zložením štyroch síl F_k, medzi ktorými je uhol 2α. Smelo môžme teda prehlásiť, že:

$$F_g = 2F_{hore} = 4F_k \cos\alpha \ .$$

Existencia síl F_k spôsobuje predĺženie pružiniek z nulovej dĺžky na predĺženie Δx, takže celkové predĺženie pružiny ako takej je:

$$x_1 = 4\Delta x = 4\frac{F_k}{k} = \frac{F_g}{4k\cos\alpha} = \frac{x}{4\cos\alpha} \ .$$

Vzdialenosť krabičky od stropu je teda štvrtinová nezávisle na uhle α.

No, a je to! Z výsledku pekne vidno, že ak by sme dosadili za α nulový uhol, tak dĺžka celej pružiny by bola štvrtinová oproti prvému prípadu, kedy si Paťo vešal krabičku na neposkladanú pružinu.

1.5 B4/A2 – Ozajstný oscilátor (opravoval Samko C.)

Andrej si prečítal na wikipédii, že vraj amplitúda harmonického oscilátora by mala exponenciálne zanikať. A zaujalo ho to. Zoberte si matematické kyvadlo, kašlite na malé odchýlky a namerajte priebeh zániku amplitúdy. Používajte jednu vami stanovenú amplitúdu ako počiatočnú. Merajte časy, za ktoré amplitúda klesne na rôzne zlomky počiatočnej hodnoty. Merania opakujte.

Namerané dáta vyneste do grafu a zhodnoťte, či závislosť môže byť exponenciálna. Skúste určiť „polčas zániku“ – teda čas, za ktorý amplitúda klesne na polovicu.

Vitajte vo vzorovom riešení prvého tohtoročného experimentu! V prvom rade by som chcel vyjadriť počudovanie nad počtom jeho riešení. Prepánajána, len sa nebojte robiť experimenty! Veď sú tým najjednoduchším, čo môžte spraviť, pretože presne viete, čo treba robiť. No a keď neviete, tak si prečítate tento vzorák (poprípade aj nejaké staršie). Nech sa páči, tu je návod:

Fáza prvá - rozmýšlanie Toto je veľmi dôležitá časť experimentu a pritom sa na ňu často zabúda (napríklad keď sa už blíži termín série). Ono keď sa najskôr nezamyslíme, ale rovno sa vrhneme na meranie, tak dostaneme nejaký zhluk náhodných dát, ktorým nerozumieme. Alebo neuvidíme to, čo sme uvidieť chceli. Konkrétne v tomto experimente to, že amplitúda klesá exponenciálne s časom. Vzorčekom povedané:

$$a = a_0 e^{-\lambda t},$$

kde a_0 je počiatočná amplitúda a λ je konštanta. A my chceme sledovať, ako sa mení $\frac{a}{a_0}$ v závislosti od toho, ako sa mení t. Prichádza prvá otázka a to ako odmerať tento zlomok. Keď už sa bude kyvadlo kymácať[3] zo strany na stranu, tak ťažko niečo odmeriame. Preto bude lepšie, keď si už vopred pripravíme akúsi stupnicu, podľa ktorej budeme zisťovať aktuálne amplitúdy. V tomto prípade si teda zvolíme nejaké zlomky tej pôvodnej a pri experimente si budeme zapisovať časy, v ktorom ich závažie dosiahlo. Druhý prístup bol, že si natočíme celý priebeh tohoto kmitania a potom zanalyzujeme vzniknuté video. Na ňom môžme buď rátať pixely alebo to skombinovať s prístupom prvým a natočiť si video rovno aj so stupnicou.

Fáza druhá - experimentovanie Musíte si zapamätať zopár vecí. Prvou je, že z tri[4] hodnoty nám nič nepovedia o žiadnom vzťahu, ktorý chceme ukázať. Čím viac hodnôt totiž budeme mať nameraných (v tomto prípade zvolíme viac zlomkov, pre ktoré budeme merať čas ich dosiahnutia), tým skôr spozorujeme nejakú závislosť medzi nimi. Druhou je, že každé meranie musíme viac krát zopakovať (to už stačí 4 alebo 5-krát). To nám pomôže zredukovať rôzne náhodné chyby (napríklad zafúkalo od dverí, troška som šťuchol do stola, do závažia mi narazila muška). Treťou je, že berieme do úvahy všetky namerané výsledky a tie spracujeme. Je to lepšie ako čakať, kým mi nedostaneme peknú exponenciálnu krivku a na základe nej povieme, že závislosť je exponenciálna. Veď predsa skutočnosť, že ďalšie merania to neukazovali, už snáď nikoho nebude trápiť.

Fáza tretia - spracovanie výsledkov Dobre, namerali sme hŕbu výsledkov a teraz z nich potrebujeme niečo pekné vyprodukovať. Pre každý zlomok si vypočítame priemerný čas podľa vzorčeka:

$$\bar{t} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} t_i$$

Ďalej si pre každý z týchto priemerov vypočítame aj neistotu nášho merania:

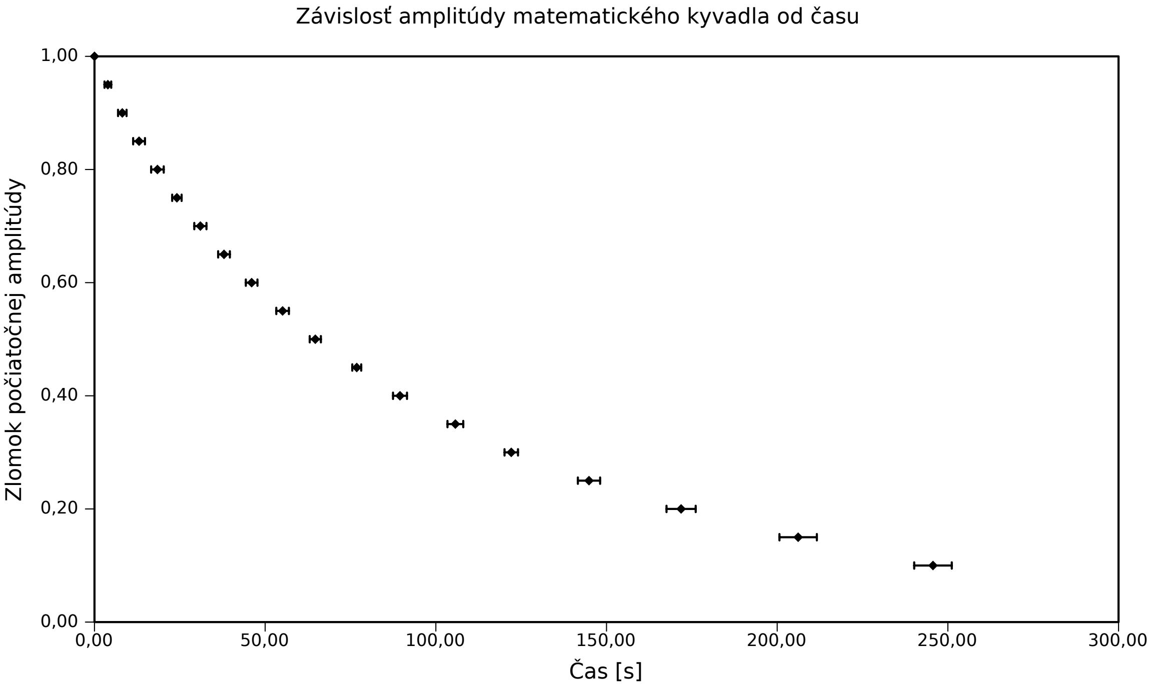
$$s(t) = \sqrt{\frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^{n} \left(t_1 - \bar{t}\right)^2}$$

Tu by som chcel vyzdvihnúť Excel a rôzne iné tabuľkové procesory, ktoré dokážu túto neistotu rátať pomocou funkcie STDEV (z anglického standard deviation). Môže vám to celkom uľahčiť robotu, keď budete mať veľké vzorky dát. Tieto neistoty budeme v grafe zobrazovať vo forme

[3] lineárne harmonicky oscilovať

[4] ani štyri, ani päť

errorbarov. Ak ste sa s nimi nikdy nestretli, tak teraz je najvyšší čas. Takto nejak by mohol v tomto momente vyzerať náš graf:



Treba si dať pozor na to, že na x-ovú os dávame čas a na y-ovú amplitúdy. Totiž ak by sme ich vymenili, z exponenciály ($y = e^x$) dostávame logaritmus.[5]

$$x = e^y \to y = \ln x$$

Mohli by sme teraz len tak z fleku povedať, že náš graf vyzerá exponenciálne a skončiť. To by však asi príliš korektné nebolo. Je dosť totiž dosť ťažké určiť, či niečo je exponenciálne alebo nie. Oveľa ľahšie by sa nám to určovalo, keby naša závislosť mala byť lineárna. Ale my si ju vieme na lineárnu celkom ľahko upraviť. Stačí mi ju totiž zlogaritmovať a premenná t sa mi dostane preč z exponentu[6]. Veď pozrite sa na to:

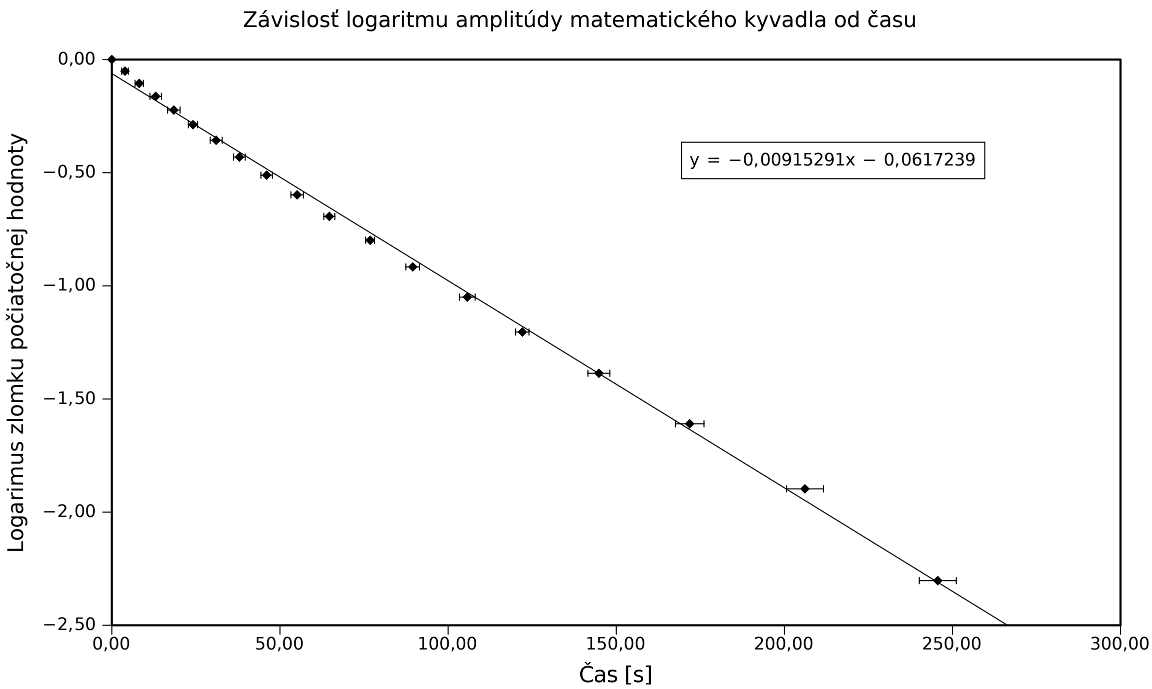
$$\ln(\frac{a}{a_0}) = \ln(e^{-\lambda t})$$

$$\ln(\frac{a}{a_0}) = -\lambda t \cdot \ln e = -\lambda t$$

Tomuto procesu za hovorí linearizácia. Vidíme, že logaritmus našich zlomkov závisí lineárne od času. Teraz si môžme spraviť náš graf, pričom na x-ovú os už dáme logaritmy. Taktiež doňho už môžme napasovať priamku, ktorá by dobre nahrádzala naše namerané hodnoty. Mohli ste ju buď nakresliť alebo túto robotu nechať na Excel:

[5]Logaritmus je totiž inverznou funkciou ku funkcí exponenciálnej a teda sú súmerné podľa osi $y = x$. Ak naopak označíte osi, tak v podstate preklopíte celý graf cez túto os a teda dostávate inverznú funkciu.

[6]Platí totiž, že $\ln a^x = x \cdot \ln a$, pričom $\ln x$ je prirodzený logaritmus (so základom e) čísla x. Preto aj $\ln e = 1$. Zapamätajte si, že logaritmy sú kamaráti a netreba sa ich báť.



Errorbary nám teraz v podstate hovoria, že či je naša priamka „dobrá“ alebo „zlá“, pretože pokiaľ nimi prechádza, tak je rozdiel medzi nameranou a prepokladanou (podľa našej priamky) hodnotou menší ako neistota našich meraní. Spočiatku ide priamka pomimo nich, ale ku koncu ich už celkom pekne pretína.

Keď sme už našli takúto priamku, tak iste poznáme aj jej rovnicu. Tým pádom vieme aj určiť koeficient λ, ktorý mi v princípe hovorí ako rýchlo bude klesať amplitúda. Teda by sa z neho tiež mal dať vyjadriť polčas zániku amplitúdy. Nech $T_{\frac{1}{2}}$ je polčas zániku našej amplitúdy. Potom zrejme platí:

$$\frac{a_0}{2} = a_0 e^{-\lambda T_{\frac{1}{2}}}$$

Zase raz zlogaritmujeme, aby sme dostali polčas preč z exponentu:

$$\ln\frac{1}{2} = -\lambda T_{\frac{1}{2}}$$

$$T_{\frac{1}{2}} = \frac{\ln(2^{-1})}{-\lambda} = \frac{\ln 2}{\lambda}$$

V tomto prípade $T_{\frac{1}{2}} = 75{,}7$ s.

Fáza štvrtá - čo s tým? Na záver by sme ešte mohli polemizovať o tom, že prečo nám náš experiment vyšiel nie úplne tak, ako v ideálnom fyzikálnom svete, kde by sme išli kúpiť ideálne matematické kyvadlo do obchodu s ideálnymi pomôckami. Nič také tu však nemáme a tak si musíme vystačiť s našimi[7] nameranými dátami. Často by sme experiment vedeli ešte nejako vylepšiť, ale už na to nemáme dostupné pomôcky alebo prostredie. O tom všetkom môžte písať.

[7]Ďakujeme Paťovi Turzákovi.

Dúfam, že ste sa niečo nové dozvedeli a nabudúce všetci pošlete pekné riešenia experimentu. Hlavne sa ich nebojte robiť :-)

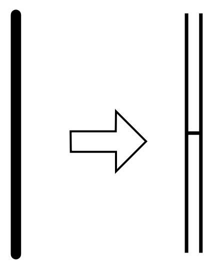
1.6 A3 – Sendvič pre železných fyzikov (opravoval Mišo Ď.)

Pekelný robot Hellboy dostal chuť na svoj obľúbený sendvič. Žiadny naokolo nevidel, preto zašiel do Krute Fritovaných Súčiastok a objednal si. A dostal takýto, skladajúci sa zo štyroch rovnako veľkých dosiek, pričom vonkajšie sú vodivo spojené. Aká je kapacita tohto sendviča, ak na zdroj napätia pripájame vnútorné dosky?

Keby sa kondenzátor skladal len z dvoch takýchto dosiek vzdialených a, mal by kapacitu C.

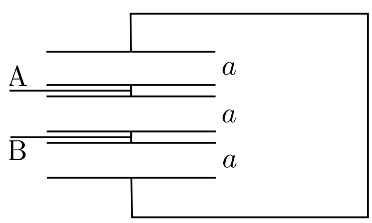
Najdôležitejšou časťou úlohy bude kreslenie. V elektrine platí, že ak dva vodiče majú rovnaký potenciál, môžme ich beztrestne spojiť. Ten istý fakt v opačnom garde hovorí, že ak vodič spája dva body s rovnakým potenciálom, môžme ho odstrániť. Presnejšie povedané: body, ktoré tento vodič spájal, môžme považovať za jeden bod. Tieto fakty môžme použiť na umné prekreslenie nášho sendviča do podoby, pri ktorej sa len uškrnieme popod nos (kto má, aj popod fúzy) a napíšeme výsledok.

Každú dosku kondenzátora, lebo náš senvič nieje nič iné, môžme považovať za dva povrchy s rovnakým potenciálom, spojené vodičom.



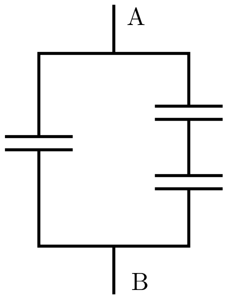
Obr. 8

Urobíme takýto úkon pre prostredné dve platne, pretože krajné dosky už sú v takom tvare.



Obr. 9

A hľa, vidím tri kondenzátory! Schému si môžme ešte prekresliť v súlade s dobrými mravmi.



Obr. 10

Podľa zadania, kapacita jedného kondenzátora so vzdialenosťou dosiek a je C. Vzdialenosti medzi všetkými doskami sú zadané ako rovnaké a preto aj kapacity všetkých troch kondenzátorov budú rovnaké. Ďalej prichádzajú na rad vzťahy na výpočet kapacity sériovo a paralelne zapojených kondenzátorov. Najprv vypočítame sériovú kapacitu kondenzátorov v pravej vetve (Obr. 10): $C_s = \dfrac{C \cdot C}{C + C} = \dfrac{C}{2}$. Následne túto kapacitu spočítame s paralelnou kapacitou v ľavej vetve: $C_{vysledna} = C_s + C = \dfrac{3C}{2}$. A je to!

1.7 A4 – Upratané plyny (opravoval Paťko)

Samko C jedného dňa hľadal svoje obľúbené plyny A a B. Nakoniec našiel v ľavej hornej skrini nádobu, v ktorej bolo n molov z každého. Na jeho sklamanie však boli zmiešané. No v tom C pri stenách nádoby objavil dve polopriepustné membrány – jednu na jednej, druhú na druhej strane. Prvá z nich prepúšťala len plyn A a neprepúšťala plyn B, druhá neprepúšťala plyn A a prepúšťala plyn B. I potešil sa C a pomaly presunul membrány do stredu nádoby, čím vlastne plyny A a B oddelil. Akú pritom C musel vykonať prácu, ak bol jeho proces izotermický?

Predstavme si, že Samko najskôr hýbe ľavým piestom, potom si dá pauzu a až potom hýbe pravým piestom, skončiac situáciou v zadaní. Tak sa nám bude na príklad ľahšie pozerať.

V zadaní si môžeme všimnúť, že vykonávaný dej je *izotermický*. Aby sa toto ale mohlo naozaj diať, tak dej, ktorý Samko predvádza, musí byť *pomalý*. Ak by piestom rýchlo šklbol, došlo by rýchlemu stlačeniu (a nárastu teploty) na jednej strane piestu a k expanzii (a poklesu teploty) na druhej strane piestu.

Ak je ale Samko slušný a piestom hýbe pomaly, k ničomu takému nedochádza. Samko hýbe piestom tak pomaly, že tento stav je v každom okamihu ustálený. Otázka je, ktorá veličina je na oboch stranách membrány rovnaká. My musíme pôsobiť silou na membránu a tak konať prácu, tlak to teda byť nemôže. Ľahko si ale uvedomíme, že v ustálenom stave sa nesmie meniť počet častíc molekuly A na oboch stranách. Teda tok molekúl plynu A cez membránu má byť nulový, čiže z oboch strán membrány cez ňu prechádza rovnaký počet molekúl A.

$$j = \frac{1}{4} n \langle v \rangle$$

Vyrovnáva sa táto ošemetná veličina, [8] kde n je koncentrácia a $\langle v\rangle$ je stredná rýchlosť molekúl, ktorá závisí len od teploty. Teda koncentrácia molekúl plynu A musí byť na oboch stranách rovnaká.

To je ale super zistenie – v konečnom dôsledku si totiž plyn A vôbec nevšíma, že by ním nejaký piest vôbec prechádzal! Jediný prejav piestu je stlačenie plynu B na polovičný objem. Izotermicky. Vypočítať prácu by teda mala byť malina.

Múdre knižky nám hovoria, že prácu vieme vypočítať rovno z pV-diagramu izotermického deja. Práca plynu je totiž plocha pod grafom izotermy. Tú vieme vypočítať nástrojom, ktorý sa volá integrál.[9] Platí:

$$W = \int p \,\mathrm{d}V\,.$$

Tlak p si vieme zo stavovej rovnice vyjadriť ako $p = nRT/V$ a dosadiť do integrálu. Integrujeme od počiatočného stavu, tj. objemu V, po konečný stav, tj. po objem $V/2$. Vyzerať to bude nasledovne:

$$W = \int_V^{V/2} \frac{nRT}{V}\,\mathrm{d}V\,.$$

Knižky nám tiež hovoria, že multiplikatívnu konštantu nRT môžeme pred integrál vyňať. Rovnako sa dočítame aj o tom, že riešenie integrálu $\int \frac{\mathrm{d}x}{x}$ je funkcia $\ln x$. Preto je v našom prípade riešenie

$$W = nRT\,[\ln V]_V^{V/2} = nRT \ln\left(\frac{V}{2V}\right) = -nRT\ln 2\,.$$

Prečo nám vyšla práca záporná? Preto, lebo týmto integrálom sme nevypočítali Samkovu prácu, ale prácu plynu (pozrite sa vyššie). Záporné znamienko značí, že plyn nepracoval, ale na plyne bola konaná práca. Hádajte, kto ju konal!

Úplne na koniec si stačí uvedomiť, že posun druhého piestu je identický ako pohyb toho prvého. Plyn B piest vôbec „nevidí“, plyn A je stlačený na polovičný objem za rovnakých podmienok ako sme stláčali plyn B. Preto je práca, ktorú musí Samko vykonať na druhom pieste, rovnaká.

Celková práca, ktorú Samko vykoná, je $2W = 2nRT\ln 2 = nRT\ln 4$.

[8] `http://physics.mff.cuni.cz/kfpp/skripta/kurz_fyziky_pro_DS/display.php/molekul/6_3`

[9] Integrál je taký fajn nástroj, ktorý počíta plochy pod grafmi rôznych funkcií. Ak by bola izoterma priamka, tak integrovanie by bolo počítanie plochy vzniknutého štvoruholníka medzi izotermou a osou x.

Výsledková listina po 1. kole zimnej časti 2013/2014

A

	Meno	Škola	3	4	5	6	♡	Σ_1	Σ
1	Matej Badin	GJH	9	9	9	9	0	36,00	36,00
1	Patrik Turzák	G Poštová	9	9	9	9	0	36,00	36,00
3	Tomáš Šoltinský	GPH	6	9	9	8	0	32,00	32,00
3	Martin Gažo	G Pankúchova	5	9	9	9	0	32,00	32,00
5	Karolína Šromeková	ŠpMNDaG	5	7	9	8	0	29,00	29,00
6	Marek Bašista	GPH	6	9	9	4	0	28,00	28,00
7	Irena Bačinská	ŠpMNDaG	7	7	9	3	0	26,00	26,00
8	Samuel Kočiščák	G Poštová	6	8	9	2	0	25,00	25,00
8	Mário Lipovský	GJH	9	7		9	0	25,00	25,00
10	Ondrej Bohdal	GJH	6	9		9	0	24,00	24,00
11	Vladislav Blšťák	GJH	6	8		9	0	23,00	23,00
11	Alžbeta Kurdelová	ŠpMNDaG	5		9	9	0	23,00	23,00
11	Samuel Sučík	GJH	5	7	4	7	0	23,00	23,00
11	Jaroslav Valovčan	GĽŠ Zvolen	6	8	6	3	0	23,00	23,00
15	Marek Koščo	OG Varšavská	4	9	3	4	0	20,00	20,00
15	Pavol Olexa	GAB	5	8	7		0	20,00	20,00
17	František Dráček	G PB	6	5		7	0	18,00	18,00
17	Miroslav Gašparek	SGOCZA	8	8	4	*	-2	18,00	18,00
19	Matej Oravec	OG Varšavská	6		4	7	0	17,00	17,00
20	Jerguš Stručka	ŠpMNDaG	5		9		0	14,00	14,00
20	Veronika Janáčová	Gym Met	5	0	9		0	14,00	14,00
20	Samuel Tomašec	OG Varšavská	5	7	0	2	0	14,00	14,00
23	Radka Štefaníková	GyOHavl	5		3	5	0	13,00	13,00
24	Martina Zánová	G JAR	6	5	*	*	0	11,00	11,00
25	Eduard Batmendijn	CGSM	9				0	9,00	9,00
26	Zuzana Mičková	G P.O.H.	5		2	1	0	8,00	8,00
27	Peter Hojnoš	G SNV			6		0	6,00	6,00
28	Samuel Hapák	MatFyz	*		*	*	0	0,00	0,00

B

	Meno	Škola	1	2	3	4	5	♡	Σ_1	Σ
1	Ondrej Bohdal	GJH		9	9	6	9	0	33,00	33,00
2	Vladislav Blšťák	GJH		9	9	6	8	0	32,00	32,00
2	Martin Gažo	G Pankúchova		9	9	5	9	0	32,00	32,00
2	Martin Murin	GJH		9	9	6	8	0	32,00	32,00
5	Andrej Uhliarik	GAB	9	9	7	6		0	31,00	31,00
6	Pavol Olexa	GAB		8	9	5	8	0	30,00	30,00
6	Zuzana Magyarová	GBST		9	9	6	6	0	30,00	30,00
8	Barbora Kováčová	ŠpMNDaG		9	9	6	5	0	29,00	29,00
8	Jakub Viater	GAB	3	9	8		9	0	29,00	29,00
10	Jaroslava Kokavcová	Gamča		9	9	6	3	0	27,00	27,00
10	Jerguš Stručka	ŠpMNDaG	6	9	7	5		0	27,00	27,00
10	Peter Vašut	GJH		9	9	3	6	0	27,00	27,00
13	Lýdia Janitorová	GŠ		9	7	5	5	0	26,00	26,00
14	Natália Jankaničová	GS		9	7	5	4	0	25,00	25,00
15	Matúš Berák	OG Varšavská		7	7	5	5	0	24,00	24,00
15	Veronika Janáčová	Gym Met	3	9	7	5	0	0	24,00	24,00
15	Karolína Ondriášová	ŠpMNDaG	6	8		5	5	0	24,00	24,00
15	Peter Ralbovský	ŠpMNDaG	3	9	9	3		0	24,00	24,00
19	Adam Škrlec	GJH		7	6	6	4	0	23,00	23,00
20	Roman Kluvanec	GyPar	3	9	7	3		0	22,00	22,00
20	Matúš Ondrašek	G Skalica		9	4	6	3	0	22,00	22,00

	Meno	Škola	1	2	3	4	5	♡	Σ_1	Σ
20	Dominika Iždinská	GJH	3	8	6	5		0	22,00	22,00
20	Martina Zánová	G JAR		9	2	6	5	0	22,00	22,00
20	Radovan Švarc	Gct	3	9	8	6		-4	22,00	22,00
25	Cindy Baloghová	G Vráble	1	9	2	4	6	0	21,00	21,00
26	Václav Skála	GJV	*	7	7	6		0	20,00	20,00
26	Denisa Lampášová	G PB		7	7	6		0	20,00	20,00
26	Peter Pavel Arthur Petráš	ŠpMNDaG		9	7	4		0	20,00	20,00
26	Jakub Havelka	GJH	3	7	5	5		0	20,00	20,00
30	Peter Súkeník	GVC	3	9	7	*		0	19,00	19,00
30	Nina Hronkovičová	G Partizánske	3	9	7			0	19,00	19,00
32	Nikola Illášová	GJH	4	9	5			0	18,00	18,00
32	Maroš Šlachtič	ŠpMNDaG	4	9	1	4		0	18,00	18,00
34	Daniela Pittnerová	G Humenné	3	8	2	4		0	17,00	17,00
34	Silvia Nepšinská	GJH	3	9		5		0	17,00	17,00
34	Martin Majtán	G Coubertina	3	7	4	3		0	17,00	17,00
34	Ivan Novák	SŠ de la Salle	6	9	1	1		0	17,00	17,00
34	Ivana Mrázová	G P.O.H.	3	9		4	1	0	17,00	17,00
34	Anna Schindlerová	GNV	1	9	7			0	17,00	17,00
40	Adrián Pieš	ŠpMNDaG		9	2	5		0	16,00	16,00
40	Viktória Vozárová	GJH	4	7	5			0	16,00	16,00
40	Juraj Halabrin	GJH	3	8	2	2	3	0	16,00	16,00
43	Ádám Urbán	G Poštová	3	9	3			0	15,00	15,00
43	Matej Hroboň	Gamča	4	7			6	-2	15,00	15,00
45	Zuzana Mičková	G P.O.H.	3	5	1	5		0	14,00	14,00
45	Marek Murin	GJH	3	7	4			0	14,00	14,00
47	Nikola Sokolová	G Hlinská		9			6	-2	13,00	13,00
48	Silvia Filová	GLN	3	7	6			-4	12,00	12,00
49	Kristián Kocan	SPŠE PO	3	9				-2	10,00	10,00
50	Michaela Šandalová	ŠpMNDaG		9				0	9,00	9,00
51	Šimon Vančo	CGSM		7	1			0	8,00	8,00
51	Katarína Čičová	G M.R.Štefánika	0	6	0	1	1	0	8,00	8,00
53	Jozef Jakub Kojda	uprk	*	7				0	7,00	7,00
54	Samuel Hapák	MatFyz	0	0	0	*		0	0,00	0,00
55	Katarína Kmeťová	MatFyz	0			*		-48	-48,00	-48,00