

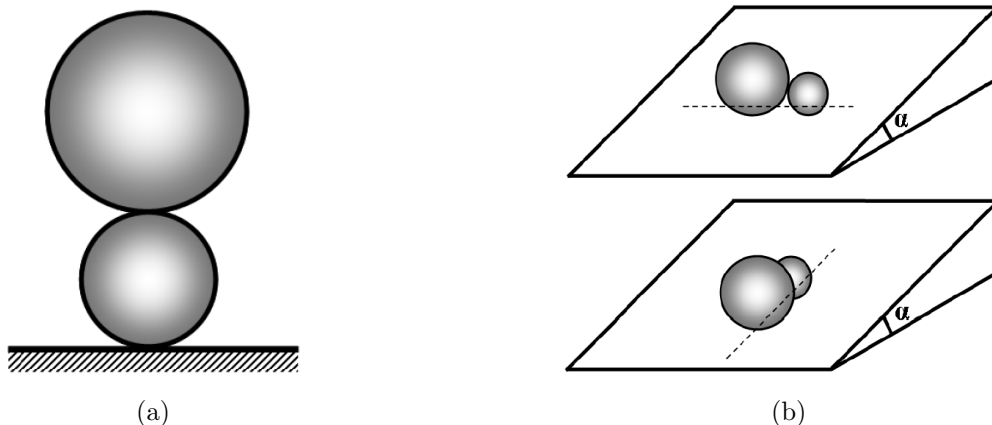
FX 7 Snehuliak

Uvažujme teleso tvorené dvomi homogénnymi guľami s hustotou ρ a polomerami R a $2R$, ktoré sa dotýkajú a sú pevne zlepené v bode dotyku.

- (a.) Teleso položíme na vodorovnú podložku tak, aby spojnica stredov guľ bola zvislá a menšia guľa bola dole (viď obr. 1a). Je jasné, že ide o nestabilnú rovnovážnu polohu (a to aj v prípade, že by dole bola väčšia guľa). Ľubovoľne malá výchylka teda spôsobí, že sa teleso zvalí. Nájdite rýchlosti (veľkosti aj smery) stredov guľ tesne pred nárazom hornej gule na podložku, ak:
- koeficient trenia medzi guľami a podložkou je veľmi veľký, takže nedochádza k prešmykovaniu,
 - koeficient trenia je nulový.
- (b.) Teleso položíme na naklonenú rovinu s uhlom sklonu α voči vodorovnej rovine tak, aby body dotyku guľ s podložkou boli v rovnakej výške (viď obr. 1b hore). Predpokladajte, že teleso na podložke neprešmykuje. Ukážte, že pohyb telesa bude periodický a nájdite maximálne rýchlosti stredov guľ počas tohto pohybu.
- (c.) Teraz teleso položíme na naklonenú rovinu tak, aby bola spojnica bodov dotyku guľ s podložkou kolmá na jej dolný okraj (viď obr. 1b dole). Nájdite periódu malých kmitov telesa okolo tejto rovnovážnej polohy.

FX 8 Lagrangeove body

Jupiter je na svojej orbite okolo Slnka doprevádzaný dvomi skupinami asteroidov, ktoré sa nazývajú Gréci a Trójania (podľa hlavných predstaviteľov Gréckych vojen). Ich orbita okolo Slnka, na ktorej sa tieto asteroidy nachádzajú, leží na orbite Jupitera, ale oproti Jupiteru je fázovo posunutá o $\pi/3$



Obr. 1

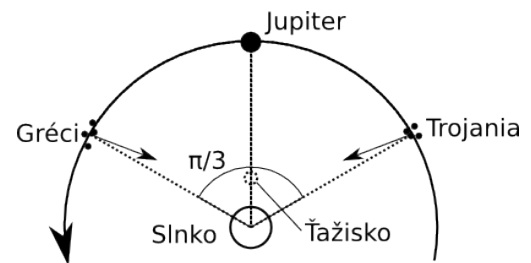
na niektorú stranu (obr. 2). Prekvapivým poznáním je, že gravitácia Slnka a Jupitera na ne pôsobí tak, že sú ich polohy stabilné vzhľadom na malé výchylky.

Pomocou počítačovej simulácie nás presvedčte, že toto je naozaj pravda pre Jupiterove Lagrangove body, L4 a L5.¹ Zároveň zistite, pre ktoré ďalšie planéty sú tieto body stabilné. Netreba skúšať konkrétne planéty, ale nájsť parametre, ktoré určujú stabilitu (zamyslite sa, ktoré parametre naozaj menia správanie sa systému).

Ako riešiť túto úlohu?

- i. Zvoľte správnu vzťažnú sústavu.
- ii. Napíšte si pohybové rovnice telies, ktoré potrebujeme simulovať.
- iii. Zamyslite sa, ako ukázať stabilitu a rozumne zvoliť počiatočné podmienky.
- iv. Napíšte program, ktorý dané rovnice odsimuluje.

Pri počítaní používajte vhodne preškálované hodnoty, napr. hmotnosť Slnka M_{\odot} ako jednotku hmotnosti, astronomickú jednotku (AU) pre vzdialenosť a rok pre čas. V týchto jednotkách je gravitačná konštanta $G = 4\pi^2$, hmotnosť Jupitera $0.001 M_{\odot}$ a vzdialenosť Jupitera od Slnka (ktorú považujeme za konštantu) 5.2 AU. Tiež možno predpokladať, že hmotnosti asteroidov sú zanedbateľné oproti ostatným hmotnostiam.



Obr. 2

Na integráciu možno použiť **Verletov algoritmus**, ale na získanie plného počtu bodov by ste mali použiť niečo sofistikovanejšie (napríklad adaptívny Runge-Kutta 4. radu). Algoritmus netreba písať, každý rozumný programovací jazyk ho obsahuje vo svojich knižniciach. V prípade C/C++ možno použiť **GNU Scientific library**.² V prípade Pythonu algoritmy nájdete v knižnici **Scipy**. MATLAB/Octave obsahujú RK4 vo funkcii `ode45`.

FX 9 Anjeli a démoni 2

Zlým vedcom z nemenovanej krajiny sa podarilo vyrobiť nebezpečnú výbušnú látku X, ktorá má explozívny charakter pri styku s prostredím o teplote $T > 0^\circ$. Aby látku X bezpečne dostali na správne miesto v inej časti sveta, potrebujú jej zabezpečiť chladenie. Vymysleli to nasledovne.

Malé množstvo látky X obalia guľovým vodným balíkom, ktorý nechajú zmraziť. Takýto ľadový balík o polomere R_1 a teplote 0° ešte zaobalia do guľovej izolácie s tepelnou vodivosťou $\lambda = 0.02 \text{ W/mK}$ a polomerom R_2 (hrúbka teda je $R_2 - R_1$). Keďže teroristi chcú látku X pašovať nenápadne, treba zabezpečiť čo najmenšiu veľkosť noseného nákladu.

Aký najmenší polomer R_2 môže mať izolácia, ak má v nej látka cestovať dokopy dva dni? Aký musí byť v takomto prípade polomer vodnej vrstvy R_1 ?

Uvažujte hustotu ľadu $\rho_l = 915 \text{ kg/m}^3$, merné skupenské teplo topenia ľadu $\beta_l = 334 \text{ kJ/kg}$ a teplotu okolitého prostredia $T_2 = 40^\circ$. Tepelnú kapacitu izolácie a rozmery látky X zanedbajte. Tepelná kapacita okolitého vzduchu je nekonečná.

¹Viac informácií o týchto bodoch nájdete na stránke http://en.wikipedia.org/wiki/Lagrangian_point

²Možno použiť len na Linuxoch a Macoch, v prípade problémov s inštaláciou nám napíšte.