

FX 10 RLC Trojsten

Nájdite amplitúdu prúdu prechádzajúceho obvodom na obr. 1, ak $\omega = 1/\sqrt{LC}$ a $R = \sqrt{L/C}$.

FX 11 Grilujeme

Blíži sa leto a chcem grilovať. Nemám ale gril, tak som sa rozhodol ako náhradu použiť kus horúceho železa.

Mám blok železa tvaru kocky o strane a tesne pri teplote topenia T_t . Aby som ho ochladil, ponorím ho do vody, ktorá vri na teplote T_v . Počkám, pokiaľ blok nebude mať približne rovnomernú teplotu T_g . (Ignorujeme Leidenfrostov efekt.)

- (a) Aký dlhý má byť čas t_1 , ak chcem, aby po som mal po ustálení ideálnu grilovaciu teplotu T_g ? Predpokladajte nekonečnú tepelnú kapacitu a zanedbateľný vplyv vzduchu okolo vody.
- (b) Odhadnite, ako dlho budem musieť počkať po vytiahnutí bloku z vody, kým sa teplota zhruba vyrovná, t.j. nájdite relevantnú časovú konštantu.

Spočítajte naprv všeobecne a potom pre hodnoty: $a = 1$ m, $T_t = 1,538$ °C, $T_v = 100$ °C, $T_g = 160$ °C, tepelná kapacita železa $c = 0.450$ J/(g K), tepelná vodivosť železa $k = 60$ W/(m K), hustota železa $\rho = 7.874$ g/cm³.

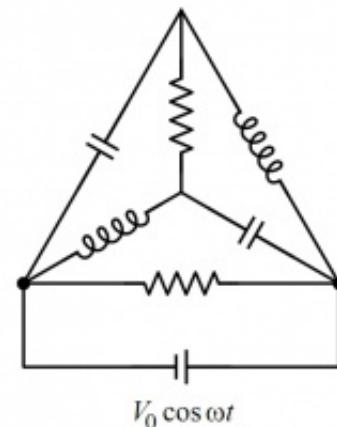
Niekoľko rád

1. Ak máme rovnicu tvaru $f(x) + g(y) = c$ tak vieme, že aj f, g musia byť konštantné, pretože inak by táto rovnica nebola splnená pre všetky x, y .
2. Na výpočet sa vám zíde Fourierov rozvoj. Ten má podobný zmysel ako rozvoj Taylorov, a to vyjadriť zložitú funkciu nejakými jednoduchšími. Miesto polynómov používa sínusy a kosínusy a slúži na priblíženie periodických systémov, ale všeobecne aj na problémy, kde sú známe okrajové podmienky. Každá párna spojitá funkcia definovaná na intervale od $-L$ do L sa dá rozvíť ako

$$f(x, t) = \frac{1}{2}a_0(t) + \sum_{n=0}^{\infty} a_n(t) \cos\left(\frac{n\pi x}{2L}\right).$$

Skúste si dosadením tohto vzťahu spočítať $\int_{-L}^L \cos\left(\frac{m\pi x}{2L}\right) f(x, t) dx$.

3. Na výpočet použijete rovnicu vedenia tepla $\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{k}{c\rho} \nabla^2 T$. Odporúčame skúsiť si ju odvodiť.
4. Pokiaľ máme funkciu viacerých premenných, jedným s najpopulárnejších trikov je ich separácia. V praxi to znamená, že si rozložíme funkciu ako $f(x, y) = X(x)Y(y)$, teda odseparujeme závislosti jednotlivých premenných.



Obr. 1: RLC obvod

5. Napokon, ak je rozvoj funkcie, o ktorej nevieme veľa povedať, príliš dlhý, niekedy je dominantný člen to jediné, čo má zmysel uvažovať pre odhad výsledku.¹

FX 12 Chladnutie koľajnice

V predošlom príklade sme spočítali, ako prebieha chladnutie bloku železa, a pripravili sme sa na grilovačku. Bohužiaľ, vo FKS miestnosti sme zistili, že náš blok sa niekde stratil. To ale nevadí, pretože niekto nakúpil kusy koľajníc. Chceli by sme tieto koľajnice opäť použiť na grilovanie, ale nevieme nájsť nikoho, kto by vedel analyticky vypočítať, ako dlho ich treba držať vo vode, aby sa ochladili na správnu grilovaciú teplotu.

Vašou úlohou je spočítať dobu chladnutia t_1 numericky. Koľajnicu (obr. 2) považujte za nekonečne dlhú, takže podĺžny presun tepla možno zanedbať.

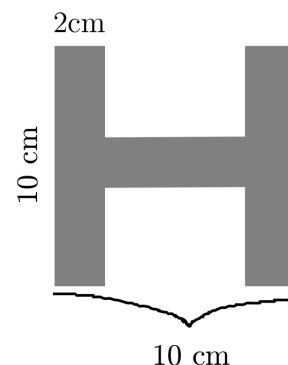
Znova použite rovnicu vedenia tepla $\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{k}{c\rho} \nabla^2 T$. Odporúčame začať stanovením si diskretných intervalov v priestore a čase Δx a Δt . Potom si nasekáme koľajnicu na štvorce o veľkosti Δx a spočítame zmenu tepelnej distribúcie za čas Δt .

Po napísaní simulácie vyberte správnu veľkosť parametrov Δx a Δt . Ak budú príliš malé, vaša simulácia bude presná, na druhej strane ale časovo náročná. Je tiež dôležité odhadnúť presnosť simulácie.

Hint: numerická druhá derivácia je

$$f''(x) = \frac{f(x + \Delta x) - 2f(x) + f(x - \Delta x)}{h^2}.$$

Ak s programovaním len začínate, môže vám pomôcť [Úvod do programovania](#) z Jarnej školy FX 2014.



Obr. 2: Prierez koľajnice

¹To isté poznáte ako $\sin x \approx x$ v prípade Taylorovho rozvoja.