Fyzikálny korešpondenčný seminár
29. ročník, 2013/2014
FKS, KTFDF FMFI UK, Mlynská dolina, 84248 Bratislava
e-mail: otazky@fks.sk web: http://fks.sk

Vzorové riešenia 3. kola zimnej časti 2013/2014

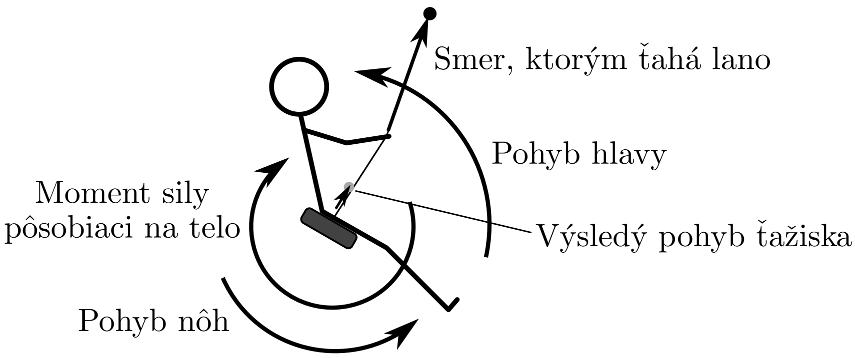
3.1 B0 – Hojdačka (opravovala Katka, vzorák Helboj)

Prečo sa dokážeme rozhojdať na závesnej hojdačke? Načo je dobré pohybovať nohami?

Na úspešné húpanie je treba musíme docieliť zmenu polohy nášho ťažiska. To nie ale tak jednoduché. Predstavme si zjednodušený prípad, keď nohy majú rovnakú hmotnosť ako zbytok tela. Ak pohneme nohami do jednej strany, rovnakou rýchlosťou sa naše telo pohne do strany opačnej, pretože sústava si musí zachovávať hybnosť. Takže ťažisko sústavy ostáva nevychýlené, no vychýli sa reťaz. Ak budeme nohy opakovane vystierať pred seba a zasa krčiť, bude sa nám záves hýbať dopredu a dozadu no my sa príliš nezhúpneme.

Na vychýlenie ťažiska budeme musieť silou pôsobiť na závesy hojdačky, ktoré pôsobia na hojdačku a tá pôsobí na zem. A teda ak chceme, aby hybnosť celej sústavy zostala nulová, tak musíme získať nejakú hybnosť voči zemi, a teda sa poloha nášho ťažiska voči zemi musí zmeniť.

Teraz, keď sme už dostali ťažisko z rovnovážnej polohy, chceme sa hojdať stále vyššie a vyššie, to znamená, že chceme zvyšovať svoju mechanickú energiu.



Obr. 1: Otáčanie tela pri pohybe vpred

Reťaz ťahá za bod závesu, ktorý je za bežných okolností vždy vyššie ako naše ťažisko. Pozrime sa na obrázok. Keď zakloníme hlavu a vystrieme nohy, budú sa hýbať proti smeru hodinových ručičiek. To spôsobí (zo zákonu zachovania momentu hybnosti), že zbytok nášho tela sa otočí v rovnakom smere. Výsledok je, že tlačíme rukami na reťaz, ktorá sa v danom mieste ohne. Z trojuholníkovej nerovnosti vyplýva, že ťažisko sa musí priblížiť k bodu závesu. Následkom toho získame potenciálnu energiu, ktorá sa zmení na kinetickú pri zhúpavaní sa nadol. Keď dôjdeme do najnižšieho bodu, budeme sa hýbať rýchlejšie, ako keby sme sa na hojdačke nepohli.

Seminár podporujú:

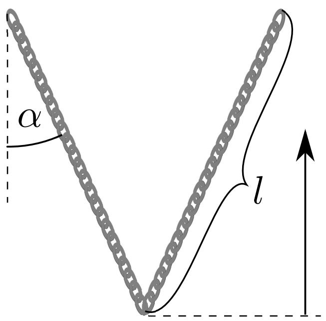
Na opačnej strane spravíme presný opak. Hlavu predkloníme a nohy skrčíme, čím sa nám telo otočí do opačnej strany, a znovu rovnakým spôsobom získame potenciálnu energiu. Týmto spôsobom si môžme pri každom kmite navyšovať energiu, a teda sa rozhojdávať.

3.2 B1 – Ako nevisia reťaze (opravoval Maťo)

Vlejd si chce vytvarovať svoj iniciál z homogénnej reťaze. Tak chytil oba konce reťaze a dal ich do rovnakej výšky. No ona nie a nie sa vytvarovať do V-čka! Vysvetlite mu, prečo sa mu to nepodarí!

Nakoľko nás Vlejdove problémy veľmi zaujímajú a sme empatickí ľudia, neotáľajme a pusťme sa do toho. Budeme predpokladať, že lano je v stacionárnom stave, teda žiadna jeho časť nezrýchľuje.

Lano si rozsekáme (myslene) na malé kúsky. Najväčšia hmotnosť visí na kúskoch lana, ktoré drží Vlejd, preto budú aj napínané najväčšou silou. Naopak najmenšou silou budú napínané kúsky lana na spodku.



Obr. 2: Popis reťaze

Ak zavedieme súradnicu h vo vertikálnom smere podľa obrázka a hmotnosť lana označíme M, hmotnosť časti lana, ktorá napína kúsky vo výške h je:

$$m(h) = M\frac{h}{l\cos\alpha}\,.$$

h/l vyjadruje, aká časť lana je v danej výške. Súradnica h ale naviac nejde v smere lana, preto ten $\cos\alpha$.

V každom kúsku lana musí byť príslušná tiažová sila kompenzovaná silou ťahovou, inak by sa lano rozpadlo. Pre ťahovú silu teda dostávame

$$T(h) = \frac{Mgh}{2l\cos\alpha}\,,$$

kde pribudla polovica, pretože tiaž lana sa rozkladá medzi dva kúsky, ktoré ju držia.

Pozrime sa však na hociktorý kúsok lana s dĺžkou Δh niekde v strede lana. Podľa predošlej rovnice by mal byť tento kúsok zhora napínaný väčšou silou ako zdola. Keďže ale lano visí v tvare véčka, ktoré zviera stále rovnaký uhol s osou h,[1] znamená to, že aj súčet síl pôsobiacich naň vo vodorovnom smere je *nenulový*. Tento (ľubovoľný) kúsok lana by preto mal zrýchľovať, čo je v spore s jeho statickým stavom. Preto lano nemôže nikdy visieť v popísanom tvare.

[1] Rozmyslite si, že toto v tvare, v ktorom lano naozaj visí, nie je splnené, preto je istá nádej, že tak naozaj visieť môže.

Bodovanie Veľa z vás dostalo 2 body za to, že jednoducho skonštatovali, že intuitívne by sa zdalo, že tvar U má nižšie ťažisko ako tvar V. Intuícia nám ale, bohužiaľ, nestačí a bolo potrebné svoje úvahy podložiť aj fyzikálne.

3.3 B2 – Vlnitá panoráma (opravoval Vlejd)

Kajka zapojila svoje umelecké cítenie a rozhodla sa, že si podľa Squiddieho vzoru nafotí svoj kopček. AdobrePhotoShrot zaúradoval a vypľul takýto obrázok:

Aj Kaja si svoj obrázok vytlačila, vystrihla presne podľa PhotoShrotovho orezania a chce si ho zavesiť jedným klincom priamo v ťažisku. Kde ale to ťažisko tento obrázok má? Namerajte len za pomoci pravítka. Viete to odmerať presne? Namerali ste to presne? Ak nie, o koľko ste sa pomýlili? Ak ste to nenamerali presne, ako zlepšiť presnosť vášho merania?

Tak, a znovu sa vidíme :-D. Opäť máme úlohu s ťažiskom. Skôr, ako sa pustíme do riešenia, si ale dôkladne a s porozumením prečítajme zadanie. Máme nájsť ťažisko nejakého útvaru len pomocou pravítka. To znamená navrhnúť postup, ktorý by mohol realizovať ktokoľvek, kdekoľvek a kedykoľvek (ba dokonca s akýmkoľvek obrázkom) a stačilo by mu na to len pravítko (a možno niečo na zapisovanie, alebo rátanie). Tiež by bolo pekné chcieť, aby sme pre rovnaký obrázok dostali rovnaký výsledok.

Spomeňme si teraz na predchádzajúcu sériu – zrazu sa zdá, že vieme, čo robiť. Problém je, že teraz náš obrázok nevieme pekne, a hlavne presne rozdeliť na jednoduchšie útvary, pre ktoré už ťažiská nájsť vieme. Budeme sa teda musieť zmieriť s tým, že k presnému riešeniu sa nedostaneme.

Ako schodná cesta sa javí krivé čiary rozumne pozarovnávať do pravohulej lomenej čiary. Pre takto upravený obrázok vieme polohu ťažiska vypočítať spôsobom, ktorý už poznáme.[2] Snáď len doplňme, že ťažisko trojuholníka je geometrický priesečník jeho ťažníc, respektíve súradnice jeho ťažiska sú priemernými súradnicami jeho vrcholov. Pekné, no takéto riešenie je hodné ôsmich bodov. Prečo?

Problém robí odhad nepresnosti tohto postupu. Jediné, čo môžeme urobiť, je tipnúť si, že je malá. Hodnoverne to doložiť ale nevieme. Potrebovali by sme odhadnúť plochu zanedbaných častí, čo nevieme rozumne určiť.

Inak povedané, ak by rovnako postupoval niekto iný, nič by mu nebránilo zvoliť lomenú čiaru o trošku inak. Takto by dvaja ľudia mohli rovnakým postupom dostať rôzne výsledky. A obaja by tvrdili, že ich chyba je „malá“. Komu by sme potom mali veriť?

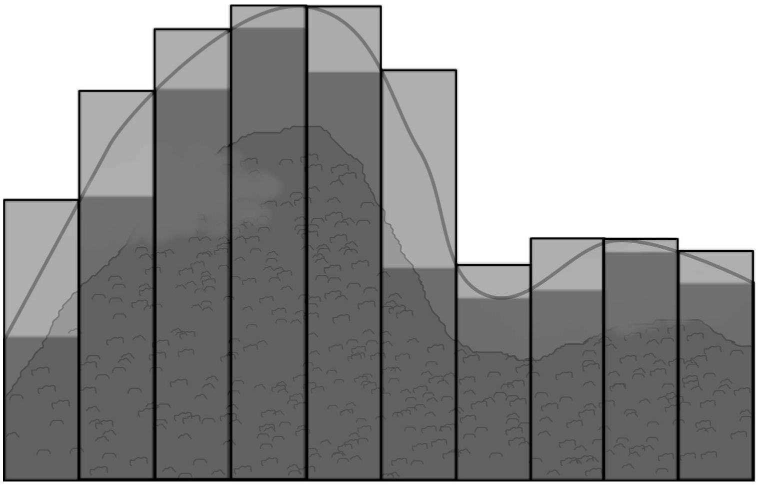
Ako na to teda ísť fyzikálne? Na prvý pohľad úplne nepresne. Najprv sa vykašleme na trojuholníky a budeme deliť obrázok len na obdĺžniky, a to nasledovným spôsobom.

Zvolíme si nejakú fixnú malú šírku obdĺžnikov (také slíže), ktoré rozložíme po ploche obrázku. Vždy hľadáme dva obdĺžniky. Jeden s obsahom A taký, ktorý je celý v obrázku a jeden, s obsahom B taký, ktorému žiadna časť obrázku neušla, viď obrázok. Za obsah fotky potom prehlásime ich priemer. Čo nám toto riešenie dá? Na prvý pohľad nič. Zdá sa totiž, že sme absolútne ignorovali skutočný tvar obrázku. Napriek tomu ale vieme kontrolovať, ako najviac

[2] Detajlnejší popis postupu nájdete na `http://fks.sk/archiv/2013_14/29vzorakyZima2.pdf`

sme sa mohli pomýliť. V najhorších možných prípadoch mal obrázok obsah veľmi blízky A alebo B. V takom prípade by sme dostali relatívnu odchýlku

$$\delta = \frac{\left|\frac{A-B}{2}\right|}{\frac{A+B}{2}} = \frac{|A-B|}{A+B},$$



Obr. 3: Takto budeme obdĺžnikovať

Keď už teraz máme náš obdĺžniček, respektíve jeho rozmery, tak vieme nájsť aj jeho ťažisko. To bude na priesečníku výšok, respektíve v strede obdĺžnika.

Kompletné vzorové riešenie uvádzať nebudeme, nakoľko to bola aj tak len tabuľka čísel, ktoré by sa nezhodovali s ničím, čo kto nameral. Podstatná je poloha ťažiska. Aby sme sa vyhli problémom s rôznymi mierkami, tak uvedieme len pomer x-ovej polohy ťažiska a šírky obrázku, podobne aj pre y. Slávne ťažisko sa nachádza na súradniciach

$$T = (0{,}46; 0{,}37),$$

No a samozrejme ešte chcená odchylka. Musíme zistiť, ako najviac sme sa mohli pomýliť. V smere osi y sa mohlo pri najhoršom stať to, že všetky obdĺžničky boli v skutočnosti veľmi podobné tým väčším. V tom prípade musíme porátať, o koľko by sa posunulo ťažisko hore. Na drujhej strane ale mohli byť veľmi podobné tým menším, a vtedy by sa nám ťažisko posunulo dole. Podobne sme sa mohli pomýliť aj v smere osi x. To by sa stalo vtedy, ak by boli všetky naľavo väčšie a napravo menšie. Tak isto aj naopak.

Keď už máme odchýlku vyjadrenú, je prirodzené sa pýtať, ako ju zlepšiť. Často sa vyskytol argument, že keď zväčšíme počet kúskov, na ktoré sme obrázok rozdelili, tak sa nám zväčší aj presnosť. Je to ale pravda? Teoreticky áno (lebo krivú oblasť lepšie odhadujeme), no v reálnom geometrickom riešení skôr nie. Problém je, že ak budeme mať veľa obdĺžnikov, budeme mať veľa úzkych kúskov. My máme ale nedokonalé meracie prístroje a naša presnosť merania dĺžok sa spravidla nemení. Predstavme si, že by sme si rozdelili obrázok na 10 pásikov so šírkou jeden centimeter a potom vždy po dvoch spájali ťažiská. Každé ťažisko obdĺžnika sme namerali s presnosťou povedzme 1 mm. Keď ich spájame, tak ich priemer budeme vedieť s teoretickou presnosťou 2 mm, no narysujeme ho naviac s chybou 1 mm. Takto sa nám bude zhoršovať presnosť, až nakoniec prídeme k nepresnosti 1 cm. Keďže obrázok mal rozmer 100mm = 10cm, dostali sme na relatívnu nepresnosť 10%. Ak si rozdelíme obrázok až na 100 dielikov, odchýlka spôsobená tým, že sme nezarátali niektoré časti obrázka sa nám zmenší. No ddchýlka z merania sa nasčíta 100-násobne a dostaneme nepresnosť až 10 cm. Pozor na to!

Poznámka na záver pre fajnšmekrov. Táto úloha mala ale aj presné a exaktné riešenie. Uvádzame ho ale len pre zaujímavosť (ani ja sám by som nebol ochotný ho realizovať). Myšlienka je nasledovná. Náš obrázok je absolútne presne matematicky popísateľný, pretože je vektorový (ako väčšina obrázkov v zadaniach a v slušných pdf vôbec). To znamená, že každá jeho čiara je definovaná nejakým matematickým predpisom. Ak sa k tomuto predpisu dostaneme, vieme podľa neho nájsť predpis funkcie panorámy. Nakoniec použitím vhodného integrálu vieme nájsť ťažisko. V skutočnosti ale toto riešenie nie je tak jednoduché, ako som popísal. Kto by to ale spravil (aj dodatočne), má u mňa čokoládu.

Ak by bol obrázok rastrový, stačí porátať jednotlivé pixely, ideálne nejakým šikovným programom. Pre záujemcov som ochotný takýto program dodať.

3.4 B3/A1 – Kaskáda (opravovala Tinka)

Samko chcel ohúriť Dušana, a tak mu postavil takúto fontánu:

Skladá sa z 25 rovnakých nádob valcovitého tvaru s prierezom $S_1 = 1\,\mathrm{m}^2$ a každá z nich má na svojom dne dieru prierezu $S_2 = 0{,}01\,\mathrm{m}^2$. Voda, ktorá z nádoby vystrekne, vždy všetka okamžite dopadne do nádoby pod ňou. Voda, ktorá vystrekuje z poslednej 25. nádoby, je automaticky prečerpávaná do prvej nádoby. Nádoby nikdy nepretečú vrchom, majú dostatočne veľký objem.

Na slávnostnom otvorení fontány nalial Samko do prvej nádoby $V_0 = 10\,\mathrm{m}^3$ a do zvyšných nič a od tohto okamihu spustil časomieru. Nájdite všetky časy, kedy bude hladina v 5. nádobe $H_5 = 0{,}45\,\mathrm{m}$ a vysvetlite, že ste naozaj našli všetky.

Pri riešení tohto príkladu 12 z 10 psychológov neodporúča ručné riešenie, ale použitie tabuľkového procesoru alebo, ak si natoľko šikovný a nemáš rád tabuľky, programovanie. Každopádne, hodnotíme nielen numerický výsledok, ale aj vzorce, teda ich nezabudnite uviesť.

Ak si ešte nikdy nerobil nič podobné a cítiš sa neisto, odporúčame si pozrieť túto prezentáciu.

Predstaviť si, čo sa tam približne deje, nie je ťažké. Intuitívne cítime, že situácia by sa časom mohla ustáliť, pretože čím plnšia je nádoba, tým rýchlejšie z nej voda strieka a teda jej viac ubúda.

Pekné pozorovanie na túto tému spravil Baklažán: ak sa pozrieme na najvyššiu z hladín vo všetkých nádobách, tak tá s časom nemôže stúpať. Pretože čím sa vyznačujú nádoby, v ktorých hladina stúpa? Tým, že majú väčší prítok než odtok. Inak povedané, že majú nižšiu hladinu ako nádoba nad nimi! Teda hladina vody v nádobe s maximálnou hladinou musí klesať. Toto pekné pozorovanie odložíme do šuflíka a ideme ďalej.

Dosť kvalitatívnych kecov, sem so vzorcami! Torricelliho zákon hovorí, že ak je hladina tekutiny vo výške h nad otvorom, tak z neho tekutina prýšti rýchlosťou $v = \sqrt{2gh}$. Nám by sa však viac hodil objem, ktorý z nádoby odbudne za nejaký čas Δt. Keby tekutina nepadala, tak sa za ten čas dostane do vzdialenosti $vt = \sqrt{2gh}\Delta t$ a sformuje valec o objeme $S_2\sqrt{2gh}\Delta t$. Toľkoto tekutiny teda odbudlo a hladina klesla o

$$\frac{S_2\sqrt{2gh}\Delta t}{S_1},$$

no nie?

No nie. Práve sme povedali, že sa hladina znížila, teda nemôžeme priamo použiť Torricelliho zákon! Inak povedané, h nie je konštanta. Nemení sa však rýchlo. Ak by Δt bolo malé, tak sa veľkej chyby nedopustíme, aj keď výšku hladiny za konštantu považovať budeme. Preto si priebeh deja rozdelíme na veľa krátkych časových úsekov. Zavedieme pre i-tu nádobu funkciu $h_i(t)$ značiacu výšku hladiny v čase t. Už vieme, koľko z nej odbudne za čas Δt, nesmieme však zabudnúť, že do nej naopak priteká to, čo zmizlo z nádoby o jedna vyššie. Takže platí:

$$h_i(t+\Delta t) = h_i(t) - \frac{S_2\sqrt{2gh_i(t)}\Delta t}{S_1} + \frac{S_2\sqrt{2gh_{i-1}}\Delta t}{S_1}\,.$$

Okrem toho vieme, čo bolo na počiatku: $h_1(0) = 10\,\mathrm{m}$ a pre $2 \leq i \leq 25$ zase $h_i(0) = 0\,\mathrm{m}$. A naša hlavná rovnica[3] z tohoto údaju vie zistiť, hodnoty $h_i(\Delta t)$, tie sa dajú do nej znova vraziť a zistiť $h_i(2\Delta t)$ a tak ďalej. Osoby netrpiace masochizmom dajú na rady psychológov a túto vysoko intelektuálnu činnosť prenechajú počítaču. Hladina v piatej nádobe je vykreslená v grafe. Hodnotu 0,45 dosiahe šesťkrát, a to približne v časoch 63,4 , 285,3 , 775,1 , 1034,3 , 1558,0 a 1685,7 sekúnd. Stačí to? Netreba počítať ďalej? Otvoríme šuflík, vytiahneme Baklažána a uvedomíme si, že v 1779. sekunde bude hladina všetkých nádob nižšia ako 0,45 a teda nikde, špeciálne v piatej nádobe, na túto úroveň nemôže vystúpať.

Ak ste vôbec alebo len čiastočne zdôvodnili, prečo ďalej počítať netreba, stálo vás to nanajvýš 3 body. Odhadovať numerickú chybu by v tomto prípade bol humus, ale patrí sa a je dobrých zvykom aspoň vyskúšať, či, ak zvolím menšie časové dieliky, sa výsledok nejako významne zmení. Ak nie, tak to hádam mám dosť presne.[4] Neznalosť slušného fyzikálneho správania je trestaná stratou dvoch bodov.

3.5 B4/A2 – Moderná sústava (opravoval Jimi, vzorák Mišo)

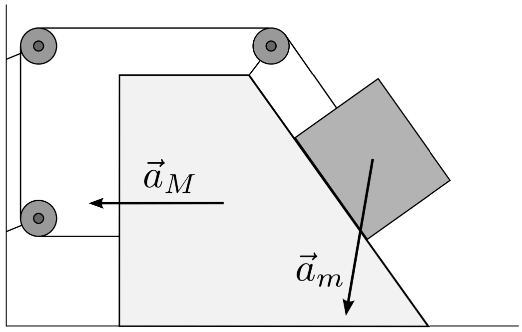
Mechanická sústava nešla veľmi na odbyt, pretože do módy prišli sústavy, ktoré majú kladky na pevných stenách. Jimi nelenil, rozpílil tie nepredané (čiže všetky) a vyrobil z nich výborný moderný model:

A reklamné ťahy nechal na vás. Kváder sa teraz môže pohybovať s nulovým trením po podlahe. S akým zrýchlením zrýchľuje teraz m_2?

Najprv vás poteším, trenie ste naozaj nemuseli uvažovať. Úloha sa dala riešiť dvomi spôsobmi – použitím priamo pohybových rovníc (nájdem sily a vyjadrím zrýchlenie) alebo cez energie. Tu ukážem prvý, častejší (ale trochu zdĺhavý) spôsob a druhý len nakoniec načrtnem. Začnem obrázkom so zrýchleniami.

[3] alebo skôr sada rovníc

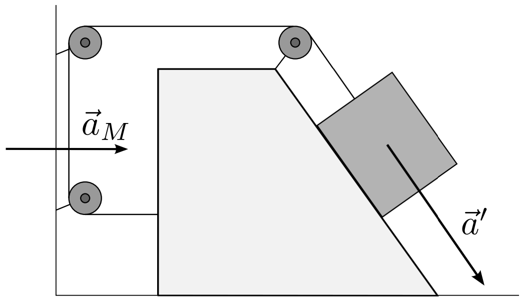
[4] Pozdravujem expertov s časovými krokmi 1 sekunda.



Obr. 4: Zrýchlenia telies

Vec s hmotnosťou M zrýchľuje vodorovne so zrýchlením a_M doľava. Kváder m sa šmýka dole kopcom[5]. „Kopec“ je ale zároveň pohyblivý, preto zrýchlenie a_m nie je rovnobežné s povrchom, ale smeruje trochu viac nadol.

Aby sme si to zjednodušili, dočasne sa presunieme do vzťažnej sústavy, kde M stojí. Potom ale zvyšok sveta, napríklad aj stena naľavo, bude mať zrýchlenie a_M doprava. Táto sústava je neinerciálna (zrýchľuje vzhľadom na pôvodnú sústavu), preto sa v nej objavia zotrvačné sily. Zjednodušenie spočíva v tom, že teraz sa bude m iba šmýkať dole kopcom (zrýchlenie označím a'), čo je ľahko popísateľný pohyb.[6]



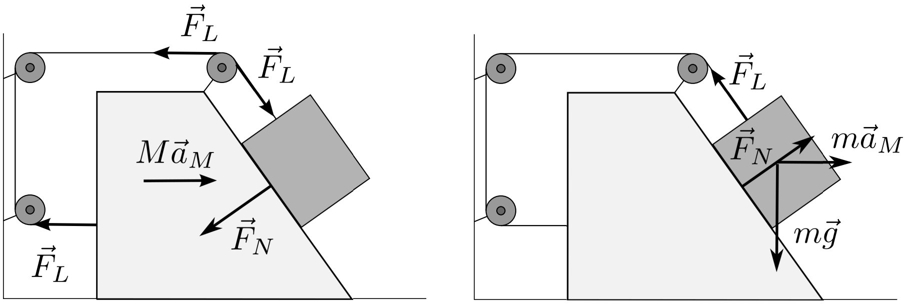
Obr. 5: Zrýchlenia v neinerciálnej sústave

Aby bolo lano stále napnuté, musí platiť $a' = 2a_M$. Ak to nevidíme, stačí si predstaviť, že sa stena priblíži o malý kúsok Δx. Potom obidve vodorovné časti lana budú kratšie (o Δx každá) a nadbytočné lano sa posunie smerom k závažiu, ktoré sa šmykne o $2\Delta x$. Máme teda pomer malých posunutí steny a závažia. Keď sú dostatočne (až nekonečne) malé, stačí posunutia predeliť časom, ktorý trvali, a zistíme, že rovnaký pomer majú aj rýchlosti. Podobne aby sa časom nepokazil pomer rýchlostí, musia byť v rovnakom pomere aj zrýchlenia.

Teraz sa poďme pozrieť na sily (vľavo pôsobiace na M, vpravo na m):

[5] Podobne ako väčšina z vás, používam označenia iba m, α miesto m_2, α_2.

[6] V pôvodnej sústave sa dá vektorovo vyjadriť pohyb m ako superpozícia pohybu M a pohybu m vzhľadom na M, čo je ekvivalentný postup, akurát sa komplikovanejšie opisuje.



Obr. 6: Sily v polsústave

Sily pôsobiace na *M* Schválne som vynechal gravitačnú silu a normálovú od podlahy. V zvislom smere sa tu pre nás totiž nedeje nič zaujímavé (vedeli by sme tie sily vypočítať, ale inde by sme ich nepoužili).

Ma_M je zotrvačná sila, F_L pnutie lana, F_N normálová sila. Nezabúdajme, že aj kladka vpravo hore je súčasťou M a teda pnutie lana pôsobí aj tu, z oboch strán pozdĺž lana. Vo vodorovnom smere M stojí,[7] teda platí

$$Ma_M - F_N \sin\alpha - 2F_L + F_L \cos\alpha = 0 \tag{1}$$

Sily pôsobiace na *m* Okmžite poznáme známe sily mg, tiažovú silu a ma_M, zotrvačnú silu. Nič nám už nebráni napísať pohybové rovnice pre zložky kolmé aj rovnobežné s povrchom:

$$F_N + ma_M \sin\alpha - mg\cos\alpha = 0 \tag{2}$$
$$ma_M \cos\alpha + mg\sin\alpha - F_L = ma' = 2ma_M \tag{3}$$

Riešenie Hľadáme $a' = 2a_M$. Nepoznáme ani F_L, F_N, no máme 3 rovnice. Najprv vyjadríme F_N z (2):

$$F_N = mg\cos\alpha - ma_M \sin\alpha$$

Tu si všimnime druhý člen, viacerí ste ho vynechali. Áno, často pri voľne šmýkajúcich sa telesách nie je, ale tu sa objavil kvôli pohyblivosti podložky. Bez neho by sa m hýbalo len rovnobežne s povrchom a M by odišlo preč! Teraz vyjadríme F_L z (1):

$$F_L = \frac{Ma_M + F_N \sin\alpha}{\cos\alpha - 2} = \frac{Ma_M + m\sin\alpha\,(g\cos\alpha - a_M \sin\alpha)}{\cos\alpha - 2}$$

Dosadíme do (3) a vyjadríme a_M (rovno píšem výsledok):

$$a_M = \frac{2g\sin\alpha}{\dfrac{M}{m} + 5 - 4\cos\alpha}$$

[7] Takú sme si vybrali vzťažnú sústavu.

A naviac $a' = 2a_M$. Nakoniec sa ešte chceme vrátiť do pôvodnej vzťažnej sústavy, teda (vektorovo) pripočítame a_M smerujúce doľava. Stačí nám rovno veľkosť a_m, použijeme kosínusovú vetu a dostaneme

$$a_m = a_M\sqrt{5-4\cos\alpha} = \frac{2g\sin\alpha\sqrt{5-4\cos\alpha}}{\frac{M}{m}+5-4\cos\alpha}$$

Hľa, výsledok! Ale je tu ešte problém, ktorý som si zatiaľ potichu nevšímal. Pozrime si vyjadrenie F_N. Čo ak nám to vyjde záporné? Keď dosadíme výsledné a_M, zistíme, že to je prípad, keď platí:

$$\frac{M}{m} < \frac{2\cos^2\alpha - 5\cos\alpha + 2}{\cos\alpha} \tag{4}$$

F_N nemôže byť záporné (telesá sa nelepia), takže ak platí (4), potom m sa nebude šmýkať po M, ale pôjde vzduchom. V rovniciach (1), (3) iba zmažeme F_N. V (2) musíme F_N nahradiť akýmsi ma_k, pretože teraz sa m bude hýbať aj kolmo na povrch.[8] Dostaneme:

$$a_M = \frac{g\sin\alpha\,(2-\cos\alpha)}{\frac{M}{m}+(2-\cos\alpha)^2}$$
$$a' = 2a_M$$
$$a_k = a_M\sin\alpha - g\cos\alpha$$

a_m dostaneme ako vektorový súčet a' dolu kopcom, a_k kolmo na kopec a (prechod do pôvodnej sústavy) a_M doľava. Veľkosť bude

$$a_m = \sqrt{a_M^2\,(2-\cos\alpha) + g^2\cos^2\alpha}$$

Tak. Ešte krátke inštrukcie, ako sa aspoň časti tejto roboty vyhnúť: počítame cez energie - potenciálna sa mení na kinetickú. Z geometrie ukážeme, že pokiaľ sa M a m dotýkajú, keď sa M posunie o x doľava, m sa posunie o x doľava a $2x$ dole. Z toho (kosínusová veta) platí pre rýchlosti $v_m = v_M\sqrt{5-4\cos\alpha}$. Potom

$$E_k = \frac{1}{2}v_M^2\,(M + m\,(5-4\cos\alpha))$$
$$E_p = -mg2x\sin\alpha$$

Rovnica $E_k + E_p = 0$ sa dá potom upraviť na

$$\frac{1}{2}Mv_M^2 = M\frac{2g\sin\alpha}{\frac{M}{m}+(5-4\cos\alpha)}x$$

kde vďaka podobnosti s rovnicou pre voľný pád[9] zbadáme, že ten strašný zlomok je vlastne a_M. Geometriou dopočítame $a_m = a_M\sqrt{5-4\cos\alpha}$.

[8] Teraz už aj v našej zmenenej sústave.

[9] Voľný pád M na mieste zlomku obsahuje gravitačné zrýchlenie. Teleso teda zrýchľuje presne tak, akoby padalo na planéte s takýmto g-čkom. Kto chce machrovať, môže si to overiť, je to jednoduchá diferenciálna rovnica.

3.6 A3 – Oslnená kométa (opravoval Paťo)

Kométa je práve teraz vo svojom aféliu vzdialenom od Slnka $r_{\mathtt{af}} = 81\,\mathrm{AU}$, má polomer $r = 2\,\mathrm{km}$ a je celá zložená z ľadu. Perihélium sa nachádza vo vzdialenosti $r_{\mathtt{per}} = 1\,\mathrm{AU}$ od Slnka. Malá polos dráhy kométy je $b = 9\,\mathrm{AU}$ a albedo kométy je $\alpha = 0{,}2$. Odhadnite, akú hmotnosť bude mať táto kométa po jednom obehu okolo Slnka opäť v aféliu!

Fakt, že kométa nám obieha ako kadžé iné teleso v gravitačnom poli Slnka, znamená, že platia 3 Keplerove zákony:

(i) Slnko je v jednom z ohnísk eliptickej obežnej dráhy;

(ii) Kométa opíše za rovnakú dobu rovnakú plochu;

(iii) Platí $T^2 = a^3$, ak obežnú dobu T vyjadríme v rokoch a veľkú poloos v astronomických jednotkách (AU): $a = r_{\mathrm{af}} + r_{\mathrm{per}}/2 = 41\,\mathrm{AU}$.

Najskôr si spočítajme užitočné číslo, ktoré plynie rovno z tretieho zákonu, a to obežnú dobu:

$$T = \sqrt{a^3} \approx 262{,}5\ \mathrm{r}\,.$$

Evidentný dôsledok prvého zákonu je, že vzdialenosť kométy od Slnka (ozn. R) sa bude počas obehu meniť. V závislosti na tom sa bude zákonite meniť aj výkon, ktorý dopadá na povrch kométy. Vieme, že žiarivý výkon Slnka ($4 \cdot 10^{26}\,\mathrm{W}$) sa plusmínus rovnomerne rozkladá na povrch gule s polomerom rovným vzdialenosti kométy od Slnka. Na kométu dopadá iba časť tohto plošného výkonu. Táto časť je úmerná priemetu guľovej kométy na sféru, na ktorú sa rozkladá slnečné žiarenie. Fu, celkom komplikované. V rovnici zo vyzerá ale o kus jednoduchšie. Výkon, ktorý dopadá na kométu s polomerom r vo vzdialenosti R od Slnka je

$$P = \frac{L}{4\pi R^2}\pi r^2 = \frac{L}{4}\frac{r^2}{R^2}\,.$$

Teraz by to chcelo vyjadriť závislosť R na nejakom rozumnom parametri. Na to použijeme ďalší z Keplerovych zákonov, konkrétne zákon plôch.

Hore sme napísali, že zákon píšeme v tvare $\Delta S/\Delta t =$ konšt. Čo je ale oná konštanta? Nebudeme vás napínať a prezradíme vám, že je to ľavá strana, zapísaná v tom najmakroskopickejšom tvare, teda obsah elipsy lomeno obežná doba:

$$\frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{\pi ab}{T}\,.$$

Malú plochu ΔS vieme vyjadriť pomocou malého opísaného uhlu $\Delta\varphi$. Pre miniatúrny uhol môžeme predpokladať, že vzdialenosť R sa prakticky nemení. Preto je opísaná plocha „skoro“ pravouhlý trojuholník s odvesnami R a $R\Delta\varphi$. Plocha trojuholníka bude

$$\Delta S = \frac{1}{2}R^2\Delta\varphi\,.$$

Teraz už máme všetko, čo nám treba: z posledných dvoch rovníc vyjadríme člen $1/R^2$ (uvidíte prečo):

$$\frac{1}{R^2} = \frac{T}{2\pi ab}\frac{\Delta\varphi}{\Delta t}\,.$$

Teplo ΔQ, ktoré kométa prijme za Δt, ak predpokladáme, že polomer kométy sa výrazne nemení,[10] je $(1-\alpha)P\Delta t$. Člen s albedom sa vo výraze vyskytuje preto, lebo kométa odráža žiarenie s koeficientom α, teda absorbuje s koeficientom $1-\alpha$.

Ak si dosadíme za výkon a následne za R^2, dostávame

$$\Delta Q = (1-\alpha)\frac{Lr^2}{4}\frac{T}{2\pi ab}\frac{\Delta\varphi}{\Delta t}\Delta t = \frac{(1-\alpha)Lr^2T}{8\pi ab}\Delta\varphi\,.$$

Výraz je v tvare kúsok tepla rovná sa konštanta krát kúsok uhlu. Nič nám teda nebráni teplo spočítať na celkové teplo Q a uhol na jeden obeh okolo Slnka 2π (snáď mi odpustíte, že drzo zamĺčam fakt, že je to integrovanie :-)). Teplo je po dosadení

$$Q = \frac{(1-\alpha)Lr^2T}{4ab} \approx 3{,}2\cdot 10^{17}\,\mathrm{J}\,.$$

Zostáva nám už iba určiť, koľko ľadu dokáže toto množstvo tepla z kométy odpariť. To však nie je až také triviálne! Podmienky v medziplanetárnom priestore sú rádovo iné ako podmienky na Zemi, najmä tlak. Pri tlaku v medziplanetárnom priestore kvapalná fáza vody neexistuje. Preto všetok ľad z kométy uniká sublimáciou.

Na (hrubý) odhad využijeme, že priemerná teplota kometárneho ľadu v aféliu je niekde v oblasti desiatok kelvinov, povedzme 100 K. Podľa wikipédie[11] je merné teplo sublimácie ľadu pri tak nízkej teplote zhruba

$$C \approx 2800\,\mathrm{kJ/kg}\,.$$

Posledný krok je dopočítať stratenú hmotnosť kométy

$$\Delta M = \frac{Q}{C} = 1{,}1\cdot 10^{11}\,\mathrm{kg}\,.$$

Pri hustote ľadu $900\,\mathrm{kg/m^3}$ to znamená zmenu polomeru o približne

$$\Delta r = \frac{\Delta m}{4\pi r^2\rho} \approx 2{,}5\,\mathrm{m}\,.$$

Vidíme, že kométa „schudne“ na polomere približne 10 metrov, teda naše priblíženie o prílišnom nemenení polomeru bolo opodstatnené. Juchú!

3.7 A4 – Kochodrát (opravoval Dušan)

Dušan s Filipom našli nekonečno odporového drôtu s dĺžkovým odporom λ, takže konečne ho mali dosť na to, aby si z neho postavili svoj obľúbený fraktál - Kochovu vločku. Postavili si ju tak, že jej hrana na začiatku bola a a drôt len pridávali. Aký je odpor medzi bodmi A a B?

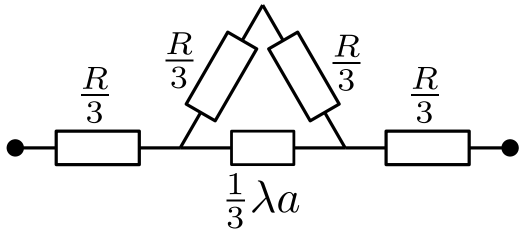
Rátanie odporu našej Kochovej vločky stálo na 2 hlavných pilieroch. Bolo potrebné si uvedomiť, akým spôsobom vznikol takýto fraktál a bolo nutné využiť to, že odpor drôtu závisí lineárne od jeho dĺžky. Tak teda smelo do toho!

[10] Vidíme, že plocha, ktorou kométa príjma slnečný výkon, je úmerná r^2. Ak sa polomer zmenší povedzme o 5%, čo je mimochodom už celkom dosť, tak plocha sa zmenší iba o $0{,}05^2 = 0{,}25\%$. Preto je toto naše zanedbanie rozumné.

[11] http://en.wikipedia.org/wiki/Latent_heat\#Latent_heat_for_condensation_of_water

Keď sa tak pozrieme na schému našej odporovej siete, ľahko si všimneme, že je poskladaná z 3 rovnakých častí, pričom jedna je zapojená paralene ku dvom sériovo spojeným. Takže výsledný odpor bude $R_v = \frac{2}{3}R$, kde R je odpor jednej vetvy.

Zamerajme sa teda iba na tú jednu vetvu. Je to fraktál, ktorý je zložený zo 4 rovnakých fraktálov, ako bol pôvodný (iba menších), a odporového drôtu dĺžky $\frac{1}{3}a$. Naše 4 fraktáliky majú tretinové rozmery ako pôvodný. No keďže už spomínaný odpor závisí lineárne od dĺžky drôtu, tak z toho sa nedozvieme nič iné, ako to, že aj odpor týchto drôtov bude tretinový. Túto úvahu, ktorú sme práve urobili, nazývame škálovanie. Teraz, keď vieme všetko potrebné, tak si vieme prekresliť jednu vetvu do takejto schémy:



Obr. 7: Jedna vetva vločky

To už iba zapíšeme do rovnice a vyjadríme R:

$$R = \frac{R}{3} + \frac{\frac{2}{3}R \cdot \frac{1}{3}\lambda a}{\frac{2}{3}R + \frac{1}{3}\lambda a} + \frac{R}{3}$$

$$R = \frac{1}{2}\lambda a$$

Teraz, keď poznáme odpor jednej vetvy, vypočítame si výsledný odpor $R_v = \frac{1}{3}\lambda a$ a máme hotovo.

Na záver by som rád poznamenal, že mnoho z vás sa tam snažilo nájsť nekonečné geometrické rady. Urobili ste výpočty pre prvé dve-tri iterácie, potom ste to tipli a vyšlo, že to konverguje k 0. Bohužiaľ vždy to bolo zle, pretože to nebude tvoriť pekný geometrický rad. Za takéto riešenia som nedával viac ako 4 body. Nabudúce si skúste správnosť vzorca overiť pre viac iterácií.