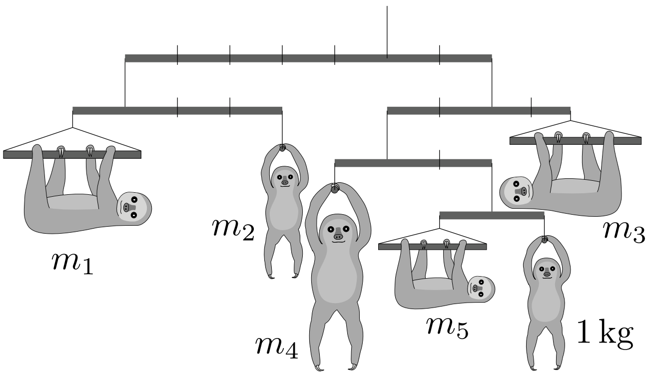
Fyzikálny korešpondenčný seminár
30. ročník, 2014/2015
FKS, KTFDF FMFI UK, Mlynská dolina, 84248 Bratislava
e-mail: otazky@fks.sk web: http://fks.sk

Vzorové riešenia 1. kola zimnej časti 2014/2015

1.1 B0 – Kvapkajúce leňochody (opravovala Čajka)

Malé leňochody v dokumentárnom filme Katku natoľko uchvátili, že si založila vlastnú leňochodiu farmu. Okrem kŕmenia, upratovania výbehov a rozplývania sa nad ich rozkošnosťou ich občas musí aj vykúpať.[1] Aby jej mokré leňochody nekvapkali kade-tade, vešia ich na takýto sušiak:



Obr. 1: Sušiak na leňochody

Závesné mechanizmy vždy nastaví tak, aby boli leňochody v rovnováhe a harmónii. Aký je momentálne pomer hmotností druhého a piateho leňochoda?

Katka sušenie vymyslela perfektne. Vieme, že mechanizmus je nastavený tak, aby bol v rovnováhe. Čo to znamená? Ani jedna páka na obrázku sa neotáča, a platí, že momenty síl sú v rovnováhe.

Moment sily je definovaný ako vektorový súčin ramena sily a veľkosti sily $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$, no keďže v našom prípade sú všetky sily kolmé na rameno sily, stačí, ak budeme používať tvar $M = Fr = mgr$.

Na ľavej strane veľkej páky sú zavesené leňochody s hmotnosťami m_1 a m_2. Pre ne musí platiť:

$$
\begin{aligned}
M_1 &= M_2\,,\\
m_1 g r &= m_2 g 3r\,,\\
m_1 &= 3m_2\,.
\end{aligned}
$$

kde r je dĺžka jedného dieliku páky.

[1] Viac o kúpaní leňochodov sa dozviete tu: https://www.youtube.com/watch?v=q1mAGQAw3Oc .

Teraz sa pozrieme na pravú stranu. Tam už je situácia trochu komplikovanejšia. Hmotnosť leňochoda 1 kg označíme ako m_0 a pustíme sa do toho pekne postupne. Všetky hmotnosti leňochodov vpravo si vyjadríme pomocou m_0.

Vezmeme páku, na ktorej sú leňochody s hmotnosťami m_0 a m_5, využijeme našu obľúbenú rovnosť momentov síl $M_5 = M_0$, a po úprave nám zostane

$$m_5 = m_0 \,.$$

Na ďalšiu páku pôsobia momenty síl od leňochoda s hmotnosťou m_4 a tých dvoch predchádzajúcich. Porovnáme ich momenty $M_4 = M_{05}$, čo rozšírime na $m_4 gr = (m_0 + m_5)g2r$. Tým máme vyjadrenú hmotnosť štvrtého leňochoda

$$m_4 = 4m_0 \,.$$

Teraz je na rade tretí leňochod, je zavesený na páke, pre ktorú platí $M_3 = M_{045}$. Opäť si to rozpíšeme do tvaru $m_3 g2r = (m_0 + m_5 + m_4)g2r$ a tadá,

$$m_3 = 6m_0 \,.$$

Hurá, už nám zostalo porovnať momenty síl iba na jednej páke, tej najväčšej.

$$M_{12} = M_{0345} \,,$$
$$(m_1 + m_2)g5r = (m_0 + m_3 + m_4 + m_5)g2r \,.$$

Dosadíme to, čo poznáme. A to tak, aby nám zostali len hmotnosti, ktoré potrebujeme, teda m_2 a m_5. Dostávame

$$10m_2 = 12m_5 \,.$$

A z toho už dostaneme pomer hmotností druhého a piateho leňochoda

$$\frac{m_2}{m_5} = 1{,}2 \,.$$

Všimnite si, že hľadaný pomer vôbec nezávisí od hmotnosti m_0.

1.2 B1 – Pirátska (opravoval Samo Tomašec)

Internetoví piráti opäť začali rabovať a majiteľov autorských práv to už naozaj prestáva baviť. Zabezpečili si preto delo a už aj na nich pália! Podarilo sa im zasiahnuť lodný sťažeň s dĺžkou L a hmotnosťou m, ktorý sa následne zvalil, pričom spodok zostal stále uchytený na lodi. O koľko sa posunulo telo lode v dôsledku pádu sťažňa, ak mala celá loď pôvodne hmotnosť M?

Na vyriešenie nášho problému sa musíme zamerať na polohu ťažiska celej lode. Keďže na loď nepôsobí žiadna vonkajšia sila, jeho poloha (vzhľadom na nejaký pevný bod na pevnine) sa nemôže a ani nebude vôbec meniť. Keď na lodi spadne sťažeň, jeho ťažisko zmení svoju polohu. Avšak z hore uvedených príčin (výsledné ťažisko lode sa nehýbe) sa musí zároveň pohnúť aj zvyšok lode, ale opačným smerom.

Poloha ťažiska celej lode sa dá vypočítať ako vážený priemer vzdialeností ťažísk jednotivých častí, vzhľadom na jeden pevný bod [2]

$$x_\mathrm{T} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}\,,$$

kde x_T je vzdialenosť ťažiska od referenčného bodu, m_i sú hmotnosti jednotlivých kúskov lode a x_i ich vzialenosti.

Aplikujme to na náš problém. Zvoľme referenčný (pevný) bod v ťažisku. Nech pred pádom sťažňa bolo jeho ťažisko od referenčného bodu vzdialené x_s a ťažisko zvyšku lode x_l. Teda muselo platiť

$$x_\mathrm{T} = 0 = \frac{m x_\mathrm{l} + M x_\mathrm{s}}{m+M} \Rightarrow m x_\mathrm{l} + M x_\mathrm{s} = 0\,.$$

Povedzme, že sťažeň lode padá do záporného smeru súradnicovej osi. Rozumný predpoklad, teda že ťažisko sťažňa je v jeho strede, znamená, že jeho nová poloha sa *vzhľadom na loď* zmenila o $-L/2$. Mínus je tam práve kvôli smeru, v ktorom padal sťažeň. Avšak aby zostalo ťažisko celej lode na svojom mieste, tak tá sa musela aj so sťažňom posunúť o x do opačného smeru. Keďže stále platí, že $x_\mathrm{T} = 0$, dostávame

$$x_\mathrm{T} = 0 = \frac{m(x_\mathrm{l} - \frac{L}{2} + x) + M(x_\mathrm{s} + x)}{m+M} \Rightarrow m(-\frac{L}{2} + x) + Mx = 0\,.$$

Výsledok už len jednoducho upravíme, čím dostaneme hľadané posunutie lode

$$x = \frac{m}{2(m+M)} L\,.$$

1.3 B2 – Diplomovka (opravoval Vladko)

Napísanie takej dobrej diplomovej práce nie je vôbec jednoduchá vec, to vám povie každý. Aký priemerný výkon je vykonávaný študentmi na celom svete pri písaní svojich diplomových prác? Skúste odhadnúť čo najpresnejšie všetky parametre od počtu univerzít až po hĺbku tlačítka na klávesnici! Na záver nezabudnite udať aj nepresnosť vašich odhadov a všetky konkrétne zdroje vašich použitých hodnôt.

Najprv budeme musieť čo najpresnejšie odhadnúť prácu, ktorú koná študent počas písania diplomovej práce. Vieme, že vykonanú prácu vypočítame ako súčin sily a dráhy, na ktorej ňou pôsobíme. Počas písania na počítači musíme pôsobiť silou, aby sme klávesu posunuli nadol, čiže konáme prácu. Lepšie ako ju odhadovať, je zistiť si ju experimentálne.

Na klávesnici si vyberieme písmeno a budeme klásť na seba mince, kým sa klávesa nestlačí. Tento moment nastal, keď na klávese bolo 61,4 g (6 jednoeurových a 4 desaťcentové mince), hmotnosť euromincí bola zistená z údajov Národnej banky Slovenska,[3] pričom klávesa sa stlačila

[2] Môžete si to jednoducho odvodiť. Ťažisko je taký bod, že ak do neho sústredime celú hmotmnosť telesa, tak účinok všetkých pôsobiacich síl aj momentov síl na teleso bude rovnaký. Toto si stačí iba matematicky zapísať ;)

[3] `http://www.nbs.sk/_img/Documents/_vzdelavanie/ucitelia/textove_informacie_zakladne_udaje.pdf`

o 3,5 mm. Táto hĺbka bola meraná dvomi milimetrovými pravítkami – jedno statické slúžilo ako stupnica a druhé sa hýbalo spolu s klávesou a tvorilo ukazovateľ. Klávesa na notebooku sa napriek zdanlivo ľahšej stlačiteľnosti stlačila až pri 66,9 g a to o 2 mm.

Na klávesy pri meraní pôsobila tiažová sila mincí $F = mg$, a tá vykonala prácu $W = Fs = mgs$, čo pre počítačovú klávesnicu dáva výsledok $W_{\mathrm{pc}} = 2{,}11\,\mathrm{mJ}$ a vykonaná práca na stlačenie klávesy na notebooku bola $W_{\mathrm{ntb}} = 1{,}31\,\mathrm{mJ}$.

Z nameraných údajov môžeme tvrdiť, že práca potrebná na stlačenie klávesy sa pohybuje niekde medzi 1 mJ a 3 mJ, v závislosti od konkrétnej klávesnice.

Nás však zaujíma výkon, ktorý je definovaný ako pomer medzi prácou a časom, za ktorý táto práca bola vykonaná. To znamená, že musíme zistiť, ako rýchlo sa píše diplomovka. Je potrebné si uvedomiť, že pri písaní má študent krátke prestávky, kedy napríklad rozmýšľa nad formuláciou viet, preto je písanie pomalšie, ako keby bezhlavo odpisoval text. Rýchlosť písania závisí od schopností konkrétneho študenta. My sme si skúsili zmerať našu priemernú rýchlosť písania textu. Tá bola okolo 280 znakov, teda môžme predpokladať, že priemerný študent za minútu napíše 150 až 400 znakov za minútu, teda 9 000 až 24 000 znakov za hodinu.Takže výkon jednotlivca sa pohybuje medzi

$$P_{\mathrm{min}} = \frac{9\,000 \cdot 1\,\mathrm{mJ}}{3\,600\,\mathrm{s}} = 2{,}5\,\mathrm{mW}$$

a

$$P_{\mathrm{max}} = \frac{24\,000 \cdot 3 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{J}}{3\,600\,\mathrm{s}} = 20\,\mathrm{mW}\,.$$

Nakoniec potrebujeme zistiť celkový výkon všetkých študentov na svete. Po dlhšom, či kratšom googlení sa nám podarí získať nejaký odhad, koľko ľudí musí diplomovku napísať. Napríklad istý pán[4] si na základe zopár štatistík vypočítal, že za rok na celom svete absolvuje vysokú školu 10,8 milióna študentov. Toto číslo je len približné, nakoľko je zistené zosumarizovaním niekoľkých štatistík a vyplýva z údajov, ktoré sú aj 7 rokov staré, no pre naše odhady nám dostatočne postačí. Teda výkon študenta-jednotlivca ešte vynásobíme odhadovaným počtom absolventov a dostaneme, že celkový výkon sa pohybuje medzi $P_{\mathrm{cmin}} = 27\,\mathrm{kW}$ a $P_{\mathrm{cmax}} = 216\,\mathrm{kW}$.

Výkon študenta je možné zistiť aj iným spôsobom. Na internete[5] ľahko zistíme, že rozsah diplomovej práce je 90 000 – 126 000 znakov. Za predpoklaldu, že študent nie je neomylný, tak približne štvrtinu textu vymaže stláčaním backspace-u a nanovo prepíše, teda naťuká 1,5-násobok znakov (0,25-násobok je stláčanie backspace a ďalších 0,25 je písanie premazaného textu), teda počet napísaných znakov je 135 000 – 189 000. Teraz nám už len stačí odhadnúť čas potrebný na napísanie diplomovej práce. Väčšinu času, ktorý študent strávi písaním je využitý štúdiom a výskumom, teda je veľmi ťažké odhadnúť čistý čas písania. Prokrastinátori nechávajúci všetko na poslednú chvíľu dokážu napísať svoju záverečnú prácu aj za 10 hodín, zatiaľčo poctivejší jedinci prepíšu aj 50 hodín. Z týchto hodnôt vypočítame výkon už vyššie popísaným postupom a dostávame interval ${P^*}_{\mathrm{cmin}} = 8{,}1\,\mathrm{kW}$ a ${P^*}_{\mathrm{cmax}} = 170{,}1\,\mathrm{kW}$.

Vidíme, že výsledky postupov nie sú úplne totožné. Rozdiely vznikli rôznou presnosťou odhadov a keďže v druhom postupe sme čas potrebný na písanie práce odhadli „od oka“ a v prvom prípade sme rýchlosť písania odhadli pomocou merania našej vlastnej rýchlosti, tak prvý postup je presnejší. Takisto by sme si mali uvedomiť, že v prvom postupe sme odhadli

[4] `goo.gl/LaE1VA`
[5] `http://goo.gl/5bKtAy`

„okamžitý“ výkon a pri druhom postupe sme iba odhadovali, aký by mal byť priemerný výkon písania. Napriek snahe spraviť odhady čo najpresnejšie, sme nedokázali výsledok určiť presnejšie ako na dva rády. Takže ak to zosumarizumejeme, tak priemerný výkon študentov píšucich diplomovú prácu sa pohybuje okolo 100 kW.

1.4 B3/A1 – Hľa, drží to! (opravoval Duško)

Určite ste sa už všetci stretli so situáciou, kedy vám balón začal ťahať vlásky alebo sa jednoducho len tak prilepil ku stene. Skúste teoreticky objasniť príčiny priťahovania balóna k rôznym predmetom ako aj spôsoby, ako takúto vlastnosť zlikvidovať. Ďalej experimentálne zistite, akou veľkou silou sa balón tlačí ku stropu, keď ho k nemu elektrostaticky prilepíte. K experimentálnym dátam samozrejme nesmie chýbať ich riadne spracovanie a fotky.

Teória Určite ste si všimli, že pred pošúchaním balóna o vlasy nejavili balón ani vlasy o seba zájujem. To znamená, že niečo podstatné sa muselo udiať práve pri tom šúchaní. Na začiatku boli tieto predmety elektricky neutrálne, ako väčšina iných v našom okolí.[6] Po tom, čo sme ich o seba pretreli, nejaké elektróny preskákali z vlasov na balón. Bolo to spôsobené tým, že pri trení dvoch materiálov sa prejavú vlastnosti vyplývajúce z ich chemickej stavby. Na malých vzdialenostiach sa už molekuly látok nejavia ako neutrálne, práve naopak, na niektorých miestach pôsobia silné elektrické sily. Tie dokážu spôsobiť presun elektrónov z jednej molekuly na druhú. Niektoré materiály, napríklad teflón, silikón a iné polyméry sú veľmi elektronegatívne, teda ak majú možnosť, uchmatnú si každý elektrón, ktorý je na blízku a nie je silno viazaný. Naopak také prírodné materiály ako koža, vlasy a vlna si veľmi nedokážu udržať svoje elektróny. Samozrejme, takéto vytrhávanie elektrónov z molekúl látok nastáva vždy a záleží na tom, ktorý materiál je elektronegatívnejší.

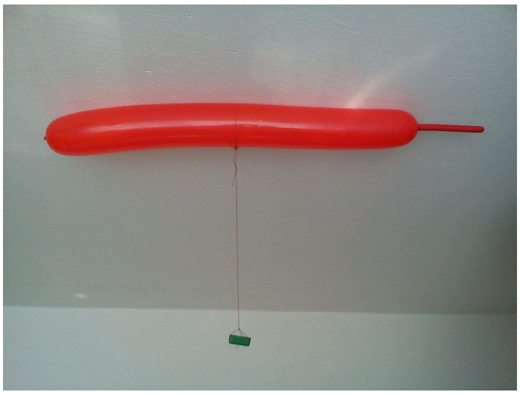
Teraz už vieme, že balón sa nám priťahuje k vlasom, lebo má záporný náboj a vlasy majú kladný náboj. Otázkou zostáva, prečo sa dokáže pritiahnuť aj k elektricky nenabitej stene (alebo k iným predmetom). Náboje v stene sa totižto dokážu pohybovať. Čiže keď k stene priložíme záporne nabitý balón, elektróny v stene budú odpudzované a posunú sa kúsok ďalej. Naopak, protóny zostanú na svojom mieste. Vieme, že elektrická sila závisí aj na vzdialenosti nábojov, a čím sú bližšie, tým je sila väčšia. A keďže sú protóny bližšie ako elektróny, tak príťažlivá elektická sila bude väčšia ako odpudivá. Tadá, tajomstvo príťažlivosti balóna sme odhalili.

Otázka vybitia je už malina. Musíme nájsť predmet, ktorý bude schopný vziať balónu elektróny. Môžme na to použiť kladne nabitý predmet, ktorý bude odtrhávať elektróny balónu, alebo balón uzemníme. Uzemniť znamená vodivo spojiť (nejakým vodičom) balón s veľkým predmetom, napríklad zemou. Po tomto spojení sa balón a zem budú elektricky správať ako jedno teleso. To znamená, že prebytočné elektróny z balóna sa rovnomerne rozmiestnia po celom telese. V princípe nezostanú na balóne žiadne elektróny, lebo zem je rádovo väčšia.

Expriment Pri meraní príťažlivej sily sme využili fakt, že ak na balón bude pôsobiť rovnaká sila opačného smeru, tak výslednica síl bude nulová a balón už nebude prilepený k stene. Takouto silou je gravitačná, takže sme vzali balón, pripevnili k nemu nádobku na závažia

[6] Aj keď sú predmety elektricky neutrálne, netreba zabúdať, že sú tvorené kladne aj záporne nabitými časticami, ktoré svoje silové pôsobenie kompenzujú.

(vrchnák od fľaše) a kládli do nej závažia, až kým balón vyplvom vlastnej tiaže a tiaže závaží nespadol. Samozrejme spôsobov je viac, ale tento je najjednoduchší.



Obr. 2: Aparatúra

Spravili sme desať nezávislých meraní, pričom sme merali celkovú hmotnosť systému váhou, ktorá má presnosť 10 mg. Následne sme vypočítali veľkosť pôsobiacej gravitačnej sily $F = mg$.

Meranie	Hmotnosť záťaže /g	Sila /mN
1	8,72	85,54
2	7,26	71,22
3	7,64	74,95
4	9,10	89,27
5	8,70	85,35
6	9,68	94,96
7	8,32	81,62
8	8,84	86,72
9	8,86	86,92
10	8,18	80,25

Máme domerané, tak poďme analyzovať. Vidíme, že naše namerané hodnoty sa pomerne dosť líšia. Ak z nich chceme získať jednu vypovedajúcu hodnotu, je najlepšie spraviť aritmetický priemer. Priemernú silu priťahovania vypočitame podľa vzorca:

$$\overline{F} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} F_i \,,$$

kde F_i predstavujú jednotlivé namerané sily a n je počet meraní. V našom prípade takto dostaneme $\overline{F} = 83{,}68\,\mathrm{mN}$.

Toto však nie je všetko. Nič nám to nepovie o tom, ako veľmi sa namerané hodnoty od seba líšili, respektíve akou chybou je zaťažený výsledok. Určite ste už počuli o štandardnej odchýlke, ktorá dobre popisuje chybu každého jedného nameraného údaju. Avšak pokiaľ chceme vedieť akou chybou je zaťažená priemerná hodnota, treba vyrátať strednú smerodajnú odchýlku, čo nie je nič iné ako štandardná odchýlka predelená $\sqrt{n}$:

$$s(F) = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}(\overline{F} - F_i)^2}$$

Na základe toho už vieme neistotu aj nášho merania, a preto môžeme povedať, že balón sa k stropu priťahoval priemernou silou $\overline{F} = (83{,}68 \pm 2{,}19)\,\mathrm{mN}$.

Na záver sa ešte treba zamyslieť, prečo sa naše namerané údaje tak veľmi líšili. Zjavne to nebola iba chyba merania, ale nám sa jednoducho nepodarilo balóny zelektrizovať vždy rovnako. Samozrejme ešte by sme mohli písať o tom, že sme nemali dokonalé meracie prístroje, o meniacich sa okolitých podmienkach a podobne. No s určitosťou vieme povedať, že to má menší dopad na výsledok ako samotné zelektrizovanie.

Dúfam, že budete pokračovať v experimentovaní naďalej. A rada pre tých, čo ešte nezačali: nemáte sa čoho báť, práve tu viete najľahšie získať body do FKS ;).

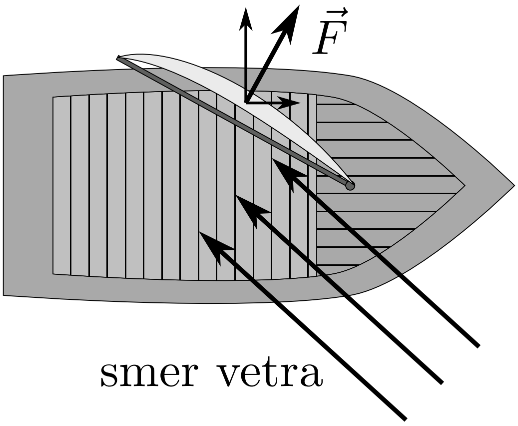
1.5 B4/A2 – Sedemnásty plavby deň (opravoval Jimi)

V časoch, keď starí Vikingovia útočili na nepriateľské územia, nebolo inej možnosti, než sa plaviť loďami. Dráhy po mori však neboli rovné a vietor tiež často fučal a tlačil z rôznych smerov. Takéto nepriaznivé efekty sa dali rušiť mohutnými plachtami zavesenými na sťažňoch lodí. Skúste objasniť, prečo a akým spôsobom sú lode (malé aj veľké) schopné zatáčať a meniť svoju rýchlosť vďaka svojim plachtám. Nájdite všetky relevantné parametre a dokážte ich význam.

Úspešné plavenie sa po mori vyžaduje od námorníkov, aby vedeli dve veci: Kam sa plaviť a ako sa plaviť. Pre potreby tohto príkladu však predpokladáme, že námorníci vedia požadovaný kurz a že poznajú smer vetra.

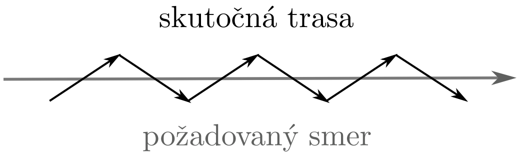
Najprv sa pozrime na to, ako sa loď dokáže pohybovať aj bez zadného vetru. Vietor málokedy počúva priania námorníkov, tak musia mať techniku, ako sa pohybovať aj v neideálnych podmienkach. Priamo proti vetru sa pohybovať nemôžu, pod malým uhlom to však ide. Ak budeme predpokladať, že narážajúci vietor sa správa ako prúd častíc,[7] ktoré sa od plachty odrážajú pod tým istým uhlom, ako dopadajú, tak vietor bude na plachtu pôsobiť vždy v smere kolmom na orientáciu plachty. Preto pri upevnení plácht ako na obrázku 3 má výsledná sila na loď zložku aj v smere kurzu, aj v smere kolmom na kurz. Sila v smere kurzu (natočenia lode) hýbe loď tým správnym smerom. Iná možnosť je určovať kurz kormidlovacím pádlom, ktoré dokáže prenášať pôsobiacu silu do toho správneho smeru. Sila kolmá na orientáciu lode má zanedbateľný pohybový účinok, keďže loď má v tomto smere obrovský odpor.

[7] Z makroskopického hľadiska to nie je až tak zlá aproximácia. Predpoklad, že vzduch pôsobí kolmo na plachtu by bol fajn, ak by vzduch mal nulovú viskozitu. Reálny vzduch má viskozitu nenulovú, to znamená, že okrem sily F na obrázku bude loď strhávaná dozadu silou, ktorá má svoj pôvod vo viskozite. Celý systém bude teda fungovať, len pokiaľ táto sila úplne nevyruší zložku, ktorá nás posúva dopredu. Zrátať túto situáciu je však nad naše schopnosti (presnejšie, vysoko nad naše schopnosti), nám teda neostáva nič, len konštatovať, že plachetnice sa dopredu bežne pohybujú, viskózny efekt teda nie je príliš veľký.



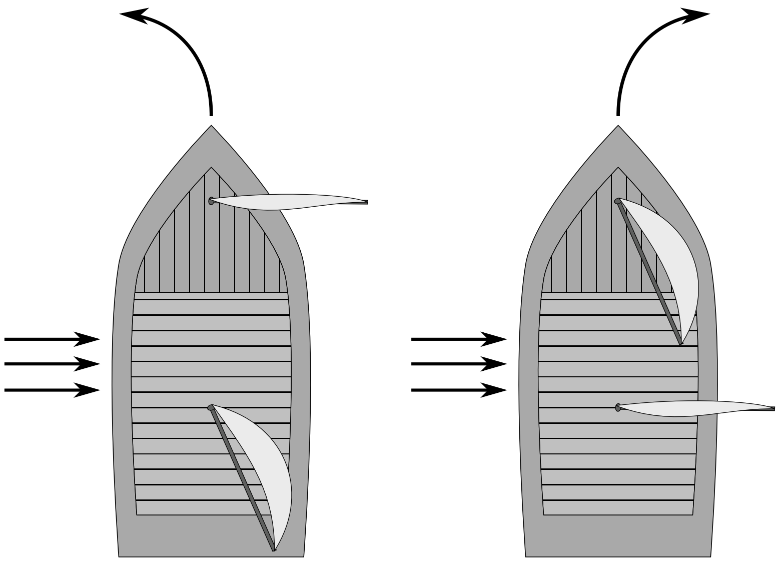
Obr. 3: Plavba v protivetre

Ak by bol cieľ našej cesty akurát proti vetru, ešte nie sme stratení. Ak budeme rozumne meniť kurz, môžeme sa dostať aj presne proti nemu. Na to nám stačí vždy symetricky okolo osi, pozdĺž ktorej fúka vietor, natáčať loď spolu s plachtou. Plachetnica sa teda bude pohybovať tak ako na obrázku 4, čím sa vykompenzuje pohyb do strán.



Obr. 4: Kľučkovanie proti vetru

Pozrime sa ešte na to, ako dokáže loď zatáčať. Je to možné vďaka tomu, že máme spravidla dve alebo viac plácht na lodi. Preto ak necháme spustenú prednú plachtu a zadnú stiahneme, moment sily vyvolaný vetrom bude otáčať prednú časť lode. Ak necháme spustenú zadnú a prednú stiahneme, moment sily bude naopak otáčať zadnú časť lode. Preto bude zatáčať tak ako na obrázku 5.



Obr. 5: Otáčanie lode

Ako však vedeli zatáčať vikingské lode, ktoré mali len jednu plachtu, a to v strede lode? Museli na to ísť trochu inak. Používali veslá, ktorými sa dá meniť smer aj na riekach, a na mori používali už spomínané kormidlo, presnejšie takzvané kormidlovacie pádlo v zadnej časti lode. To funguje podobne ako plachta. Tiež usmerňuje prúd častíc (tentokrát ale vody), pričom na ne pôsobí silou. To ale znamená, že častice pôsobia rovnakou silou opačného smeru na loď, a tá loď otáča.

1.6 A3 – Copatá (opravoval Maťo Badin)

Väčšina dievčat a menšina chlapcov vie, že dlhšie vlasy občas treba uviazať do chvostu (aby toľko nezavadzali kde-tade). Najjednoduchšie riešenie je zobrať si gumičku, párkrát ju obtočiť okolo vlasov a nechať si ich stlačiť jej silným tlakom. Uvažujme valcovitý zväzok vlasov o polomere R a gumičku kľudovej dĺžky L s modulom pružnosti E a medzou pevnosti σ_m. Zamyslite sa nad tým, akou najväčšou silou vieme zviazať vlasy gumičkou rôznych kľudových dĺžok a nakreslite graf tejto závislosti so zadaným pomerom $\sigma_\mathrm{m}/E = 2$. Trenie a stlačiteľnosť vlasov zanedbajte.

Ako už zadanie napovedá, najlepšou stratégiou na dosiahnutie čo najväčšej sily je natiahnuť gumičku čo najviac, a čo najviac ju obtočiť okolo vlasov. Celková sila, ktorou bude gumička na chvost pôsobiť je totiž daná počtom obtočení a príspevkom sily z každého takéhoto obtočenia. Ak gumičku natiahneme viac, oba efekty posilníme. Natiahnuť gumičku čo najviac znamená čo najbližšie sa priblížiť k bodu, kedy sa gumička roztrhne. [8] Viac z gumičky už jednoducho nedostaneme.

Na to, aby sme príklad úspešne spočítali až do samého konca, musíme urobiť nasledujúce zjednodušenia:

(i) Obtočenia gumičky budeme modelovať ako krúžky s polomerom R.

[8] Vtedy mechanické napätie dosiahne medzu pevnosti σ_m.

(ii) Budeme predpokladať, že správanie gumičky popisuje Hookov zákon až po medzu pevnosti.[9]

Pred tým, než sa pustíme do počítania, tak si ujasnime, ako vlastne gumičku okolo vlasov *v praxi* obtáčame. Gumičku naťahujeme tak, že z celej natiahnutej dĺžky gumičky vytvoríme krúžky s polomerom R. To znamená, že nová dĺžka gumičky L' musí byť celočíselným násobkom $2\pi R$. Dôsledkom je, že pre niektoré počiatočné dĺžky L nebude gumička natiahnutá na maximálne možné relatívne predĺženie $\epsilon_{\max} = \sigma_{\mathrm{m}}/E = 2$, ale menej. Je to cena za to, že musíme využiť celú dĺžku gumičky. Existuje spôsob, pri ktorom by bola výsledná sila väčšia? Ukazuje sa, že *teoreticky* áno,[10] no v praxi je však takýto postup nepraktický, nehovoriac o skokovej zmene napätia gumičky, čo sa pochopiteľne nestretáva s pochopením používateliek gumičiek.

To, aké relatívne predĺženie má mať gumička, zistíme tak, že si matematicky zapíšeme podmienku, na ktorú sme prišli (počet obtočení označíme n)

$$L' = n2\pi R\,,\ n \in \mathbb{N}\,,$$
$$(1+\epsilon)\,L = n2\pi R\,.$$

Ak nechceme, aby sa gumička roztrhla, no zároveň chceme maximálnu možnú silu, tak pre každé L musíme nájsť čo najväčšie relatívne predĺženie ϵ, no také, aby pre ϵ platilo $\epsilon \leq \epsilon_{\max}$. Maximálny možný počet obtočení n určíme tak, že nájdeme najbližšie menšie prirodzené číslo k číslu

$$\frac{(1+\epsilon_{\max})\,L}{2\pi R}\,.$$

Najbližšie menšie prirodzené číslo k tomuto číslu je jednoducho jeho dolná celá časť

$$n = \left\lfloor \frac{(1+\epsilon_{\max})\,L}{2\pi R} \right\rfloor\,.$$

Napäťovú silu v gumičke už určíme ľahko. Najskôr zistíme relatívne predĺženie gumičky. Nesmieme zabudnúť, že toto predĺženie nie je $\epsilon_{\max}$, ale iba

$$\epsilon = n\frac{2\pi R}{L} - 1 = \left\lfloor \frac{(1+\epsilon_{\max})\,L}{2\pi R} \right\rfloor \frac{2\pi R}{L} - 1\,.$$

Takže napätie v gumičke je

$$T = \frac{\epsilon}{\epsilon_{\max}}\sigma_{\mathrm{m}} S = \frac{\sigma_{\mathrm{m}} S}{\epsilon_{\max}} \left(\left\lfloor \frac{(1+\epsilon_{\max})\,L}{2\pi R} \right\rfloor \frac{2\pi R}{L} - 1 \right)\,.$$

Napäťová sila T v gumičke musí byť vo všetkých miestach rovnaká, keďže kruhová gumička je homogénna a vo všetkých miestach rovnako natiahnutá. Na základe toho už jednoducho

[9] Tento predpoklad je síce drastický, no nutný, keďže žiadne ďalšie informácie o gumičke nemáme. V skutočnosti má správanie gumičky ďaleko od Hookovho zákona. Navyše sa vyznačuje hysterézou. Drtiči si môžu závislosť mechanického napätia od relatívneho predĺženia skúsiť aj vypočítať: `http://www.doitpoms.ac.uk/tlplib/stiffness-of-rubber/printall.php`.

[10] Maximálnu možnú silu by sme dostali, ak by relatívne predĺženie dosiahlo $\epsilon_{\max} = 2$ v celej gumičke. Tú by sme potom obtočili okolo vlasov, no keďže by dĺžka gumičky nebola nutne celočíselný násobok $2\pi R$, tak by nám kúsok gumičky zostal. Na to aby takáto gumička držala, tak by sme museli tesne pred týmto kúskom gumičky vytvoriť uzlík, aby sme udržali napätie v gumičke.

určíme silu, ktorou pôsobí jeden krúžok gumičky na vlasy. Vezmime si malý výsek gumičky pod *malým* uhlom $\delta\phi$ vzhľadom na stred kruhu. Jeho oba konce sú ťahané silou T, takže celkovo tento kúsok prispieva silou $2T\sin(\delta\phi/2)$ k sile zväzujúcej vlasy.[11] Pre malé uhly $\delta\phi/2$ ale platí $\sin(\delta\phi/2) \approx \delta\phi/2$, tzn. sila od jedného kúsku je približne $T\delta\phi$. Takýchto výsekov je však toľko, že vypĺňajú celú kružnicu, takže uhol 2π, čo v spojení s nezávislosťou pôsobiacej sily od konkrétneho uhla nedáva nič iné ako to, že sila, ktorou viaže jeden krúžok gumičky vlasy, má veľkosť $2\pi T$.

Výsledná sila, ktorá stláča chvost, je teda

$$F = 2\pi T n = 2\pi \frac{\sigma_\mathrm{m} S}{\epsilon_\mathrm{max}} \left(\left\lfloor \frac{(1+\epsilon_\mathrm{max})\,L}{2\pi R} \right\rfloor \frac{2\pi R}{L} - 1 \right) \left\lfloor \frac{(1+\epsilon_\mathrm{max})\,L}{2\pi R} \right\rfloor .$$

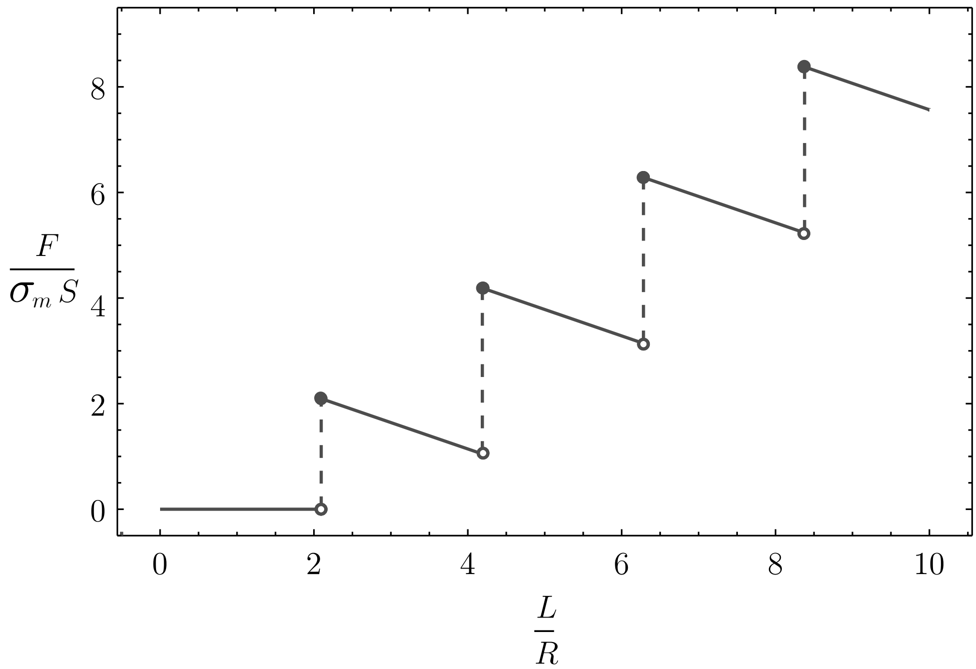
Popisuje tento výsledok dostatočne dobre realitu? Ak ste sa niekedy hrali s gumičkami, tak viete, že keď ju natiahneme niekoľkonásobne, tak jej šírka resp. prierez je menší. Ako započítať tento efekt? Vhodné, a často používané, priblíženie je predpokladať, že celkový objem gumičky zostane konštantný, čo ale znamená, že prierez gumičky S sa musel zmenšiť $(1+\epsilon)$-krát.[12] Skutočná sila, ktorá stláča chvost, je teda:

$$F = 2\pi T n = 2\pi \frac{\sigma_\mathrm{m} S}{\epsilon_\mathrm{max}} \frac{\left(\left\lfloor \frac{(1+\epsilon_\mathrm{max})L}{2\pi R} \right\rfloor \frac{2\pi R}{L} - 1 \right)}{\left(\left\lfloor \frac{(1+\epsilon_\mathrm{max})L}{2\pi R} \right\rfloor \frac{2\pi R}{L} \right)} \left\lfloor \frac{(1+\epsilon_\mathrm{max})\,L}{2\pi R} \right\rfloor = \frac{\sigma_\mathrm{m} S}{\epsilon_\mathrm{max}} \left(\left\lfloor \frac{(1+\epsilon_\mathrm{max})\,L}{2\pi R} \right\rfloor \frac{2\pi R}{L} - 1 \right) \frac{L}{R} .$$

Graf môžeme vytvoriť v tabuľkovom editore alebo napr. programom *Gnuplot*. Pri vytváraní grafu sa oplatí zvoliť bezrozmerné veličiny (t.j. bezrozmernú dĺžku L/R a bezrozmernú silu $F/(\sigma_\mathrm{m} S)$), pretože nemáme informáciu o absolútnej veľkosti veličín.

[11] Nakreslite si obrázok s pôsobiacimi silami T – pôsobia ako dotyčnice ku gumičke. Výslednica týchto síl pôsobí do stredu chvostu.

[12] Počítajte s nami: objem gumičky je $V_0 = S_0 l_0$, kde S_0 je kľudový prierez a l_0 kľudová dĺžka. Ak sa zmení dĺžka na $l = (1+\epsilon)l_0$, prierez musí byť $S = S_0/(1+\epsilon)$, aby platilo $Sl = S_0 l_0 = V_0$.



Obr. 6: Graf pre $\epsilon_{\max} = \sigma_{\mathrm{m}}/E = 2$. Pre určité L avšak nevieme zostrojiť ani prvý krúžok (sila by bola záporná). Interval takýchto L je na grafe reprezentované tenkou čiarou z bodu $L = 0$.

1.7 A4 – Šetríme zotrvačnosťou (opravoval Kvík)

Keď Dušan upratoval na chate šopu s náradím, našiel páčidlo o hmotnosti m tvaru písmena L s dĺžkami strán a a b. Ako zvedavého fyzika ho okamžite začalo zaujímať, okolo ktorej osi prechádzajúcej páčidlom ho musí rotovať, aby malo čo najmenší moment zotrvačnosti. Pomôžte mu a nájdite takú polohu osi aj s príslušnou hodnotou $I_{\min}$!

Plný počet bodov získate už za vyriešenie úlohy pre konkrétny prípad $a = b$. Za vyriešenie úlohy pre všeobecné a a b viete získať až o 3 bonusové body viac.

Úplne na začiatku si páčidlo umiestnime do nejakej súradnicovej sústavy, ideálne karteziánskej, ktorej sa budeme v našich ďalších úvahách držať. Ako najprijateľnejšie sa javí zafixovať stred páčidla do bodu $[0, 0]$ a jeho ramená na kladné polosi x a y. Konce teda budú ležať na súradniciach $[a, 0]$ a $[0, a]$. Navyše si túto rovinu pomenujme – napríklad L, keďže v nej leží páčidlo v tvare písmena L.

Polohu priamky (hľadanej osi) v priestore vieme určiť mnohými spôsobmi; napríklad ako priesečník dvoch rovín, ako spojnicu dvoch rôznych bodov, alebo napríklad pomocou jedného bodu a dvoch uhlov. Práve posledný spôsob sa ukazuje ako vhodný, pretože dokážeme nájsť bod, cez ktorý hľadaná os určite prechádza – a bude ním ťažisko útvaru. Presnejšie si ukážeme, že akákoľvek os, ktorá ťažiskom neprechádza, určite nemôže byť optimálna. A keďže si môžeme byť istí, že nejaká optimálna os existuje, tak musí prechádzať práve cez ťažisko.

Podľa Steinerovej vety o rovnobežných osiach je moment zotrvačnosti telesa okolo ľubovoľnej osi rovný súčtu momentu zotrvačnosti telesa okolo rovnobežnej osi vedenej cez ťažisko I_{t} a momentu zotrvačnosti hmotného bodu s rovnakou hmotnosťou okolo tejto osi:

$$I = I_{\mathrm{t}} + mr^2 \, ,$$

kde m je hmotnosť telesa a r je kolmá vzdialenosť ťažiska od osi otáčania. Ak zoberieme ľubovoľnú os neprechádzajúcu ťažiskom, moment zotrvačnosti páčidla okolo nej bude určite väčší, než okolo rovnobežnej osi, ktorá navyše prechádza ťažiskom. A teda ju určite nechceme, lebo nemôže byť optimálna.

Teraz budeme potrebovať poznať polohu ťažiska. To je našťastie triviálne – útvar sa skladá z dvoch identických úsečiek a ničoho iného, takže jeho ťažisko bude musieť ležať v strede spojnice ich ťažísk. To sú celkom zjavne body $\mathrm{B} = [a/2, 0]$ a $\mathrm{C} = [0, a/2]$. Spriemerovaním súradníc dostaneme polohu ťažiska $\mathrm{T} = [a/4, a/4]$.

Priamok, ktoré prechádzajú týmto bodom, je však stále nekonečne veľa. Dokonca máme ešte dva stupne voľnosti – prvým je veľkosť uhla medzi rovinou L a priamkou (označíme ho θ) a druhým je natočenie v rovine L (označíme ho φ).

Optimálnu veľkosť uhla $\theta_{\min}$ určíme podobnou úvahou. Ukážeme si, že ak zoberieme ľubovoľnú inú os, vždy ju dokážeme nejakou infinitezimálne malou zmenou trochu zlepšiť.

Majme nejakú všeobecnú os prechádzajúcu ťažiskom. Pozrieme sa, čo sa bude diať s momentom zotrvačnosti, keď uhol θ medzi ňou a rovinou L o máličko zmenšíme. Nech si vyberieme ľubovoľný bod páčidla, po zmenšení uhla sa jeho vzdialenosť od osi otáčania takisto zmenší.[13] Lenže ak sa každý bod dostal bližšie k osi a hmotnosť sa nezmenila, moment zotrvačnosti sa musel zmenšiť. Jedinou osou, ktorú už týmto spôsobom nedokážeme zlepšiť, je priamka ležiaca v rovine útvaru.

Čiže naša hľadaná os otáčania prechádza cez ťažisko a leží v rovine L. Ostáva nám jediný voľný parameter, totiž poloha priamky v rovine udaná uhlom φ.

Avšak kým doteraz sme o φ hovorili iba ako o stupni voľnosti, teraz už budeme potrebovať presne vedieť, čo označuje. Povedzme, že to bude orientovaný uhol medzi osou otáčania a súradnicovou osou x . Keďže máme celú priamku, stačí nám uvažovať interval $\langle 0, \pi \rangle$, ďalším otáčaním už nič nové nevymyslíme.

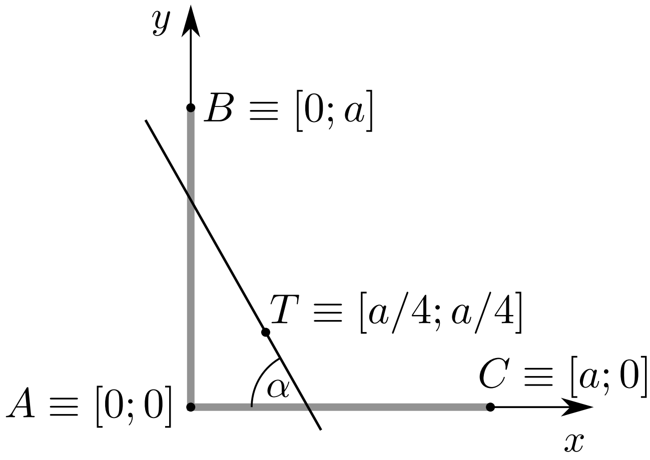
Zistiť ho môžeme dvoma spôsobmi, buď si to náročne vypočítame alebo opäť využijeme úvahy. Oba spôsoby, sme hodnotili plným počtom bodov. Pre jednoduchosť uvedieme iba riešenie pomocou úvah, to druhé je analogické bonusovej časti.

Každé teleso má 3 hlavné osi otáčania, ktoré sú na seba kolmé a prechádzajú ťažiskom. Aspoň jedna z týchto osí patrí do množiny tých, voči ktorým je moment zotrvačnosti telesa minimálny, a ak do tejto množiny patrí iba jedna hlavná os, tak iba ona tvorí tú množinu. Navyše, ak uvažujeme iba osi prechádzaúce ťažiskom, tak aspoň jedna z hlavných osí patrí do množiny, voči ktorým je moment zotrvačnosti maximálny. Okrem toho, ak má teleso nejaké osi symetrie, tak jedna z nich je určite hlavnou osou.[14]

Z predchádzajúcich úvah nám vyplýva, že maximálny moment zotračnosti, bude mať páčidlo okolo osi, ktorá je kolmá na rovinu L. Čiže zvyšné dve hlavné osi sa budú určite nachádzať v rovine L. Naše páčidlo je symetrické podľa osi, ktorá zviera so súradnicovou osou x uhol $\varphi = \frac{\pi}{4}$, čiže to je ďalšia hlavná os. Z kolmosti hlavných osí vyplýva, že posledná je v rovine L a zviera uhol $\varphi = \frac{3\pi}{4}$. Ani rátať nemusíme a vidíme, že práve voči tej poslednej osi, bude moment zotrvačnosti minimálny.

[13] Alebo vzdialenosť ostane rovnaká – pre body na priamke kolmej na pôvodnú aj zmenenú os.

[14] Toto sme mohli uviesť ihneď na začiatku vzoráku a ušetrili by sme si pár odstavcov textu, no na opátku by sme prišli o mnohé zaujímavé uvedomenia si. Podrobnejšie zdôvodnenie týchto faktov nájdete tu:



Obr. 7: Význačné body rovnoramenného páčidla, os otáčania

Pri výpočte samotného $I_{\min}$ sa už integrovaniu nevyhneme, no nie je to nič strašné. Každý kúsok páčidla prispeva k momentu zotrvačnosti hodnotou $\mathrm{d}I = \mathrm{d}mr^2$. Konkrétne pre naše L-ko zložené z dvoch homogénnych tyčí to bude:

$$\mathrm{d}I = \lambda\left(x\sin\frac{\pi}{4}\right)^2\mathrm{d}x = \frac{m}{4a}x^2\mathrm{d}x\,,$$

kde λ je dĺžková hustota a x je vzdialenosť od osi pozdĺž páčidla. Teraz tieto príspevky sčítame pre obe časti páčidla a dostaneme náš vytúžený výsledok:

$$I_{\min} = 2\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}\frac{m}{4a}x^2\mathrm{d} = \frac{m}{2a}\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} = \frac{ma^2}{24}\,.$$

Bonusová časť

Ako ste si mohli všimnúť, za nájdenie minimálneho momentu zotrvačnosti pre prípad $a \neq b$ bolo možné získať ďalšie 3 body, no vyžadovalo si to pomerne veľké úsilie.

Rovnako ako pre prípad $a = b$ platí, že os musí prechádzať ťažiskom L-ka a musí ležať v jeho rovine, keďže stále platí použitá argumentácia. Čo sa však zmení, je pozícia ťažiska a optimálny uhol, pod ktorým musíme os viesť. Budeme používať rovnakú súradnicovú sústavu, takže konce budú ležať na súradniciach $[b, 0]$ a $[0, a]$.

Premyslite si, že pozícia ťažiska má súradnice

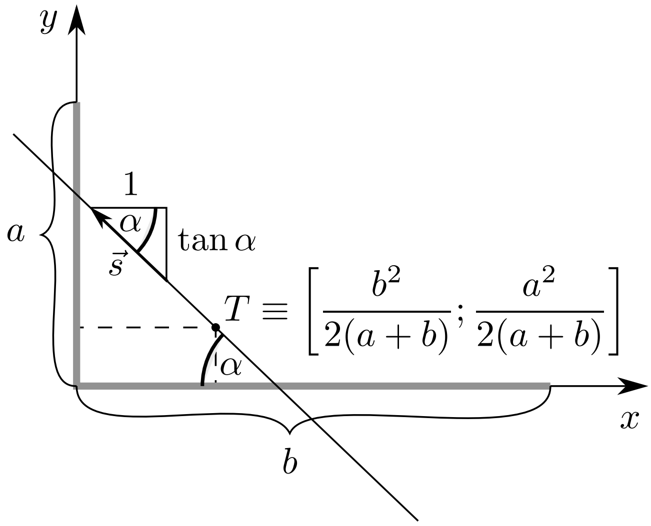
$$\left[\frac{b^2}{2(a+b)}, \frac{a^2}{2(a+b)}\right]\,.$$

Najprv sa pozrime ako závisí moment zotrvačnosti I od $\tan\alpha$, kde uhol α definujeme medzi osou otáčania a ramenom s dĺžkou b. Na to sa nevyhneme použitiu analytickej geometrie, a to konkrétne všeobecnej rovnice priamky v dvojrozmernom priestore. Na hodinách matematiky sa dozvieme, že tá má tvar[15]:

$$n_x x + n_y y + p = 0\,,$$

[15]S rovnicou sa môžete skôr stetnúť v tvare $ax + by + c = 0$.

kde konštanty n_x a n_y sú zložky normálového vektora priamky a konštantu p určíme dosadením bodu, ktorým priamka prechádza (ťažisko). Normálový vektor priamky získame ľahko zo smerového vektora. Jedným zo smerových vektorov je vektor $\vec{s} = (-1, \tan\alpha)$.



Obr. 8: Význačné body rôznoramenného páčidla, os otáčania

Keďže smerový a normálový vektor priamky sú kolmé, t.j. $\vec{s} \cdot \vec{n} = 0$, tak pomerne ľahko si vieme vyrobiť jeden z mnohých normálových vektorov. Napríklad tak, že vymeníme zložky vektora $\vec{s}$ a jedno znamienko.[16] Vyhovujúcim normálovým vektorom je napríklad $\vec{n} = (\tan\alpha, 1)$. Preto

$$n_x = \tan\alpha\,, \qquad n_y = 1\,.$$

Dosadením pozície ťažiska určíme konštantu p:

$$p = -\tan\alpha \frac{b^2}{2(a+b)} - \frac{a^2}{2(a+b)}\,,$$

a rovnicu osi otáčania v závislosti na $\tan\alpha$. Moment zotrvačnosti vieme vypočítať na základe použitia vzorca na výpočet vzdialenosti bodu od priamky v dvojrozmernom priestore,

$$d_{[x,y]} = \frac{|n_x x + n_y y + p|}{\sqrt{n_x^2 + n_y^2}}\,.$$

Stačí nám totiž ščítať príspevky od všetkých kúskov na obidvoch ramenách. Kúsku s dĺžkou $\mathrm{d}x$ prislúcha hmotnosť $\mathrm{d}m = m/(a+b)\mathrm{d}x$, keďže predpokladáme, že páčidlo je homogénne. Moment zotrvačnosti ramena s dĺžkou a, t.j. bodov so súradnicami $[0, l]$, kde l je z intervalu $\langle 0, a\rangle$, je tak[17]

$$I_a = \int_0^a d^2_{[0,l]}\mathrm{d}m = \int_0^a \frac{\left(\tan\alpha \cdot 0 + 1 \cdot l - \tan\alpha \frac{b^2}{2(a+b)} - \frac{a^2}{2(a+b)}\right)^2}{\tan^2\alpha + 1} \frac{m}{a+b}\mathrm{d}l\,.$$

[16] Takýto postup nám zaručí, že skalárny súčin vektorov je nula, a teda vektory sú na seba nutne kolmé.

[17] Využili sme, že $|x|^2$ je jednoducho x^2.

Obdobne pre moment zotrvačnosti ramena s dĺžkou b vypočítame moment zotrvačnosti ako

$$I_b = \int_0^b d^2_{[l,0]} \mathrm{d}m = \int_0^b \frac{\left(\tan\alpha \cdot l + 1 \cdot 0 - \tan\alpha \frac{b^2}{2(a+b)} - \frac{a^2}{2(a+b)}\right)^2}{\tan^2\alpha + 1} \frac{m}{a+b} \mathrm{d}l\,.$$

Nás zaujíma celkový moment zotrvačnosti I, ktorý je iba ich súčtom. Oba integrály v princípe nie je ťažké vypočítať, vyskytuje sa v ňom premenná, podľa ktorej integrujeme iba v prvej a druhej mocnine, no je ľahké sa v ňom pomýliť. Keďže veríme, že to zvládnete aj sami, tak uvádzame iba ich výsledok. Pri výpočte hodnôt takýchto, nie zložitých, no dlhých výrazov sa oplatí využiť nejaký softvér napr. open-source *Octave*, minimalizujeme tak pravdepodobnosť chyby spôsobenej narábaním s takýmito dlhými výrazmi. Dostaneme sa tak k hodnote momentu zotrvačnosti okolo osi, ktorá zviera s ramenom b uhol α

$$I_{\tan\alpha} = I_a + I_b = m\frac{a^4 + 4a^3b - 6a^2b^2\tan\alpha + 4ab^3\tan^2\alpha + b^4\tan^2\alpha}{12(a+b)^2(1+\tan^2\alpha)}\,.$$

My potrebujeme nájsť také $\tan\alpha$, pre ktoré je moment zotrvačnosti minimálny, čo urobíme derivovaním.

$$\frac{\mathrm{d}I_{\tan\alpha}}{\mathrm{d}\tan\alpha} = \frac{\tan\alpha(-a^4 - 4a^3b + 4ab^3 + b^4) + 3a^2b^2(-1+\tan^2\alpha)}{6(a+b)^2(1+\tan\alpha^2)^2} = 0\,.$$

Keďže neexistuje také α, pre ktoré $\tan^2\alpha = -1$, tak s pokojným svedomím môžeme rovnicu týmto výrazom vynásobiť, čím dostaneme kvadratickú rovnicu s koreňmi

$$\tan\alpha_{\mathrm{ext}} = \frac{a^4 + 4a^3b - 4ab^3 - b^4}{6a^2b^2} \mp \frac{\sqrt{36a^4b^4 + (-a^4 - 4a^3b + 4ab^3 + b^4)^2}}{6a^2b^2}\,.$$

Ešte musíme určiť, ktoré z $\tan\alpha_{\mathrm{ext}}$ je skutočne minimum, na čo potrebujeme druhú deriváciu $I_{\tan\alpha}$ (Na to, aby išlo o minimum musí byť kladná!). Taktiež je pekné si výsledok skontrolovať priebežne napr. limtným prípadom $a = b$, a skontrolovať si, či sme zatiaľ neurobili chybu. Pre $a = b$ dostávame $\tan\alpha_{\mathrm{ext}} \mp 1$,navyše keďže hľadaný uhol je zrejme ostrý, tak vieme povedať, že minimom bude koreň s kladným znamienkom. Ak nám takýto argument nestačí, tak urobíme druhú deriváciu a dosadíme tam naspäť koreň s kladným znamienkom, dostaneme úžasne pekný výraz,[18] ktorý je polynomiálnou funkciou a a b, no našťastie, vždy je kladný. [19]

[18]Naozaj ho tu nechcete mať. Spôsobili by ste tým autorom vzoráku ďalšiu bolesť navyše...

[19]Vypočítajte si a skúste si nechať vykresliť 3D graf. Pre koreň so záp. znamienkom je druhá deriácia naopak vždy záporná, takže ide o maximum.

Teraz náš $\tan\alpha_{\min}$ dosadíme naspäť do $I_{\tan\alpha}$ a dočkáme sa celkom dlhého zlomku. Keďže vás ale nechceme úplne znechutiť, tak niektoré často sa vyskytujúce mnohočleny sme zasubstituovali.

$$
\begin{aligned}
f(a,b) &= (a-b)^4 - 6a^2b^2\,,\\
g(a,b) &= \left(6a^2b^2\right)^2 + f(a,b)^2\,,\\
h(a,b) &= f(a,b) + \sqrt{g(a,b)}\,,\\
I_{\min} &= m\frac{4ab^3 + b^4 - \sqrt{g(a,b)} + \dfrac{h(a,b)^2}{36a^4} + \dfrac{h(a,b)^2}{9a^3b}}{12(a+b)^2\left(1 + \dfrac{h(a,b)^2}{\left(6a^2b^2\right)^2}\right)}\,.
\end{aligned}
$$