Fyzikálny korešpondenčný seminár
30. ročník, 2014/2015
FKS, KTFDF FMFI UK, Mlynská dolina, 84248 Bratislava
e-mail: otazky@fks.sk web: http://fks.sk

Vzorové riešenia 2. kola zimnej časti 2014/2015

2.1 B0 – Vodovodná (opravovala Denda)

Keď si Samo išiel umyť ruky po tom, čo sa chytal špinavých trubiek v MHD, zamyslel sa nad kúpeľňovým kohútikom v ich dome. Bola to taká tá klasická, v Európe štandardizovaná zmiešavacia vodovodná batéria, ktorá určuje pomer prítokov teplej a studenej vody podľa toho, ako veľmi ju určitým smerom natočíme. Predpokladajte, že množstvo vytekajúcej teplej aj studenej vody je priamo úmerné natočenému uhlu.

Obr. 1: Vodovodná batéria

O koľko stupňov a ktorým smerom musí Samo natočiť batériu a pustiť vodu tak, aby mala príjemnú teplotu $t = 30\,^{\circ}\mathrm{C}$?

Predpokladajte ideálne zmiešavanie studenej vody s teplotou $t_1 = 20\,^{\circ}\mathrm{C}$ a teplej vody s teplotou $t_2 = 60\,^{\circ}\mathrm{C}$. Batéria sa dá natočiť maximálne o 90° doľava (kedy tečie len teplá voda) alebo o 90° doprava (vtedy tečie len studená voda).

Prvá informácia, ktorá vás pri riešení mala zaujať, je, že množstvo teplej a studenej vody je priamo úmerné uhlu natočenia páky. Čo to znamená? No predsa, že:

$$k = A\alpha$$

$$l = A(180^{\circ} - \alpha)$$

Kde k je množstvo teplej vody, l množstvo studenej vody, α uhol (dohodnime sa, že $\alpha = 0^{\circ}$ vtedy, keď je batéria natočená úplne doprava – tečie iba studená voda) a A nejaká konštanta.

Ďakujeme sponzorom a podporovateľom seminára:

Tá konštanta A však nemôže byť ľubovoľná. My si ju určíme tak, že budeme uvažovať množstvo všetkej vytečenej vody rovné 1. Čo to znamená? Nič iné než to, že nás bude zaujímať iba pomer medzi teplou a studenou vodou. Takže $k+l=1$. Keď teda sčítame prvé dve rovnice, dostaneme $A = 1/180°$. Takže:

$$k = \frac{\alpha}{180°}$$
$$l = 1 - \frac{\alpha}{180°}$$

Teraz poznáme pomer vytekajúcej teplej a studenej vody. Ako z toho zistíme teplotu vody? Veľmi jednoducho. Buď si spomenieme na kalorimetrickú rovnicu, ktorá nám hovorí, že teplo prijaté je rovné teplu odovzdanému, alebo inak: teplo, ktoré odovzdá časť vody s $t = 60\,°\mathrm{C}$ je rovné teplu, ktoré prijme časť vody s $t = 20\,°\mathrm{C}$. Teda:

$$Q_k = Q_l$$
$$m_k c_{\mathrm{H_2O}}(\Delta t) = m_l c_{\mathrm{H_2O}}(\Delta t)$$
$$m_k(60\,°\mathrm{C} - t_\mathrm{v}) = m_l(t_\mathrm{v} - 20\,°\mathrm{C})$$

Hmotnosti, ktoré nám vystupujú v tejto rovnici, beztrestne nahradíme za množstvá k a l, pretože môžeme uvažovať, že voda má pri týchto teplotách rovnakú hustotu a táto rovnica musí naviac platiť v každom čase. To znamená, že nás naozaj bude zaujímať iba pomer teplej a studenej vody. Matematicky si to zapíšeme takto:

$$\frac{m_k}{m_l} = \frac{k}{l}$$

a keď ju teda dosadíme, dostaneme:

$$k(60\,°\mathrm{C} - t_\mathrm{v}) = l(t_\mathrm{v} - 20\,°\mathrm{C})$$

čo po úprave dá

$$k60\,°\mathrm{C} + l20\,°\mathrm{C} = (k+l)t_\mathrm{v} = t_\mathrm{v}\,,$$

na čo sme mohli prísť aj úvahou o tom, že z celkového počtu N molekúl má kN molekúl teplotu $60\,°\mathrm{C}$ a lN molekúl má teplotu $20\,°\mathrm{C}$. Keď spriemerujeme teplotu všetkých molekúl, musíme dostať predsa ich výslednú teplotu po zmiešaní. Na posledný vzťah sa teda môžeme pozerať aj ako na vážený aritmetický priemer teplôt.

Tak a teraz, keď si spomenieme na to, čo sme si napísali na začiatku, že $k = \alpha/180°$ a $k = 1 - l$, už nebude problém dostať závislosť uhlu od výslednej teploty:

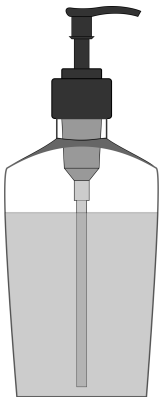
$$\alpha = \frac{9t_\mathrm{v} - 180}{2}$$

Z čoho jednoducho zistíme, že na to, aby Samo dosiahol požadovanú teplotu, musí kohútik natočiť o $\alpha = 45°$.

Poznámka: Tento príklad ste mohli pokojne riešiť aj trojčlenkou alebo tým, že si vyjadríte aká teplota pripadne na 1° otočenia. Je to síce jednoduchšie a kratšie, ale prišlo mi to menej fyzikálne :). Takže oceňujem, ak ste to riešili podobne, ako bol napísaný vzorák.

2.2 B1 – Vytláčač mydla (opravoval Filip, vzorák Helboj)

Keď si už Samo konečne namiešal vodu správnej teploty, chcel zničiť baktérie na svojich rukách tekutým mydlom. Rýchlym šmahnutím ruky tresol po hlave pumpičky,

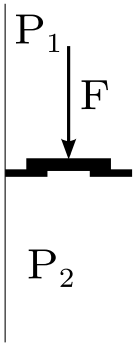


Obr. 2: Pumpička na tekuté mydlo

a mydlo vystreklo von. Popíšte uvedené zariadenie a vysvetlite, prečo je Samo vďaka nemu schopný dostať mydlo mimo nádobu.

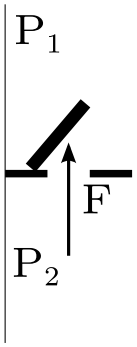
Na začiatok si povieme niečo o spätných ventiloch, ktoré hrajú v tejto úlohe veľkú rolu. Spätný ventil je šikovný výmysel, ktorý prepúšťa tekutinu iba jedným smerom. Jednoduchý model si môžeme predstaviť ako priepust s klapkou, ktorá sa môže pohybovať iba do jedného smeru. To, či je priepust otvorený alebo uzatvorený, závisí od toho, z ktorej strany pôsobí väčší tlak. Samozrejme práve rozdiel tlakov spôsobuje, že na klapku je výslednica síl nenulová a klapka je pritláčaná alebo odtláčaná k otvoru.

Ukážeme si to na príklade. Ak na klapku tlačí voda zhora, pritláča ju to na priepust, čím bráni toku vody.



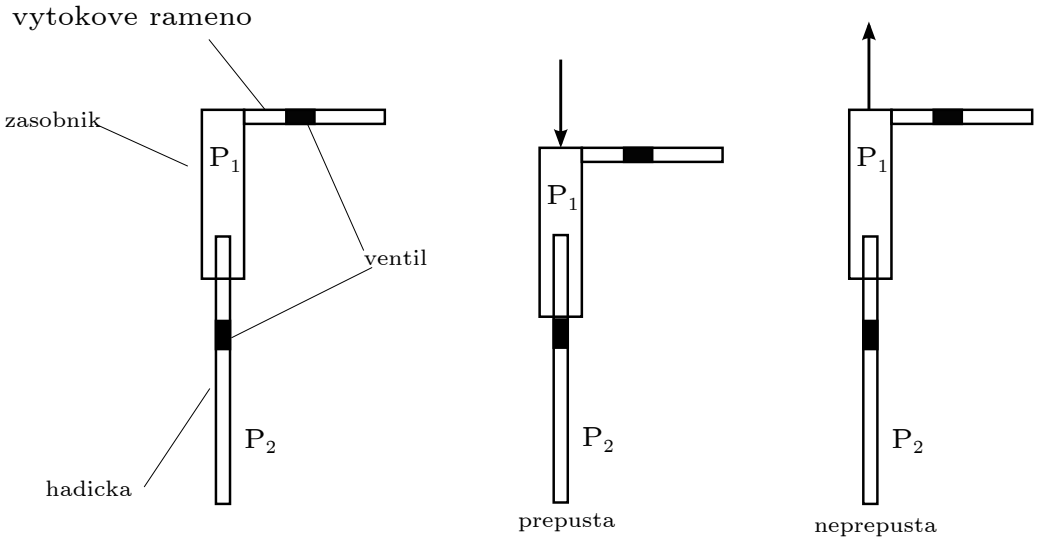
Obr. 3: Uzavretý priepust - voda tlačí zvrchu.

Zospodu to bude mať presne opačný efekt, tlak vody bude klapku odtláčať od otvoru.



Obr. 4: Otvorený priepust - voda tlačí zospodu.

Vďaka tomuto zázraku môže fungovať aj dávkovač mydla. V hadičke, ktorá je ponorená do tekutiny, je spätný ventil, ktorý prepúšťa mydlo len do prechodového zásobníka a vo výtokovom ramene je druhý spätný ventil, ktorý mydlo prepustí len v smere von.

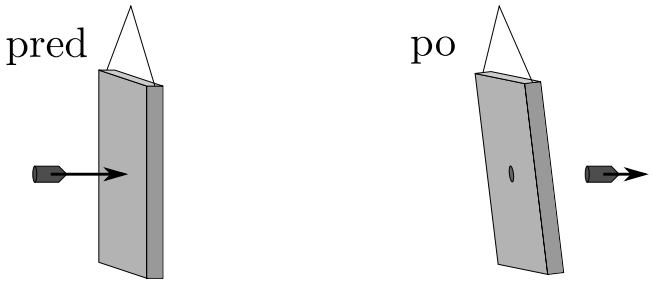


Obr. 5: Náčrt - ako funguje dávkovač mydla.

Keď stlačíme hlavicu mydelničky, zmenšíme objem prechodového zásobníka, čím zvýšime tlak. To spôsobí uzavretie spodného a otvorenie vrchného ventilu. A keďže je mydlo takmer nestlačiteľné, objem zásobníka je zmenšený a navyše je naň vyvíjaný tlak, nezostáva mu nič iné ako vyjsť jediným možným priechodom. Keď všetko prebytočné mydlo takto vyjde von, tlak v zásobníku sa pekne vyrovná s tlakom okolia. Akonáhle však hlavicu pustíme, pružinka ju opäť zdvihne. To znamená, že zásobník začne zväčšovať svoj objem a bude tam vznikať podtlak. Vďaka tomu bude teraz dolný ventil otvorený a vrchný uzavretý. To nebude viesť k ničomu inému, ako je nasávanie mydla cez hadičku do zásobníka. V tomto bode sa dostávame znova do začiatočnej polohy a celý cyklus sa môže opakovať.

2.3 B2 – Nabitá doska (opravoval Vladko)

Veľkolepá súťaž NÁBOJ sa blíži a treba byť dobre pripravený. Nechajme teda jeden náboj letieť rýchlosťou $v_1 = 400\,\mathrm{m/s}$ smerom kolmo na zavesenú drevenú dosku. Náboj dosku prestrelí a pokračuje ďalej vo svojom pôvodnom smere s o niečo menšou rýchlosťou $v_2 = 100\,\mathrm{m/s}$. Doska sa samozrejme v dôsledku mierne vychýli, pozri obrázok. Koľko energie sa stratí na deformáciu a teplo počas samotného priestrelu? Predpokladajte hmotnosť náboja $m = 8\,\mathrm{g}$ a dosky $M = 2\,\mathrm{kg}$.



Obr. 6: Prestrelenie dosky

Poďme najprv z dynamického hľadiska analyzovať sústavu pred stretom. Máme sústavu pohybujúceho sa náboja a dosky, ktorá je voľne zavesená, teda jej kinetická energia aj hybnosť je nulová. Náboj sa pohybuje konštantnou rýchlosťou v_1 k doske, teda má kinetickú energiu E_0 a hybnosť p_0. Počas zrážky bude mať časť kinetickej energie náboja deštrukčné účinky a vytvorí dieru v doske, ďalšia časť energie sa uvoľní vo forme tepla, lebo okraje náboja sa trú o okraje diery, a takisto časť energie spôsobí deštrukciu (deformáciu) náboja. Toto je tá „stratená“ energia, ktorú potrebujeme zistiť, označme si ju ako E_s. Avšak iná časť energie náboja sa odovzdá doske (označíme si ju E_d), ktorej bude udelená rýchlosť v_d. A nakoniec, časť energie označenú ako E_n si ponechá náboj pohybujúci sa ďalej rýchlosťou v_2.

V momente priestrelu doska stále stojí na svojom pôvodnom mieste a až následne sa bude vychyľovať, teda jej prijatá kinetická energia sa bude premieňať na potenciálnu a doska so spomalením bude stúpať. Smer sily, ktorá spôsobuje spomalenie, má opačnú orientáciu ako smer rýchlosti. Naviac veľkosť tejto sily závisí od výchylky – doska teda bude vykonávať kmitavý pohyb.

Nás však zmeny potenciálnej energie nezaujímajú, pretože sledujeme situácie tesne pred a po priestrele, medzi ktorými sa doska ešte nestihla pohnúť. Okrem toho si môžme stanoviť, že doska v tejto polohe má nulovú potenciálnu energiu. Takže celková mechanická energia sústavy pred priestrelom je len kinetická energia náboja pred zrážkou. Po priestrele sa energia rozloží na E_s, E_d a E_n. Vďaka zákonu zachovania energie môžeme tento poznatok zapísať do rovnice:

$$E_0 = E_\mathrm{s} + E_\mathrm{d} + E_\mathrm{n}$$

$$\frac{1}{2}mv_1^2 = E_\mathrm{s} + \frac{1}{2}Mv_d^2 + \frac{1}{2}mv_2^2$$

Našu sústavu považujeme za uzatvorenú, lebo v momente priestrelu na ňu nepôsobia žiadne vonkajšie sily. Pre takéto sústavy platí, že celková zmena hybnosti je nulová. Pred zrážkou bola hybnosť celej sústavy totožná s hybnosťou náboja. Po zrážke je hybnosť sústavy rozdelená

medzi hybnosť náboja s rýchlosťou v_2 a dosky s rýchlosťou v_d, teda môžeme zapísať nasledovné rovnice:

$$p_0 = p_d + p_n$$
$$mv_1 = Mv_\mathrm{d} + mv_2$$

Ako vidíme, dostali sme dve rovnice s dvomi neznámymi v_d a E_s. Tým pádom nám nemôže robiť problém si hľadanú energiu E_s vyjadriť a následne dosadiť príslušné hodnoty zo zadania:

$$mv_1 = Mv_\mathrm{d} + mv_2\,, \qquad \Rightarrow \qquad v_\mathrm{d} = \frac{m(v_1 - v_2)}{M}$$

$$E_\mathrm{s} = \frac{1}{2}mv_1^2 - \frac{1}{2}Mv_d^2 - \frac{1}{2}mv_2^2\frac{1}{2}m(v_1^2 - \frac{m}{M}(v_1 - v_2)^2 - v_2^2) \doteq 599\,\mathrm{J}$$

Vypočítali sme, že počas zrážky sa približne 599 J premení na iné formy energie ako mechanické.

2.4 B3/A1 Nabitý balón (opravovala Katka, vzorák Duško)

Keď Juraj konečne dokončil experimentálku z predošlej série, kde elektrostaticky pricapil balón ku stropu, tak si povedal, že mu to nestačí. Urobil ďalší experiment, kde sa mu podarilo zistiť približnú hodnotu náboja, ktorý sa nachádzal na zelektrizovanom balóne.

Vykonajte (a zdokumentujte) tento experiment aj vy a zistite, na koľko coulombov viete nabiť svoj balón!

Prvá vec, ktorá nám môže napadnúť po prečítaní zadania je, či nemôžeme použiť výsledky experimentálky z minulej série. Silu máme nameranú, a z Coulombovho zákona už ten náboj jednoducho dopočítame. Svet by bol veľmi pekný, ak by to platilo, poďme sa teda pozrieť, čo iné na vyjadrenie náboja balóna potrebujeme. Pre veľkosť Coulombovej elektrostatickej sily platí:

$$|F| = |q_\mathrm{b}E|$$

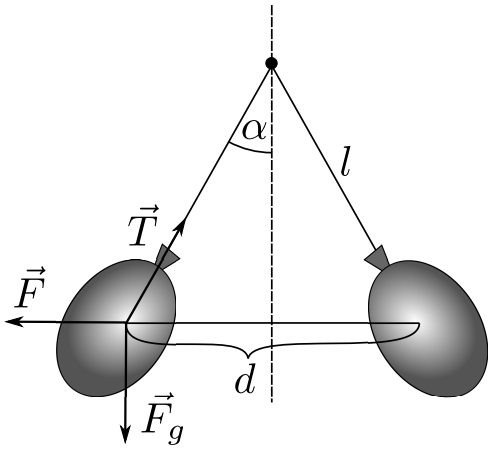
kde q_b predstavuje náboj na balóne a E je elektrická intenzita od telesa, ku ktorému sa balón priťahuje alebo odpudzuje. Balón, ktorý má približne guľový tvar a rovnomerne rozmiestnený náboj po svojom povrchu, vieme vo výpočtoch zameniť za bodový náboj s rovnakou hodnotou q_b, ktorý by sa nachádzal v strede balóna.[1] Problém však nastáva práve v elektrickej intenzite E. Tú nevieme určiť, lebo nepoznáme rozmiestnenie náboja v stene.

Dobrý nápad je vyriešiť to tak, že vezmeme dva rovnaké balóny. Ak budeme predpokladať, že ich nabijeme rovnako, a oba budeme považovať za bodové náboje (tak ako predtým), tak po vyjadrení elektrickej intenzity od bodového náboja dostaneme pre silu známy vzťah:

$$|F| = \left|\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_b^2}{r^2}\right|$$

kde r predstavuje vzdialenosť bodových nábojov. Tentokrát budeme elektrostatickú silu opäť porovnávať s gravitačnou, ale trošku inak. Zavesíme 2 nabité balóny na šnúrky dĺžky l, a budeme pozorovať, ako ďaleko od seba sa balóny ustália.

[1] Pre tých šikovnejších, ktorých zaujíma prečo to tak je, si to môžu skúsiť odvodiť z Gaussovho zákona.



Obr. 7: Zavesenie balónov

Obr. 8: Foto balónov

Keďže na každý jeden balón pôsobia 3 sily, elektrostatická, gravitačná a ťahová sila šnúrky, z ich rovnováhy už vieme jednoducho určiť veľkosť elektrostatickej sily a náboja ako:

$$F = F_g \tan\alpha \qquad \Rightarrow \qquad q_\mathrm{b} = \sqrt{4\pi\varepsilon_0\ F_g \tan\alpha}\ 2(l+R)\sin\alpha$$

pričom ε_0 je konštanta (volá sa permitivita vákua), R je polomer balóna a α je uhol medzi šnúrkou a zvislicou.

Teraz už vieme, čo všetko potrebujeme, takže môžeme merať. My sme urobili experiment pre balóny s hmotnosťou $m = 3{,}1\,\mathrm{g}$ a polomerom $R = 12\,\mathrm{cm}$. Zavesili sme ich na lanko dĺžky $l = 50\,\mathrm{cm}$. Jediné, čo bolo treba merať, je uhol α, pričom pri každom z 10 pokusov sme balóny zelektrizovali nanovo.

Meranie	Uhol /°	Náboj /nC
1	12	218
2	11	192
3	12	218
4	10	166
5	15	306
6	12	218
7	12	218
8	13	246
9	11	192
10	11	192

V priemernom prípade sme teda dostali uhol $\overline{\alpha} = 11{,}9\,^\circ$ a náboj $\overline{q_\mathrm{b}} = 216\,\mathrm{nC}$. Opäť je však dôležité zistiť, s akou nepresnosťou sme určili náš výsledok. Môžeme použiť klasicky štandardnú odchýlku, avšak ak chceme byť presnejší, využijeme vzorec, ktorý zohľadňuje to, či je závislosť f na meraných veličinách a, b, atď. lineárna, kvadratická, alebo dokonca sínusová a akákoľvek iná. Vyzerá takto:

$$\delta f = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial a}\right)^2 \delta a^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial b}\right)^2 \delta b^2 + \ldots}$$

Samozrejme, toto sme od vás úplne nevyžadovali, avšak je dobré si na to zvyknúť. My sme takto dostali pre náboj výsledok $\overline{q_\mathrm{b}} = (216 \pm 12)\,\mathrm{nC}$, čo zodpovedá približne $1{,}35 \cdot 10^{12}$ elektrónov.

Zostáva posledná otázka, a to zamyslieť sa nad tým, čo spôsobilo chyby v našom meraní. V prvom rade je to nepresnosť našich meracích prístojov, ktorá tu bude vždy. V druhom rade to je naozaj to, že nevieme nabiť balón vždy rovnako.

Pokračujte v experimentovaní, neublíži vám to :)

2.5 B4/A2 – Prší, prší, len sa leje... (opravoval Kubo)

Predstavte si, že stojíte vonku, do dverí domu to máte už len D metrov a tu zrazu začne hrozne pršať. Zo skúsenosti viete, že rýchlosť dažďa je v a že v rôznych fyzikálnych modeloch môžete človeka aproximovať kvádrom s hornou plochou o veľkosti S a bočnými plochami o veľkostiach $4S$. Akou rýchlosťou u musíte začať utekať domov, aby ste zmokli čo najmenej? Úlohu riešte pre viaceré situácie, kedy:

a) Nefúka a teda dážď dopadá priamo zhora.

b) Fúka protivietor a dážď teda padá pod uhlom α (meraného od zeme).

c) Fúka bočný vietor a dážď teda padá pod uhlom α.

d) Fúka zozadu a dážď teda padá pod uhlom α.

e) Neprší.

V prvom rade si zvoľme testovaciu figurínu, ktorá vyhovuje zadaniu. Napríklad takého Kuba. To znamená, že Kubo je dokonalý kváder s plochou podstáv S a plochami stien $4S$. Domov sa chce dostať čo najmenej mokrý, takže našou úlohou bude zistiť, akými rýchlosťami sa má v daných poveternostno-daždivých podmienkach pohybovať, aby toho dažďa naňho spadlo čo najmenej. Ak predpokladáme jeho rovnomerný priamočiary pohyb, tak zaručene platí, že sa domov dostane za čas

$$t = \frac{D}{u}\,,$$

To, ako veľmi počas toho zmokol, budeme určovať z množstva (objemu) vody, ktoré dopadlo na všetky jeho plochy. Ak si navyše mokrosť označíme ako $\mathcal{M}$, tak:

$$\mathcal{M}(\text{mokrosť}) \sim V = (\text{rýchlosť dažďa}) \times (\text{plocha, na ktorú padá}) \times (\text{ako dlho prší})\,,$$

pričom v rovnici započítavame iba kolmú zložku dažďa, ktorá dopadá na danú plochu. To znamená, že pri šikmom daždi sa nám v riešení objaví niektorá goniometrická funkcia, ale radšej ešte nepredbiehajme.

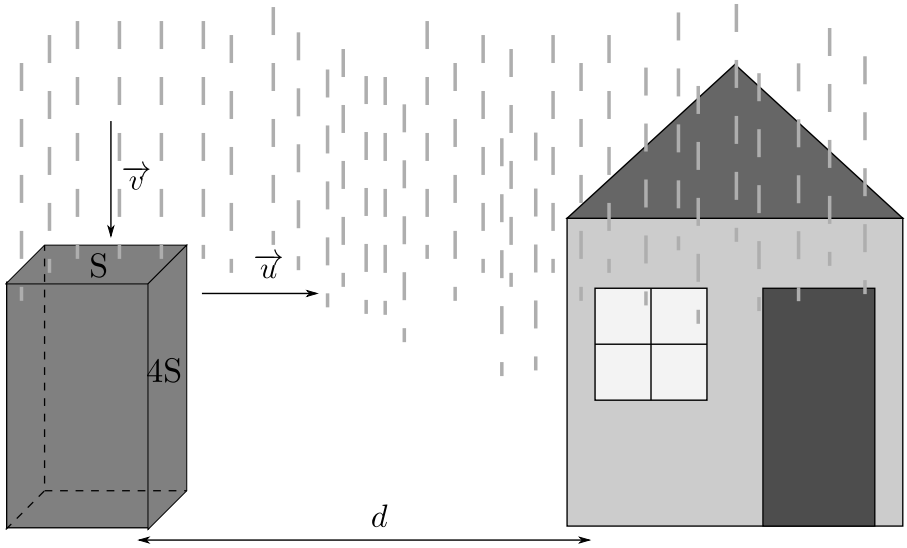
Postupne rozoberieme všetkých 5 prípadov:

a) *Prší priamo zhora:*

V prvom prípade je dosť evidentné, že Kubovi prší na hlavu (hornú podstavu kvádra) a že čím dlhšie sa nachádza v daždi, tým je mokrejší. Čo už možno také evidentné nie je, je to, že akonáhle sa začne pohybovať akoukoľvek rýchlosťou u smerom k domu, tak v sústave spojenej s ním už dážď nepadá priamo nadol, ale šikmo proti nemu! To znamená, že do celkovej mokrosti musíme započítať aj to, koľko dažďa naberie počas behu prednou

stenou (zvyšné steny zostanú v ideálnom svete suché). Kombináciou dvoch vzťahov vyššie dostávame:

$$\mathcal{M} = \text{vrchná podstava} + \text{predná stena} = vSt + 4uSt = DS\frac{v}{u} + 4DS\,,$$



Obr. 9: Prší priamo zhora.

Keďže to, čo nás zaujíma, je najmenšia hodnota mokrosti, tak okamžite vidíme, že pri veľkých rýchlostiach zaniká celý prvý člen výsledku. Ten druhý tam ostane vždy, pretože nech by sa Kubo pohyboval akoukoľvek rýchlosťou, tak prednou stenou naberie vždy rovnaké množstvo vody (premyslite si!).

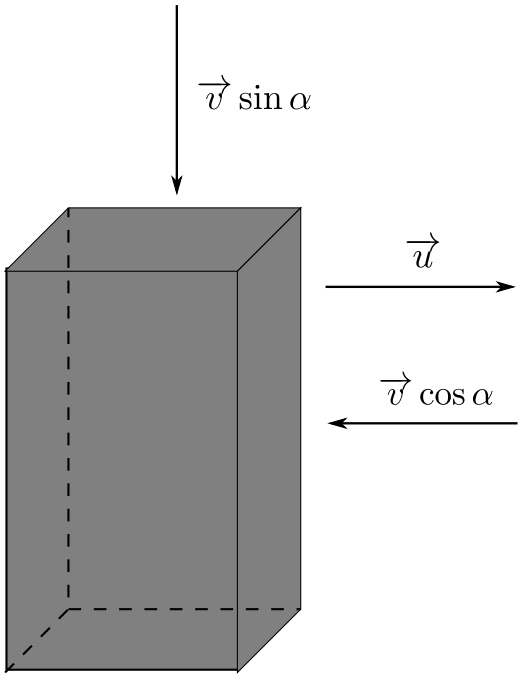
$$u \to \infty \qquad\qquad \mathcal{M} \to 4DS$$

Najvýhodnejšie je teda utekať čo najrýchlejšie.

b) *Prší spredu pod uhlom α:*

V druhom prípade už musíme vektor rýchlosti dažďa rozdeliť do dvoch častí. Vertikálna dopadá na vrchnú podstavu a horizontálna na prednú. Keď sa na situáciu opäť pozrieme zo sústavy spojenej s Kubom, tak sa voči horizontálnej časti dopadajúceho dažďa pohybuje rýchlosťou $v\cos(\alpha) + u$. Samotné zmoknutie teda môžeme vypočítať opäť ako súčet mokrosti hornej a prednej steny:

$$\mathcal{M} = v\sin(\alpha)St + 4\big(v\cos(\alpha) + u\big)St = 4DS + DS\frac{v\sin(\alpha)}{u} + 4DS\frac{v\cos(\alpha)}{u}$$



Obr. 10: Rýchlosti padajúceho dažďa (časti, ktoré nás zaujímajú) a rýchlosť utekajúceho kvádro-Kuba.

Opäť vidíme, že najmenšiu hodnotu mokrosti dosiahneme tým, že Kubo sa bude snažiť bežať čo najrýchlejšie. Ideálne, keď bude bežať veeeľmi rýchlo:

$$u \to \infty \qquad\qquad \mathcal{M} \to 4DS\,,$$

Teda v limitnom prípade dosiahne celková minimálna mokrosť rovnakú hodnotu, ako keď nefúka.

c) *Prší zboku pod uhlom α:*

V treťom prípade rozkladáme vektor rýchlosti dažďa úplne obdobným spôsobom. Rozdiel je len v dvoch veciach. Za prvé, horizontálna zložka sa nespočítava s rýchlosťou Kubovho behu, pretože prší zboku a teda sú na seba kolmé (neovplyvňujú sa). A za druhé, v sústave spojenej s Kubom naňho prší aj spredu (z rovnakých dôvodov ako v predošlých prípadoch). Na Kuba teda prší celkovo z troch strán - zhora, zboku a spredu. Vzťah pre mokrosť vyzerá v konečnom dôsledku úplne rovnako:

$$\mathcal{M} = v\sin(\alpha)St + 4v\cos\alpha St + 4uSt = 4DS + DS\frac{v\sin(\alpha)}{u} + 4DS\frac{v\cos(\alpha)}{u}$$

Rovnaká rovnica dáva rovnaký výsledok:

$$u \to \infty \qquad\qquad \mathcal{M} \to 4DS\,,$$

Kubo teda musí opäť utekať čo najrýchlejšie.

d) *Prší zozadu pod uhlom α:*

V štvrtom prípade si napíšeme veľmi podobný vzťah ako v prípade druhom, ale opäť s dvomi rozdielmi. Prvý je v tom, že rýchlosti skladáme naopak. To znamená, že ich nesčítavame, ale odčítavame. Druhý rozdiel vyplýva priamo z prvého: keďže ešte nevieme, či je výhodnejšie sa pohybovať rýchlejšie alebo pomalšie ako horizonátálna časť vetra, musíme spomínaný rozdiel rýchlostí zapísať do absolútnej hodnoty. Vzniká nám teda niečo takéto:

$$\mathcal{M} = v\sin(\alpha)St + 4\big|u - v\cos(\alpha)\big|St = DS\frac{v\sin(\alpha)}{u} + 4DS\Big|1 - \frac{v\cos(\alpha)}{u}\Big|$$

Aby sme omylom nevynechali žiadne riešenie, ktoré môže vyplývať z nejakých podmienok pre uhol α, o ktorých ale zatiaľ nevieme, rozoberieme postupne prípady, kedy výraz v absolútnej hodnote naberá kladnú, nulovú a zápornú hodnotu. Všetky tri zanalyzujeme a vyberieme to najlepšie riešenie (t.j. také, kedy je Kubo najmenej zmoknutý):

- $u < v\cos(\alpha)$

  Keďže pri takejto podmienke je argument absolútnej hodnoty záporný, tak len jednoducho zameníme členy a zmažeme zátvorky:

  $$\mathcal{M} = DS\frac{v\sin(\alpha)}{u} + 4DS\frac{v\cos(\alpha)}{u} - 4DS$$

  Tu je evidentné, že najmenšiu hodnotu zmoknutia dostávame vtedy, keď sa budeme snažiť maximalizovať rýchlosť. Ale pozor! Už v nadpise podmienky vidíme ostré horné ohraničenie rýchlosti. Keď teda u limitne priblížime k $v\cos(\alpha)$:

  $$\lim_{u \to v\cos(\alpha)} \mathcal{M} = DS\frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} + 4DS - 4DS$$

  Čiže po rýchlej úprave zisťujeme:

  $$u \to v\cos(\alpha) \qquad\qquad \mathcal{M} \to DS\tan(\alpha)\,,$$

- $u = v\cos(\alpha)$

  Obsah absolútnej hodnoty je nulový, takže výsledok dostávame okamžite:

  $$\mathcal{M} = DS\tan(\alpha)$$

- $u > v\cos(\alpha)$

  S takouto podmienkou je výraz v absolútnej hodnote určite kladný, takže vo vzťahu stačí iba zameniť rovné zátvorky za okrúhle :

  $$\mathcal{M} = DS\frac{v\sin(\alpha)}{u} + 4DS\Big(1 - \frac{v\cos(\alpha)}{u}\Big) = 4DS + DSv\frac{\sin(\alpha) - 4\cos(\alpha)}{u}$$

Tu si teraz treba dať pozor. V čitateli zlomku sa vyskytol výraz závisiaci iba od uhla α a navyše pri určitej hodnote α môže byť nulový. Konkrétne, keď $\sin(\alpha) = 4\cos(\alpha)$ tzn. $\tan(\alpha) = 4$, čiže keď $\alpha = 76°$, tak celková mokrosť nadobúda hodnotu $4DS$, pričom **nezávisí od Kubovej rýchlosti!**

A čo keď je ten uhol väčší ako 76° alebo menší? Nuž, keď je väčší, tak má zlomok vždy kladnú hodnotu a teda sa snažíme rýchlosť zvoliť tak, aby sme zlomok minimalizovali. Keďže je rýchlosť v menovateli, tak sa ju snažíme **maximalizovať** (ideálne do nekonečna), aby nám vo výraze ostal iba prvý člen $4DS$.

$$\alpha > 76° \qquad u \to \infty \qquad \mathcal{M} \to 4DS$$

V opačnom prípade, keď je $\alpha < 76°$, tak má zlomok zápornú hodnotu, takže tu chceme rýchlosť naopak **minimalizovať**, aby celková mokrosť $\mathcal{M}$ nadobudla čo najmenšiu hodnotu. Keď si ešte spomenieme na podmienku v nadpise (že rýchlosť nemôžeme minimalizovať do nuly), tak dostávame:

$$\alpha < 76° \qquad u \to v\cos\alpha \qquad \mathcal{M} \to DS\tan\alpha$$

K čomu sme teda nakoniec dospeli? Keď si dáme trochu dokopy tú masu podmienok, ktoré sme vyššie všetky pekne popísali, tak nám z toho vychádza, že by sa pred dažďom malo utekať rýchlosťou, ktorú si však volíme podľa toho, pod akým uhlom prší. Ak pre uhol platí $\alpha \geq 76°$, tak utekáme ako o život. Ak je však menší, oplatí sa nám už viac utekať *zarovno s vetrom* - t.j. utekať tak, aby sme nenaberali vodu zozadu ani spredu.

e) *Neprší:*

Kubo nemusí utekať domov a môže si vonku hádzať frisbee :-)

Celkový záver: Každý kvádroidný človek $S \times 4S \times 4S$ by mal pred dažďom utekať domov čo najrýchlejšie... ibažeby nastal prípad:

- Prší zozadu pod uhlom menším ako 76° voči zemi. Vtedy sa musí utekať rýchlosťou **presne** $v\cos(\alpha)$, pretože iba vtedy dosiahne celková mokrosť $\mathcal{M}$ najmenšiu hodnotu, a to:

$$\mathcal{M} = DS\tan\alpha\,,$$

Za čo sa dalo získať všetkých 9 bodov? Plný počet bodov sa dal získať iba v tom prípade, ak sa vám podarilo odhaliť kúzlo uhla $\alpha = 76°$ pri pršaní zozadu s korektnou analýzou všetkých situácií.

2.6 A3 – Opité molekuly (opravoval Paťo)

Dušan opäť upratoval šopu a tentoraz našiel veľmi dlhú dutú trubicu. Neváhal a jej stred si označil ako bod 0, do ktorého následne položil N molekúl. V dôsledku náhodných zrážok sa každá molekula pohla

každú desatinu sekundy náhodne o 1 cm buď doľava alebo doprava. Dušan teda mohol sledovať krásne vyzerajúcu distribúciu.

Postupne pre počty $N = \{10, 100, 1000\}$ molekúl nasimulujte ich pohyb v tabuľkovom kalkulátore alebo niektorom programovacom jazyku. To znamená, že vašou úlohou je:

- Vykresliť histogram polôh častíc pre jednotlivé časy $t = \{1, 10, 100\}$ sekúnd.

  Akú očakávate strednú hodnotu vzdialenosti molekuly od počiatku? Očakávate viac molekúl s kladnou hodnotou vzdialenosti alebo so zápornou hodnotou vzdialenosti? Zodpovedajú histogramy vašim očakávaniam?

- Určiť strednú hodnotu druhej mocniny vzdialenosti molekúl od počiatku a skúsiť odhadnúť, o akú funkciu časového priebehu ide.

  Tento výpočet urobte po všetkých troch časoch so všetkými troma počtami molekúl a výsledky zapíšte do tabuľky. V ktorom prípade sa váš odhad najviac priblížil získanej hodnote?

Pri všetkých výpočtoch považujte súradnice vľavo od bodu 0 za záporné a vpravo za kladné. Molekuly na seba nepôsobia žiadnymi silami a žiadne iné vonkajšie vplyvy neexistujú.

Autor tohto vzoráku nie je žiaden veľký programátor.[2] Preto si pohyb molekúl nasimulujeme v obľúbenom tabuľkovom kalkulátore.

Simulácia Do políčok `A1` až `ALM1` vpíšeme postupne čísla 0 až 1 000. Tie nám budú pekne číslovať jednotlivé molekuly, stĺpec s nulou nám bude označovať čas. O riadok nižšie vpíšeme pod každé číslo nulu. Prvá nula znamená čas 0 s, zvyšná tisícka núl značí počiatočnú polohu (0 cm) tisícky molekúl. Ďalej do políčok `A3` až `A1002` vpíšeme postupne sa zvyšujúci čas od 0,1 s až 100,0 s s krokom 0,1 s. Tým máme nachystané polia, vďaka ktorým sa budeme v tabuľke vedieť orientovať.

Teraz musíme vymyslieť spôsob, ako simulovať náhodný pohyb molekúl. Pretože vygenerovať niečo náhodné nie je vôbec jednoduché. Počítač to dokonca ani nedokáže – vie generovať len kvázináhodné čísla, teda takú postupnosť, ktorá má vlastnosti blízke úplnej náhode.[3] Nám samozrejme tento generátor bohate stačí. A potrebujeme od neho, aby v čase t (teda na nejakom riadku) generoval pre každú molekulu jedno z dvoch čísel: $+1$ pre pohyb doprava a -1 pre pohyb doľava. Tieto čísla potom pričítame k polohám molekúl v čase $t - 0{,}1$ s, čím dostaneme aktuálne polohy. Jedna z možností, ako toto technicky docieliť, je použiť nasledovnú funkciu (konkrétne značenie buniek v nasledujúcom vzorci platí pre vzorec, ktorý umiestnime do bunky `B3`)

```
= IF ( RAND() &> 0.5, B2 + 1, B2 - 1)
```

Funkcia najskôr pomocou `RAND()` vygeneruje náhodné číslo medzi 0 a 1. Číslo väčšie ako 0,5 sa interpretuje ako pohyb doprava a k bunke `B2` (bunka o jeden riadok vyššie) pričíta jednotku. Analogicky číslo menšie ako 0,5 znamená pohyb doľava a odčítanie jednotky. Logickú operáciu menší / väčší uskutočňuje funckia `IF` v prítomnosti znaku `&`.

Ak vzorec natiahneme cez všetkých 1 000 × 1 000 políčok, mali by sme v stĺpcoch dostať časové priebehy polôh všetkých Dušanových molekúl. Nezľaknite sa, tento výpočet vie trvať pomerne dlho.

[2] Po prečítaní tejto vety by ste mali pochopiť, že Excel alebo Calc má byť už dávno otvorený.

[3] Na vedecké účely sa preto používajú fyzikálne generátory „skutočne“ náhodných čísel, ktoré sú založené najčastejšie na rozpade nejakého rádioaktívneho prvku.

V druhej časti zadania chceme aj druhé mocniny týchto polôh, preto si ich rovno vypočítame. Na druhej karte (`Sheet2`) stačí zadať do políčka `B1` funkciu

```
= !Sheet1.B1^2
```

ktorá sa pozrie, aké číslo je v karte `Sheet1` na pozícii `B1` a zapíše si jeho druhú mocninu.[4] Ak vzorec potiahneme až k bunke `ALM1002`, dostaneme tabuľku s druhými mocninami. Hotovo!

Spracovanie dát Histogram je vzácny prípad použitia stĺpcového grafu vo fyzike. Na vodorovnú os vynášame hodnoty, ktorých frekvencia výskytu určuje výšku jednotlivých stĺpcov. Frekvenciu výskytu musíme najskôr nájsť, a to rovno deväťkrát (pre 3 rôzne časy a 3 rôzne počty molekúl). Počet výskytov hľadá táto funkcia:

```
= COUNTIF($B$102:$ALM$102; „="! & A1005)
```

Funkcia `COUNTIF` vyberá z rozsahu buniek `B102` až `ALM102` (teda z polôh 1 000 molekúl v čase 10 s) a spočíta nám, koľko krát sa hodnota bunky rovnala hodnote bunky `A1005`.[5] Ak túto funkciu zapíšeme do bunky `B1005`, dostaneme prvú dvojicu dát do histogramu. Do buniek `A1006` a nižšie môžeme napísať ďalšie hodnoty polôh, ktorých výskyt chceme spočítať, funkciu z bunky `B1005` pritom stačí len „ťahať“. Zmene rozsahu pri ťahaní zabraňujú znaky `$` v predpise funkcie pred súradnicou, ktorá sa nemá meniť.

Tým by sme mali mať pripravené dáta pre prvý histogram. Veríme, že vykresliť tieto dáta do grafu zvládnete aj sami. A rovno všetkých 9 grafov.

Vidíme (viď Obr.11), že štatistika sa s desiatimi molekulami (posledný riadok) robiť nedá. Už po 1 s (prvý stĺpec) nevidíme žiadne jasné rozdelenie polôh. To sa samozrejme s časom ešte zhoršuje. V čase 100 s má každá z molekúl inú polohu a o štatistike sa nedá hovoriť.

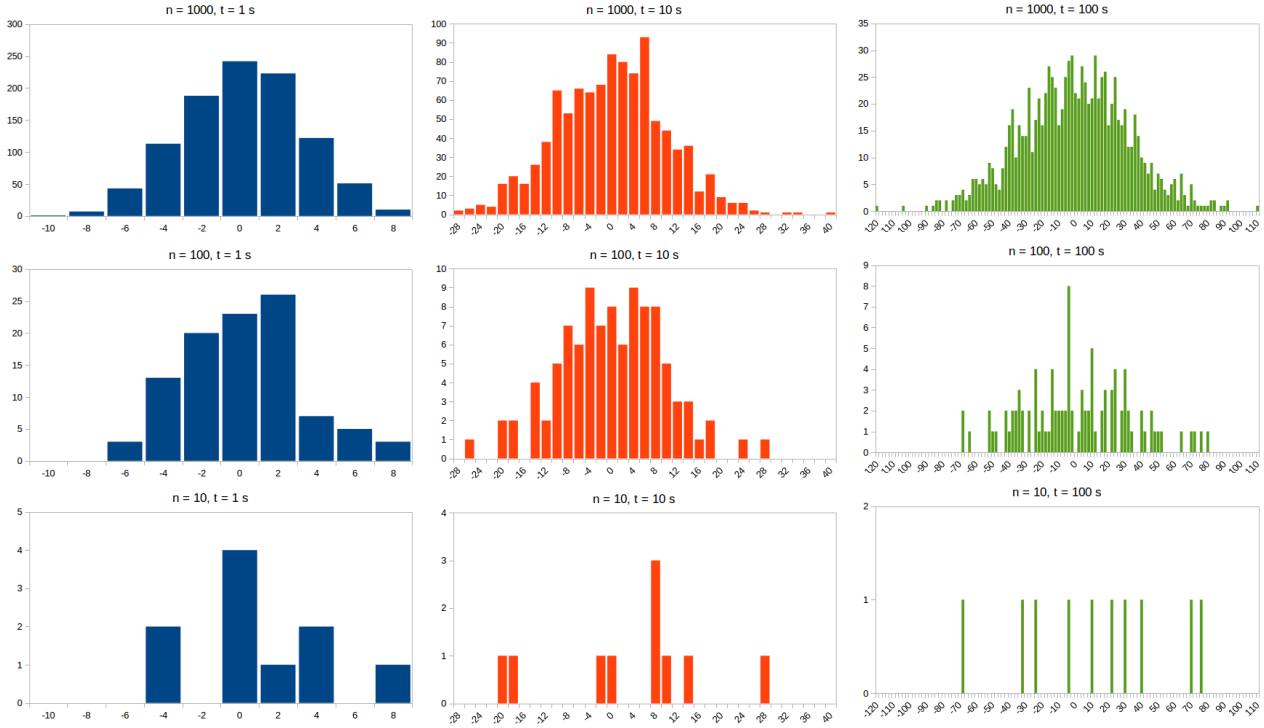
Ak v súgrafí stúpame k vyšším počtom sledovaných molekúl (po riadkoch hore), vidíme, že histogramy dostávajú homogénnejší nádych. Vidíme, že rozdelenia polôh sú symetrické okolo bodu 0. To je niečo, čo sme mohli intuitívne tušiť. Pri opakovanom náhodnom generovaní $+1$ a -1 padajú obe čísla približne rovnako, a preto najviac molekúl zostane na svojom pôvodnom mieste.

Samozrejme, pre niektoré molekuly sa stane, že im bude súdené pohybovať sa doprava (teda bude im padať viac kladných posunutí, ako záporných). Časom sa teda budú niektoré šťastné molekuly vzďalovať čoraz viac od počiatku súradníc. To vidíme, ak sa v súgrafí pohybuje k väčším časom (po stĺpcoch doprava). Histogramy majú opäť dve intuitívne vlastnosti: čím ďalej od počiatku, tým je menej molekúl (prvá vlastnosť) a koľko molekúl išlo doprava, toľko išlo aj doľava, tj. symetria histogramov (druhá vlastnosť).

Na to, aby sme vyhladili „kostrbatosť“ histogramov, museli by sme použiť väčšie množstvo molekúl a väčšie časy. Hrozí nám ale, že po nejakom dlhom čase nám molekuly utečú ďaleko od počiatku a distribúcia sa nám „roztečie“.

[4] V Calcu sa syntax líši od Excelu v tom, že na začiatku nepotrebuje výkričník.

[5] V Calcu je syntax o kúsok jednoduchšia: `= COUNTIF($B$102:$ALM$102; A1005)`.



Obr. 11: Histogramy pre rôzne časy a počty molekúl. V riadkoch sú postupne grafy pre 1 000, 100 a 10 molekúl. V stĺpcoch sú grafy pre stavy po 1 s, 10 s a 100 s.

Stredná kvadratická vzdialenosť Jednotlivé druhé mocniny vzdialeností máme spočítané v karte `Sheet2`. Priemery buniek vypočítame pomocou funkcie `AVERAGE`. Ak chceme zistiť priemernú kvadratickú vzdialenosť pre 1 000 molekúl a čas 100 s, do nejakej bunky v `Sheet2` napíšeme

```
= AVERAGE(B1002 : ALM1002)
```

Pomocou tejto funkcie doplníme tabuľku s výsledkami pre rôzne časy a počty molekúl. Údaje v tabuľke sú v cm^2:

	10 molekúl	100 molekúl	1000 molekúl
1 s	3,20	9,52	9,97
10 s	124,4	72,2	99,6
100 s	880	957	1 070

Čísla v tabuľke vyzerajú (najmä pre stĺpec hodnôt pre 10 molekúl len s prižmúrenými očami), že desaťnásobné zvýšenie času vedie približne na desaťnásobné zvýšenie priemernej kvadratickej vzdialenosti, pričom zjavnejšie je toto pravidlo pre väčší počet molekúl. To znamená, že závislosť kvadratickej vzdialenosti na čase je pre štatisticky veľké dáta *lineárna*. Ak neveríte, vypočítajte priemery pre 1 000 molekúl v rôznych časoch a všetky časy a čísla vykreslite v grafe.

Zaujímavé je, že z modelu úplne náhodného pohybu sme dostali systém, ktorý sa na veľkých mierkach správa organizovane. Medzi fyzikmi tento model voláme „opitý námorník“ a dokonca

sa lineárna závislosť dá odvodiť matematicky. Podobné náhodné modely využívame napríklad pri štúdiu difúzie, kde generovanie kladných a záporných posunutí nahrádza náhodné zrážky medzi molekulami vody a pozorovanými časticami.

2.7 A4 – Mravenisko (opravoval Maťo)

Keď Enka na svojej záhradke už po tretíkrát našla mravenisko, povedala si, že tentoraz s nimi riadne zatočí. A to doslova.

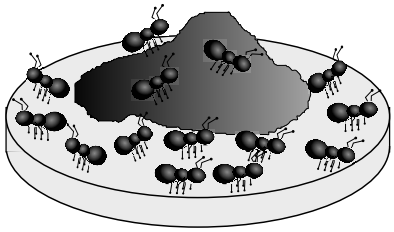
Celé mravenisko položila na stred veľkého diskového kolotoča a roztočila ho na uhlovú rýchlosť ω. Mravce postrehli náhle fyzikálne zmeny, tak začali z mraveniska utekať von. Vyliezalo ich približne n za sekundu rýchlosťou v v radiálnom smere. Keďže koeficient trenia medzi ich nožičkami a kolotočom bol f, tak sa dokonca mohlo stať, že po prejdení istej vzdialenosti by začali mravčekovia odlietať preč.[6] Po akom čase mohla Enka vďaka mravcom pozorovať, že sa uhlová rýchlosť kolotoča zmenšila na polovicu?

Moment zotrvačnosti kolotoča bez mraveniska je I a hmotnosť jedného mravca so zanedbateľnými rozmermi je m. Predpokladajte, že na začiatku boli všetky mravce centrované presne v strede kolotoča v mravenisku so zanedbateľnou hmotnosťou.

Úlohu riešiť pre všeobecné hodnoty parametrov je aj nad sily mnohých vedúcich, stačí teda ak ju vyriešite pre konkrétne hodnoty parametrov, $g = 9{,}81\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$, $f = 0{,}500$, $\omega = 1{,}00\,\mathrm{rad\cdot s^{-1}}$, $v = 8{,}00\,\mathrm{cm/s}$, $m = 5{,}00\,\mathrm{mg}$, $n = 100\,\mathrm{s^{-1}}$, $I = 5{,}00\,\mathrm{kg\cdot m^2}$. Navyše predpokladajte, že mravcom sa v uvedenom čase nepodarí prísť na okraj kolotoča. Výsledok uveďte s presnosťou na tri platné číslice.

Ďalšie 3 bonusové body môžete získať za vyriešenie prípadu, v ktorom by kolotoč Enka navoskovala, a teda koeficient trenia by klesol na $0{,}05$. Hodnoty zvyšných parametrov zostávajú nezmenené.

Predtým, než sa pustíme do riešenia problému, je dobrý nápad si aspoň v krátkosti vytvoriť stratégiu, ako sa s príkladom popasovať. To urobíme teraz aj my a skúsime si rozmyslieť, čo sa bude diať.



Potom, ako začnú mravce utekať von, začne stúpať moment zotrvačnosti sústavy *kolotoč-mravce*. (Na začiatku bol príspevok mravcov do momentu zotrvačnosti nulový, keďže všetky mravce boli v strede kolotoča v mravenisku zanedbateľných rozmerov.) Moment hybnosti sústavy sa ale zachováva, keďže na našu sústavu nepôsobí žiadny vonkajší moment sily, čo znamená, že uhlová rýchlosť kolotoča začne klesať. Kedy začnú mravce odlietať preč? Akonáhle sa dostanú do takej vzdialenosti, kedy odstredivá sila v sústave kolotoča prekoná maximálnu možnú treciu silu.

$$m\omega^2 x_{\mathrm{od}} = mgf\,,$$
$$x_{\mathrm{od}} = \frac{gf}{\omega^2}\,.$$

[6] Nejedná sa o škaredé okrídlené mravce.

Musíme si ale uvedomiť, že tým ako mravce začnú utekať zo stredu kolotoča, budú znižovať uhlovú rýchlosť ω kolotoča, a preto aj hranica, kde ich už neudrží trecia sila, x_{od} sa začne vzďalovať. Dobehnú niekedy mravce vôbec túto hranicu? Ak nie, tak mravce budú dobiehať túto hranicu navždy[7]. Ak sa naopak mravcom podarí hranicu dobehnúť, tak od tohto okamihu sa vývoj kolotoča zmení, keďže mravce, ktoré odletia, si so sebou odnesú aj kúsok z momentu hybnosti sústavy, a tak spomalia kolotoč. Pustime sa teda do práce!

Najprv sa pozrime na to, ako sa zmení moment zotrvačnosti kolotoča, keď mravce začnú utekať von z mraveniska. Budeme predpokladať, že mravce utekajú rovnomerne do všetkých strán. Za čas t ich z mraveniska unikne nt s celkovou hmotnosťou mnt. Mravce, ktoré utekali ako prvé, sa stihli dostať do vzdialenosti vt. Ak prižmúrime oči, tak mravce práve vytvorili na kolotoči kruhový disk s polomerom vt a hmotnosťou mnt. Moment zotrvačnosti sústavy je potom funkciou času

$$I(t) = I\ + \frac{1}{2}(mnt)(vt)^2 = I\ + \frac{1}{2}mnv^2t^3\,. \tag{1}$$

Keďže sa moment hybnosti sústavy zachováva (na sústavu nepôsobia žiadne vonkajšie momenty síl), tak uhlová rýchlosť kolotoča začne v čase klesať

$$\begin{aligned} I\omega &= I(t)\omega(t)\,,\\ \omega(t) &= \omega\frac{I}{I + \dfrac{1}{2}mnv^2t^3}\,, \end{aligned} \tag{2}$$

a hranica, z ktorej mravce odletia, sa začne postupne vzdaľovať

$$\begin{aligned} x_{\mathrm{od}}(t) &= \frac{gf}{\omega^2(t)}\,,\\ x_{\mathrm{od}}(t) &= \frac{gf}{\omega^2}\frac{\left(I + \frac{1}{2}mnv^2t^3\right)^2}{I^2}\,. \end{aligned}$$

To, či sa mravcom na kolotoči niekedy podarí dobehnúť túto hranicu, zistíme tak, že za x_{od} dosadíme vt, a ak existuje riešenie tejto rovnice pre t, tak mravce začnú po čase t z kolotoča odlietať. Počkajme ešte s riešením tejto rovnice, a pozrime sa na prípad, kedy sú parametre kolotoča a mravcov nastavené tak, že mravce hranicu nikdy nedobehnú. Vtedy je celý vývoj systému popísaný rovnicou (2) a dosadením $\omega(t) = \omega/2$ určíme hľadaný čas t.[8]

$$t = \sqrt[3]{\frac{2I}{mnv^2}}\,.$$

Skutočná zábava začne až teraz. Musíme určiť, za akých podmienok nastane tento prípad a vyriešiť ten, kedy mravce hranicu dobehnú a začnú odlietať. Ukazuje sa však, že vo všeobecnosti

[7] Z *praktických dôvodov* budeme predpokladať, že kolotoč je dostatočne veľký.

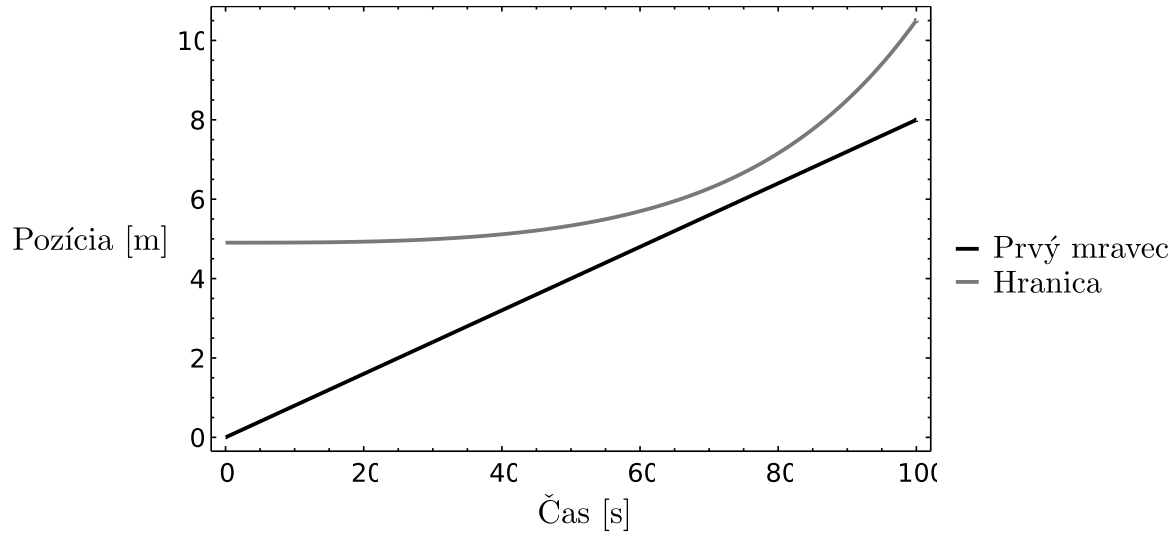
[8] Ak by ste uvažovali, že mravce utekajú po priamke, tak miesto dvojky bude vo výsledku figurovať trojka. Ak ste uvažovali iný model utekania mravcov, body sme za to nestrhávali.

to nie je vôbec jednoduché. Ak sa pokúsime určiť čas, kedy mravce hranicu dobehnú a príslušnú rovnicu si pekne rozpíšeme,[9]

$$\begin{aligned} vt &= x_{\mathrm{od}}(t)\,, \\ vt &= \frac{gf}{\omega^2} + \left(\frac{gf}{\omega^2 I} mnv^2\right) t^3 + \left(\frac{1}{4}\left(\frac{gf}{\omega^2}\right)^2 \left(\frac{mnv^2}{I}\right)^2\right) t^6\,, \\ vt &= x_{\mathrm{od}}(0) + \left(x_{\mathrm{od}}(0)\frac{mnv^2}{I}\right) t^3 + \left(\frac{1}{4} x_{\mathrm{od}}^2(0)\left(\frac{mnv^2}{I}\right)^2\right) t^6\,. \end{aligned}$$

zistíme, že táto rovnica **nie je** analyticky riešiteľná[10]. Rovnicu nevieme síce riešiť, no aspoň sa môžeme skúsiť spýtať, či vieme zistiť, pre aké parametre kolotoča a mravcov mravce dobehnú hranicu. Ukazuje sa, že aj odpovedať na túto otázku je ťažké. Keďže sme na to prišli trochu neskoro, tak by sme sa Vám chceli za vzniknutú situáciu ospravedlniť. Holt, aj vedúci sú iba ľudia :).

Avšak pre konkrétne hodnoty parametrov vieme celkom jednoducho zistiť, či má táto rovnica riešenie, ak si vykreslíme v jednom grafe pozíciu prvého mravca a pozíciu hranice v čase. Ako sa teda správa systém pre hodnoty zo zadania?



Obr. 12: Pozícia prvého mravca a hranice v čase pre $f = 0{,}5$.

Keďže pozícia hranice rastie po určitom čase rýchlejšie ako pozícia prvého mravca, tak mravce hranicu po tomto čase určite nikdy nedobehnú. Môžeme teda použiť výsledok pre tento prípad. Zistíme, že mravcom sa podarí spomaliť kolotoč za čas

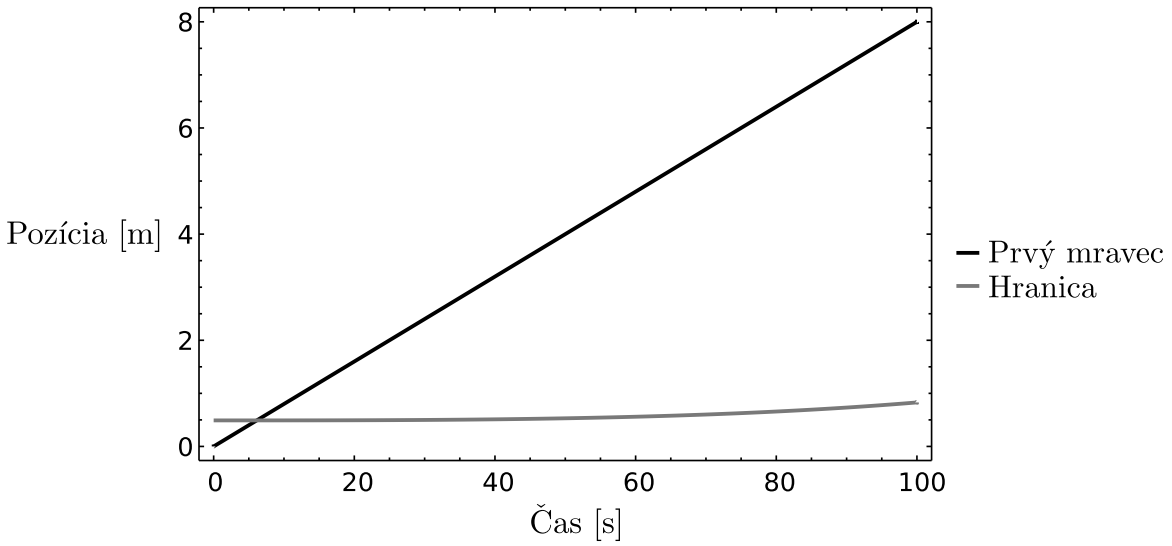
$$t = \sqrt[3]{\frac{2I}{mnv^2}} \approx 146\,\mathrm{s}\,.$$

[9]V rovnici sme označili vzdialenosť hranice odkiaľ mravce „odfúkne“ z kolotoča, predtým, než sa začne meniť ako $x_{\mathrm{od}}(0)$.

[10]To znamená, že neexistuje vo všeobecnosti predpis pre koreň tejto rovnice.

Bonusová časť

Ako je to v prípade, ak Enka kolotoč navoskuje? Všimnime si, že čas v prvom prípade nezávisí od koeficientu šmykového trenia. Zdalo by sa, že výsledok bude teda rovnaký. Ak si ale znovu nakreslíme graf, tak zistíme, že mravcom sa podarí hranicu dobehnúť v čase $t' = 6{,}13\,\mathrm{s}$.[11]. Tento čas je ale menší ako 146 s, takže mravcom sa nepodarilo dostatočne spomaliť kolotoč počas toho ako utekali k hranici.



Obr. 13: Pozícia prvého mravca a hranice v čase pre $f = 0{,}05$.

Čo teraz? Najprv si určime uhlovú rýchlosť kolotoča $\omega(t')$ z rovnice (2), pretože sa od tohoto okamihu zmení spôsob akým sa bude vyvíjať systém,

$$\omega(t') \approx 0{,}99993\,\mathrm{rad\ \ s^{-1}} \approx 1\,\mathrm{rad\ \ s^{-1}}\,,$$

vidíme, že v tomto prípade, v rámci nami požadovanej presnosti, sa uhlová rýchlosť kolotoča prakticky nezmenila.

Ako sa bude rýchlosť kolotoča od tohoto okamihu meniť? Za krátky čas $\mathrm{d}t$ dobehnú mravce vo vzdialenosti $v\mathrm{d}t$ od hranice hranicu, kde ich už neudrží trecia sila a odletia z kolotoča. Odnesú si ale so sebou príslušný moment hybnosti $\mathrm{d}L_{\text{odl. mravce}}$,

$$\begin{aligned}\mathrm{d}L_{\text{odl. mravce}} &= \mathrm{d}m_{\text{odl. mravce}} x_{\text{od}}^2(t)\omega(t)\,,\\ \mathrm{d}L_{\text{odl. mravce}} &= (mn\mathrm{d}t)x_{\text{od}}^2(t)\omega(t)\,.\end{aligned}$$

[11]Rovnica má v tomto prípade aj druhé riešenie $t = 291\,\mathrm{s}$, to ale už nie je pre nás zaujímavé, keďže po čase 6,13 s sa už systém vyvíja inak

Kedže sa ale moment hybnosti celej sústavy musí zachovať, tak moment hybnosti kolotoča (a mravcov na ňom) sa musí zmenšiť.

$$\begin{aligned}\frac{d}{\mathrm{d}t}\left(L_{\text{zvyšok}}+L_{\text{odl. mravce}}\right)&=0\,,\\ \frac{\mathrm{d}L_{\text{zvyšok}}}{\mathrm{d}t}&=-\frac{\mathrm{d}L_{\text{odl. mravce}}}{\mathrm{d}t}\,,\\ \frac{\mathrm{d}L_{\text{zvyšok}}}{\mathrm{d}t}&=-mnx_{\text{od}}^2(t)\omega(t)\,.\end{aligned}$$

Moment hybnosti zvyšku určíme ľahko na základe jeho momentu zotrvačnosti vďaka (1), pričom čas, ktorý mravce museli prejsť ku okraju je nutne $\frac{x_{\text{od}}(t)}{v}$, a teda na kolotoči sa nachádza $n\frac{x_{\text{od}}(t)}{v}$ mravcov, každý s hmotnosťou m.

$$\begin{aligned}\frac{d}{\mathrm{d}t}\left(\left(I+\frac{1}{2}mn\left(\frac{x_{\text{od}}(t)}{v}\right)x_{\text{od}}^2(t)\right)\omega\right)&=-mnx_{\text{od}}^2(t)\omega(t)\,,\\ \frac{d}{\mathrm{d}t}\left(\left(I+\frac{1}{2}\frac{mn}{v}\frac{g^3f^3}{\omega^6(t)}\right)\omega\right)&=-mn\frac{g^2f^2}{\omega^4(t)}\omega(t)\,,\\ \frac{d}{\mathrm{d}t}\left(I\omega+\frac{1}{2}\frac{mn}{v}\frac{g^3f^3}{\omega^5(t)}\right)&=-mn\frac{g^2f^2}{\omega^3(t)}\,,\\ \left(I-\frac{5}{2}\frac{mn}{v}\frac{g^3f^3}{\omega^6(t)}\right)\frac{d\omega}{\mathrm{d}t}&=-mn\frac{g^2f^2}{\omega^3(t)}\,.\end{aligned}$$

To, čo sme dostali, sa formálne nazýva *diferenciálna rovnica.*[12] Netreba sa toho báť, neskôr zistíte, že vo fyzike je vlastne skoro všetko zapísané ako diferenciálna rovnica, no nikto vám to zatiaľ neprezradil. Metódy ich riešenia sa budete učiť až na vysokej škole, no táto (a mnoho iných) sa dá vyriešiť ľahko, takzvanou *separáciou premenných.* Rovnicu upravíme tak, že na jednej jej strane budú iba výrazy s nezávislou premennou dt, a na druhej strane iba výrazy so závislou premmennou (dω). Následne rovnicu podľa príslušných premenných zintegrujeme. Nesmieme pritom zabudnúť, aké boli *počiatočné podmienky* - t.j. aká bola rýchlosť kolotoča v čase t'.

$$\begin{aligned}\left(I\omega^3(t)-\frac{5}{2}\frac{mn}{v}\frac{g^3f^3}{\omega^3(t)}\right)\mathrm{d}\omega&=-mng^2f^2\mathrm{d}t\,,\\ \int_{\omega(t')}^{\omega(t)}\left(I\omega^3(t)-\frac{5}{2}\frac{mn}{v}\frac{g^3f^3}{\omega^3(t)}\right)d\omega&=\int_{t'}^{t}-mng^2f^2\mathrm{d}t\,,\\ \left[\frac{1}{4}I\omega^4(t)+\frac{5}{4}\frac{mn}{v}\frac{g^3f^3}{\omega^2(t)}\right]_{\omega(t')}^{\omega(t)}&=\left[-mng^2f^2t\right]_{t'}^{t}\,.\end{aligned}$$

Hranaté zátvorky formálne označujú, že musíme dosadiť do výrazu v nich hodnotu „hore“ a odčítať od nej hodnotu výrazu, keď doňho dosadíme hodnotu „dole“.[13]

[12] Riešením takejto rovnice nie je číslo, ale funkcia. V našom prípade $\omega(t)$, ktorá spĺňa nejakú vlastnosť určenú touto rovnicou. *Diferenciálna* sa volá preto, lebo sa v nej vyskytujú derivácie funkcie.

[13] $[f(x)]_b^a \equiv f(a)-f(b)$.

Čas t, kedy dosiahne kolotoč rýchlosť $\omega/2$ určíme jednoducho tak, že za hodnotu $\omega(t)$ dosadíme $\omega/2$. Niekoľkými úpravami dostane rovnicu

$$(t-t') = \frac{1}{4}\frac{I}{mng^2f^2}\left(\omega^4(t') - \left(\frac{\omega}{2}\right)^4\right) + \frac{5}{4}\frac{gf}{v}\left(\frac{1}{\omega^2(t')} - \left(\frac{2}{\omega}\right)^2\right),$$
$$(t-t') = \frac{1}{4}\frac{I}{mng^2f^2}\left(\omega^4 - \left(\frac{\omega}{2}\right)^4\right) + \frac{5}{4}\frac{gf}{v}\left(\frac{1}{\omega^2} - \frac{4}{\omega^2}\right),$$
$$t = t' + \frac{1}{4}\frac{I}{mng^2f^2}\left(\frac{15}{16}\omega^4\right) + \frac{5}{4}\frac{gf}{v}\left(-\frac{3}{\omega}\right).$$

Odkiaľ už jednoducho určíme čas $t = 9\,720$ s.

Komentár ku vzoráku Pozorný riešiteľ si mohol všimnúť hneď dve, nie veľmi vysvetlené aproximácie vo vzoráku. Prvou z nich bol predpoklad spojitosti celého procesu. V skutočnosti má diskrétna povaha odlietania mravcov zanedbateľný vplyv, pri našom počte mravcov (n). Martin Gažo a Martin Murin si povedali, že si nebudú nič aproximovať a podarilo sa im to (správne) nasimulovať. Rozdiel výsledkov bol však až mimo nami požadovanej presnosti.

Kde sa skryla druhá aproximácia? Isto ste postrehli, že celý čas sme pracovali v rotujúcej vzťažnej sústave, no vo vzoráku sa vyskytla iba odstredivá sila.[14] Naozaj môžeme zanedbávať tieto sily? Coriolisova sila nemení veľkosť rýchlosti mravca, len jej smer, z čoho vyplýva, že nami nájdený vzťah je v skutočnosti len horný odhad. No je tu ešte Eulerova sila, ktorá spôsobí roztočenie mravca okolo osi kolotoča. Skúste si sami napísať podmienku odlietavania mravcov v prípade, ak nezanedbáme žiadnu silu.[15]

Komentár k riešeniam Mnoho riešiteľov sa pokúšalo vyriešiť túto úlohu pomocou zákona zachovania *mechanickej* energie. Ten tu však nemôžeme aplikovať, keďže pôvodná energia sa spotrebúva na presun mravcov. (Rozmyslite si, ktoré zotrvačné sily konajú prácu!)

[14] Pripomeňme, že rotujúca vzťažná sústava je neinerciálna a v skutočnosti sa v nej vyskytujú aj ďalšie dve zotrvačné sily - Coriolisova sila a Eulerova.

[15] Nezabudnite, že trecia sila pôsobí vždy proti smeru pohybu, no Coriolisova sila je kolmá na vektor rýchlosti mravca.

Výsledková listina po 2. kole zimnej časti 2014/2015

A

	Meno	Škola	1	2	3	4	♡	Σ_2	Σ
1	Samuel Kočiščák	G Poštová		9	9	9	0	27,00	45,00
2	Juraj Halabrin	GJH	5	7	7	5	0	24,00	44,00
3	Nina Hronkovičová	G Partizánske	3	9	8		0	20,00	31,00
4	Peter Ralbovský	ŠpMNDaG		6	7		0	13,00	30,00
5	Martin Murin	GJH		9	8	11	0	28,00	28,00
5	Adam Škrlec	GJH	5	9	4		0	18,00	28,00
7	Peter Súkeník	GVC		9	3		0	12,00	27,00
7	František Dráček	G PB		6		5	0	11,00	27,00
9	Peter Výboch	GLJS		6	3	4	0	13,00	25,00
10	Jerguš Stručka	ŠpMNDaG	3	6	8	7	0	24,00	24,00
11	Matúš Drgoň	G Hlohovec		6		5	0	11,00	22,00
12	Paulína Smolárová	ŠpMNDaG	1	0	9		0	10,00	21,00
13	Peter Pavel Arthur Petráš	ŠpMNDaG		6	7		0	13,00	19,00
14	Martin Gažo	ŠpMNDaG	7		9	0	0	16,00	16,00
15	Matúš Jenča	GJH		7			0	7,00	15,00
16	Jaroslava Kokavcová	Gamča			6	5	-3	8,00	14,00
17	Kamil Džurman	GsvMik					0	0,00	12,00
18	Zuzana Mičková	G P.O.H.					0	0,00	6,00
19	Šimon Vančo	CGSM					0	0,00	1,00
20	Samuel Cibulka	GJH					0	0,00	0,00
20	Tomáš Červený	G Pankúchova					0	0,00	0,00
1	Samuel Kočiščák	G Poštová		9	9	9	0	27,00	45,00
2	Juraj Halabrin	GJH	5	7	7	5	0	24,00	44,00
3	Nina Hronkovičová	G Partizánske	3	9	8		0	20,00	31,00
4	Peter Ralbovský	ŠpMNDaG		6	7		0	13,00	30,00
5	Martin Murin	GJH		9	8	11	0	28,00	28,00
5	Adam Škrlec	GJH	5	9	4		0	18,00	28,00
7	Peter Súkeník	GVC		9	3		0	12,00	27,00
7	František Dráček	G PB		6		5	0	11,00	27,00
9	Peter Výboch	GLJS		6	3	4	0	13,00	25,00
10	Jerguš Stručka	ŠpMNDaG	3	6	8	7	0	24,00	24,00
11	Matúš Drgoň	G Hlohovec		6		5	0	11,00	22,00
12	Paulína Smolárová	ŠpMNDaG	1	0	9		0	10,00	21,00
13	Peter Pavel Arthur Petráš	ŠpMNDaG		6	7		0	13,00	19,00
14	Martin Gažo	ŠpMNDaG	7		9	0	0	16,00	16,00
15	Matúš Jenča	GJH		7			0	7,00	15,00
16	Jaroslava Kokavcová	Gamča			6	5	-3	8,00	14,00
17	Kamil Džurman	GsvMik					0	0,00	12,00
18	Zuzana Mičková	G P.O.H.					0	0,00	6,00
19	Šimon Vančo	CGSM					0	0,00	1,00
20	Samuel Cibulka	GJH					0	0,00	0,00
20	Tomáš Červený	G Pankúchova					0	0,00	0,00

B

	Meno	Škola	0	1	2	3	4	♡	Σ_2	Σ
1	Barbara Pulmannová	Gamča	9	9	9	7		0	34,00	70,00
2	Šimon Pajger	G VOZA	9	7	6	3	6	0	28,00	64,00
3	Filip Čermák	GyGo		5	9	8	9	0	31,00	60,00
3	Michaela Dlugošová	GPUK	9	9	9	4		0	31,00	60,00
5	Hana Mertanová	PGJB		6	9	5	5	0	25,00	58,00
6	Michaela Leinwatherová	G Papánka	9	9	6	3		0	27,00	57,00
7	Matej Parada	Gamča	9	3	9	1	0	0	22,00	53,00

	Meno	Škola	0	1	2	3	4	♡	Σ_2	Σ
8	Tomáš Švihorík	GyPar	9	7	6		6	0	28,00	52,00
8	Dalibor Kafka	G Spišská SV	9	2	9	3	2	0	23,00	52,00
10	Paulína Smolárová	ŠpMNDaG	9	1	9	1	0	0	20,00	49,00
10	Andrej Uhliarik	GAB		9	9	2	6	0	26,00	49,00
12	Juraj Vasek	G VPT	8	9	4		3	0	24,00	48,00
13	Juraj Bodík	Gamča		9	4		8	0	21,00	46,00
13	Marek Murin	GJH		9	9		9	0	27,00	46,00
15	Peter Onduš	G Alejová	9	4	9			0	22,00	45,00
16	Katarína Častulíková	G Bajkalská	8	9	9	3	6	0	32,00	44,00
17	Andrea Tothova	GJH	9	6	6		6	0	27,00	42,00
18	Roman Kluvanec	GyPar		9	9			0	18,00	40,00
19	Sára Kuťková	Gamča	2	9	9			0	20,00	39,00
20	Patrik Grman	G Coubertina	9	7	4	*	8	0	28,00	37,00
21	Martina Tureničová	GJH	2	9	4		1	0	16,00	34,00
22	Marek Horanský	ŠpMNDaG	9	9	9	4	2	0	31,00	31,00
23	Jana Sadovska	ŠpMNDaG		7	5	2	0	0	14,00	30,00
24	Natália Tóthová	G Alejová	6	4	4		0	0	14,00	29,00
24	Marek Horanský	ŠpMNDaG						0	0,00	29,00
26	Matúš Ferech	GJH	9	2	4		3	0	18,00	27,00
27	Matej Jurčík	G VPT		7	9	2	0	0	18,00	26,00
28	Matej Repka	G JAR		3	4		5	0	12,00	23,00
29	Tomáš Sásik	Gamča						0	0,00	22,00
30	Filip Rácz	G AV	9		7	4		0	20,00	20,00
31	Karmen Geciková	GymNZ						0	0,00	19,00
31	Michal Alexander Pálenik	ŠpMNDaG		6	6	1	6	0	19,00	19,00
33	Katarína Dančejová	GPH	9	9				0	18,00	18,00
33	tomáš janeta	GAB	7	1	9	1	0	0	18,00	18,00
33	Diana Kaňuchová	GPH	9					0	9,00	18,00
36	Andrej Bugár	GEmc2	9	7				0	16,00	16,00
37	Dávid Barbora	GFŠ		8	4		3	0	15,00	15,00
38	Jakub Čatloš	ŠpMNDaG						0	0,00	14,00
39	Monika Valiková	EvGymJAK						0	0,00	13,00
40	Nikoletta Bucsanszká	GPUK	9	0	2		0	0	11,00	11,00
41	Adrián Bobola	GPH	9	1				0	10,00	10,00
42	Juraj Ulbrich	GJH						0	0,00	6,00
43	Daniela Väröšová	GymNZ		0	1	0	0	0	1,00	4,00
44	Michal Kevan	GymNZ						0	0,00	4,00
45	Marek Koman	G Alejová						0	0,00	0,00