powered by FKS

FX [f:ks]

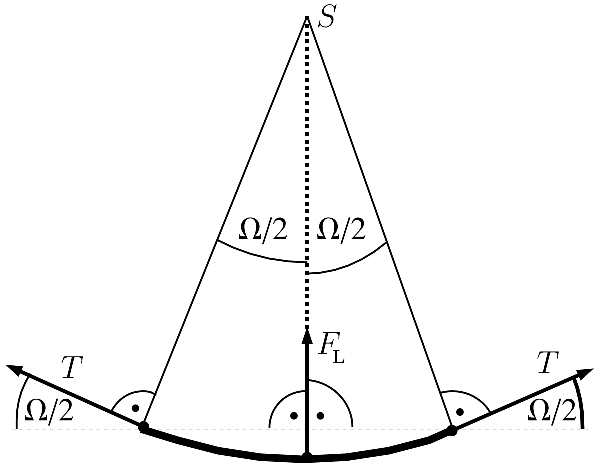
Vzorové riešenia a výsledky 1. série 3. ročníka

FX1 Lano (Opravoval Jakub)

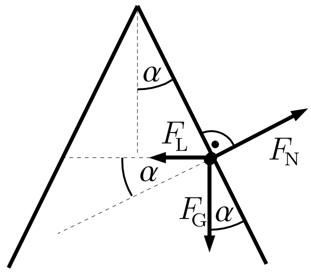
Horolezec Tomáš zliezol dokonale hladkú horu tvaru kužeľa s vrcholovým uhlom 2α, ale zabudol si na nej navlečenú kruhovú slučku lana hmotnosti m. Akou silou je napínaná táto slučka?

Hneď na úvod poviem, že tá historka s týpkom, čo zliezol horu, nám nijako nedeterminuje polohu lana, ktorú máme skúmať. Intuitívne všetci tušíme, že lano sa bude prirodzene rado nachádzať v horizontálnej rovine. Inak by zrejme malo väčšiu potenciálnu energiu v tiažovom poli Zeme (aj keď ma vôbec nenapadá, ako to jednoducho ukázať; inak ani zložito ma to nenapadá :-)).

Poďme k veci: máme lano vo vodorovnej rovine. Príklad vykazuje symetriu voči osi kužeľa. To využijeme – totiž môžeme skúmať ľubovoľný kúsok lana o dĺžke $R\Omega$ a hmotnosti $\frac{m}{2\pi}\Omega$, ktorý obtáča kužeľ $R/\operatorname{tg}\alpha$ pod jeho vrcholom a uhol, ktorý mu prislúcha je Ω. Viď obrázok zhora, kde je do bodu S projektovaná rotačná os našej hory.



Na tomto obrázku aj pekne vidíme napätie v lane T, ktoré sa každý kúsok snaží natiahnuť. Nakoľko je situácia rotačne symetrická, tak je jasné, že na každý jeden kúsok lana musia pôsobiť z oboch strán rovnaké napätia. Výborne, potom ich výslednica, viď obrázok, smeruje do rotačnej osi a má veľkosť $2T \sin \frac{\Omega}{2}$, čo sa však pre malé Ω (a ja si môžem zvoliť Ω ľubovoľne malé!) rovná $T\Omega$. To je sila F_L z druhého obrázka, ktorý ukazuje situáciu zboku. Ešte vyjadrím $F_G = \frac{mg\Omega}{2\pi}$. Keďže sa náš sledovaný kúsok lana nehýbe, tak musia byť sily v rovnováhe.



To nutne platí aj pre zložky síl kolmé na normálu kužeľa v mieste študovaného lana (čiže kolmé na F_N – lebo to je normálová sila, keďže trenie je nulové), z čoho dostanem podmienku $F_G \cos\alpha = F_L \sin\alpha$, čo mi po vyjadrení F_G a F_L dá

$$\frac{mg\Omega}{2\pi}\cos\alpha = 2T\Omega\sin\alpha, \qquad \text{a teda} \qquad T = \frac{mg}{2\pi \operatorname{tg}\alpha}.$$

K tomuto výsledku sa dá dopracovať trošku trikovo aj iným zaujímavým a častokrát veľmi efektívnym spôsobom cez virtuálne práce. Metóda virtuálnych prác vychádza z toho, že teleso je v rovnovážnej polohe vtedy, keď malým posunutím nič na svojej potenciálnej energii nestratí ani nezíska (do prvého rádu).

Skúsme teda uvažovať pružné lano napínané silou T. Pozrime sa teraz, čo sa stane s lanom, keď ho posunieme o kúsok, označme h, nadol (nahor). Potom sa polomer slučky zväčší (zmenší) o $h \operatorname{tg}\alpha$ a teda energia lana v dôsledku jeho pruženia stúpne (klesne) o približne $2\pi h \operatorname{tg}\alpha T$. Zároveň ale klesne (stúpne) jeho potenciálna energia v tiažovom poli, a to o mgh. Má platiť

$$2\pi h \operatorname{tg}\alpha T - mgh = 0 \qquad \Rightarrow \qquad T = \frac{mg}{2\pi \operatorname{tg}\alpha},$$

čo je náš predošlý výsledok. Tu by bolo fajn ešte urobiť diskusiu o tom, či to môžeme urobiť pre absolútne tuhé lano. Odpoveď sa mi hľadať nechce. Ani netreba, lebo vo svete absolútne nepružné laná neexistujú – čiže diskusia by nemala veľkú hodnotu. A pre malé natiahnutia môžeme vždy aproximovať, že napätie lana sa veľmi nezmení (stačí naťahovať o infinitenzimálne málo), čo náš postup odobruje. Hotovo.

FX2 Guľka (Opravoval Kubus)

Máme vodivú izolovanú guľovú škrupinu nabitú nábojom Q. Peťo má bodový náboj rovnakej veľkosti a chce si ho niekam odložiť. Nájdite všetky jeho možné polohy v priestore také, že naň nepôsobí žiadna sila.

Zamyslime sa najprv, čo to vlastne znamená, že guľová škrupina je vodivá. Znamená to, že náboj sa po nej môže voľne pohybovať. Keď teda niekde do priestoru umiestnime bodový náboj Q aj s jeho príspevkom k eletrickému poľu, náboj na škrupine to bude cítiť a začne sa nejako hýbať. Bude sa premiestňovať po škrupine až dovtedy, kým ho elektrické sily neprestanú nútiť (nútiť hýbať sa po škrupine – môžu ho tlačiť von zo škrupiny, lebo tomu zabraňujú vnútorné sily v materiáli škrupiny). Elektrické pole na škrupine bude teda všade kolmé na jej povrch.

Toto je celkom užitočná informácia, ale zrátať rozmiestnenie náboja na škrupine len z nej by bolo dosť zložité. Pozrime sa na jej inú formuláciu. Potenciál na celej škrupine musí byť rovnaký, pretože v opačnom prípade by náboj z miest s vyšším potenciálom tiekol na miesta s nižším potenciálom (až kým by sa to nevyrovnalo). Toto je už trochu krajšia podmienka, stále z nej však nevieme zrátať rozmiestnenie náboja na škrupine. Poďme si ho teda istým spôsobom tipnúť.

Možno poznáte metódu zrkadlenia pri počítaní interakcie náboja a vodivej roviny, skúsme sa ňou inšpirovať. Keby sme vodivú škrupinu nahradili nejakým bodovým nábojom, ktorý by spôsoboval konštantný elektrický potenciál akurát v mieste pôvodnej škrupiny, a keby tá konštantná hodnota bola rovnaká ako v prípade pôvodnej škrupiny, vedeli by sme ju ním potom nahradiť a postupovať podobne ako v príklade s vodivou rovinou. Umiestnime teda náš náboj Q do počiatku súradnicovej sústavy a uvažujme druhý náboj q v bode $(a, 0)$. Elektrický potenciál v bode (x, y) bude potom

$$V = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{\sqrt{(x-a)^2+y^2}},$$

používame štandardný vzťah pre potenciál bodového náboja $V = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{D}$, kde D je vzdialenosť od náboja, pričom v nekonečne položíme potenciál nulový. Skúsme nájsť všetky body, kde má potenciál nejakú pevnú hodnotu V_0. Vlastne, ak nahliadneme do nasledovných výpočtov, zistíme, že oveľa jednoduchšie sa nám budú hľadať body, kde bude mať potenciál hodnotu 0. (S nenulovým V_C by boli rovnice dosť škaredé.) Upravujeme a dostaneme

$$\begin{aligned} -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{\sqrt{(x-a)^2+y^2}} &= 0 \\ Q\sqrt{(x-a)^2+y^2} &= -q\sqrt{x^2+y^2} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
Q^2(x-a)^2 + Q^2y^2 - q^2x^2 - q^2y^2 &= 0 \\
x^2(Q^2-q^2) - 2Q^2xa + Q^2a^2 + y^2(Q^2-q^2) &= 0 \\
(Q^2-q^2)(x^2 - 2\tfrac{Q^2a}{Q^2-q^2}x + \tfrac{Q^4a^2}{(Q^2-q^2)^2}) + y^2(Q^2-q^2) &= \tfrac{Q^4a^2}{Q^2-q^2} - Q^2a^2 \\
(x - \tfrac{Q^2a}{Q^2-q^2})^2 + y^2 &= \tfrac{Q^2q^2a^2}{(Q^2-q^2)^2}.
\end{aligned}
$$

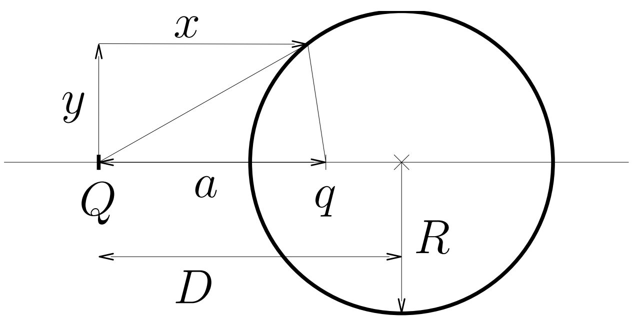
Aha. Množina všetkých bodov (v rovine xy), v ktorých bude potenciál nulový, bude akurát kružnica so stredom v $(\frac{Q^2a}{Q^2-q^2}, 0)$ a polomerom $\frac{Qqa}{Q^2-q^2}$. Ak by sme si to celé napísali v priestorových súradniciach, alebo ak si uvedomíme symetriu celej situácie podľa osi x, zistíme že v troch rozmeroch je táto množina guľová škrupina (sféra) s rovnakým stredom a polomerom. Ak teda potrebujeme mať nulový potenciál na škrupine s polomerom R a stredom vo vzdialenosti D od nášho náboja Q, pre parametre a a q pridaného náboja musí platiť

$$
\frac{Q^2a}{Q^2-q^2} = D \qquad \text{a} \qquad \pm\frac{Qqa}{Q^2-q^2} = R.
$$

Jednoduchým riešením týchto rovníc dostaneme

$$
q = \pm Q\frac{R}{D} \qquad \text{a} \qquad a = D - \frac{R^2}{D},
$$

pričom z $\pm$ si vyberieme $-$, pretože znamienko náboja q musí byť opačné ako náboja Q. Toto môžeme vidieť napríklad z druhej rovnice v predchádjúcich úpravách, jej umocnením na druhú sa ďalej táto informácia stratila. Celá situácia bude vyzerať napríklad ako na tomto obrázku:

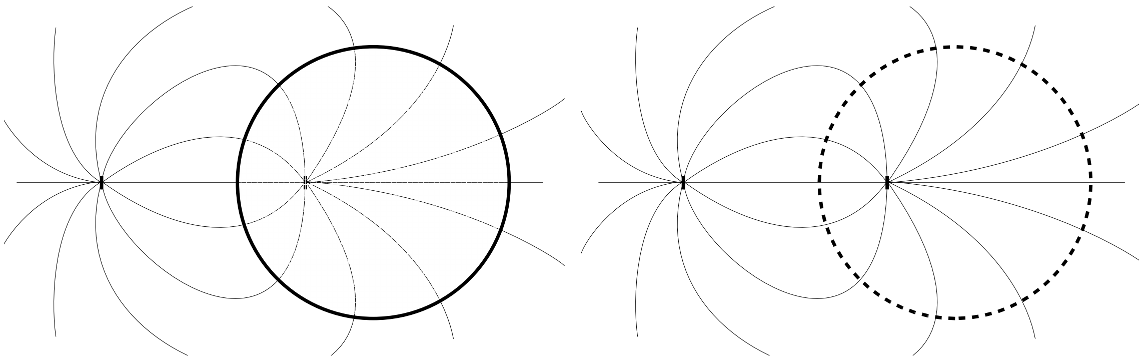


Zatiaľ nič zložité. Priam až veľmi pekné, všimnime si najmä to, že náboj q bude vo vzdialenosti $\frac{R^2}{D}$ od stredu guľovej škrupiny, na priamke spájajúcej stred škrupiny a náš náboj Q.[1] Ak bol Q vonku, q bude vnútri a naopak. Čím bližšie bude ku škrupine náboj Q, tým bližšie k nej bude q.

[1] Ak poznáte sférickú (kružnicovú) inverziu z geometrie, polohu náboja q nájdeme presne zobrazením polohy náboja Q sférickou inverziou.

Ak má naša teda guľová škrupina práve nulový potenciál (čo mimochodom znamená, že sa správa akoby bola uzemnená), môžeme použiť „zrkadliaci trik“ podobne ako pri vodivej rovine. (Ak ste takýto príklad nevideli, skúste si potom spočítať silu, ktorou pôsobí nekonečná vodivá rovina na náboj vedľa nej.)

Takže trik: predstavme si dve situácie. V jednej máme náboj Q a vodivú guľovú škrupina s nulovým potenciálom (nech je náboj vonku zo škrupiny, ak je vnútri, vieme argumentovať podobne). V druhej máme náboj Q a druhý náboj q vo vypočítanej polohe vzdialenej a tak, aby v mieste guľovej škrupiny bol nulový potenciál. V oboch situáciách máme v oblasti priestore *mimo* našej guľovej škrupiny presne rovnaké tzv. okrajové podmienky: potenciál je nulový v nekonečne a na škrupine, okrem toho je všade prázdny priestor okrem bodového náboja Q. Z teórie elektrostatických rovníc (Poissonových, Laplaceových rovníc) vyplýva, že takáto situácia môže mať nanajvýš jedno riešenie pre hodnotu potenciálu, a teda aj hodnotu eletrického poľa. Inými slovami, v oblasti mimo gule je nám jedno, či je nulový potenciál na jej okraji spôsobený vodivou škrupinou alebo nábojom q, všetky elektrostaticky merateľné veličiny budú rovnaké. Okrem iného bude rovnaká aj sila pôsobiaca na náš náboj Q:



Fúú. Viem, že toto vysvetlenie nie je ani náhodou úplné alebo korektné, ale bez sofistikovanejšej teórie elektrostatiky (o Poissonovej rovnici pre potenciál a podobne) sa nedá poriadnejšie formulovať, a bez pokročilej teórie diferenciálnych rovníc sa asi nedá rozumne dokázať. Ale snáď sa to intuitívne pochopiť dá, a je to celkom užitočný trik.[2] (Najmä v prípade už spomínanej vodivej roviny namiesto vodivej gule.)

Každopádne, ak by mala naša vodivá škrupina nulový potenciál, vieme silu pôsobiacu na náboj Q ľahko vypočítať – škrupinu jednoducho nahradíme nábojíkom q a silu zrátame pomocou Coloumbovho

[2] Záujemcom odporúčam si pozrieť si niečo o medóde zrkadlenia v literatúre, napríklad vo Feynmanovych prednáškach z fyziky, 2. diel, 6. kapitola. Alebo na internete, v angličtine "method of images".

zákona. Lenže čo keď je jej potenciál nenulový? Alebo, inak povedané, čo ak musí mať iný celkový náboj, aby mala nulový potenciál? Nič jednoduchšie. Ak by škrupina musela mať celkový náboj Q' na to, aby mala nulový potenciál, stačí, keď na pôvodnú škrupinu rovnomerne rozmiestnime náboj $Q' - Q$, a je to. Alebo naopak, stačí, keď na škrupinu s nulovým nábojom rovnomerne rozmiestnime náboj $Q - Q'$, a máme našu škrupinu s nábojom Q.[3] (†)

Už len treba zistiť, aký náboj musí mať škrupina, aby mala nulový potenciál.Znova nateraz predpokladajme že Q je vonku. Spomeňme si, že ak sa pozeráme len na priestor okolo škrupiny s nulovým potenciálom môžeme si ju nahradiť vypočítaným nábojom q. (Samozrejme, náboj Q musí byť tam kde sme s ním rátali pri počítaní polohy a veľkosti q a a, nemôžeme prinášať nové náboje ani inak meniť situáciu – môžeme iba merať elektrické pole a podobne.) Ak teda obalíme našu škrupinu do myslenej uzavretej plochy a spočítame celkový tok elektrického poľa touto plochou, dostaneme rovnaký výsledok, ako keby sme to spravili pre náboj q. No ale z Gaussovho zákona bude tento tok presne $\frac{Q_{\text{dnu}}}{\varepsilon_0}$, kde Q_{dnu} je celkový náboj vnútri plochy. Takže v oboch situáciach je celkový náboj vnútri plochy rovnaký, a teda celkový náboj na škrupine s nulovým potenciálom je presne q.

A máme to. Podľa úvahy (†) sa naša vodivá guľová škrupina bude správať ako superpozícia vypočítaného „náhradného“ náboja q a rovnako veľkej guľovej škrupiny *rovnomerne nabitej* nábojom $Q - Q' = Q - q$. Keďže Q je z nej vonku, táto rovnomerne nabitá škrupina sa bude správať ako bodový náboj rovnakej veľkosti.[4] Náhradný náboj q bude vnútri škrupiny, čiže rovnakým smerom od Q ako stred škrupiny (sily sa preto budú sčítavať). Celková sila pôsobiaca na Q je teda

$$\begin{aligned} F &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Qq}{a^2} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q(Q-q)}{D^2} \\ &= -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q^2\frac{R}{D}}{D^2(1-\frac{R^2}{D^2})^2} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q^2(1+\frac{R}{D})}{D^2} \end{aligned}$$

Ak má byť $F = 0$, potom

$$\begin{aligned} \frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0 D^2}\frac{\frac{R}{D}}{(1-\frac{R^2}{D^2})^2} &= \frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0 D^2}(1+\tfrac{R}{D}) \\ 0 &= (1+\tfrac{R}{D})(1-\tfrac{R^2}{D^2})^2 - \tfrac{R}{D} \end{aligned}$$

[3]Uvedomme si, že škrupina má všade rovnaký potenciál, či už má hocijaký celkový náboj. Ak na ňu teda pridáme nejaký náboj navyše, tento sa rozmiestni homogénne po celej škrupine.

[4]Podobne ako rovnomerne nabitá guľa sa správa ako bodový náboj s rovnakým celkovým nábojom.

Označme $\alpha = \frac{R}{D}$ a dostaneme rovnicu piateho stupňa pre α. Našťastie sa dá napísať ako súčin kvadratickej a kubickej rovnice,

$$\begin{aligned} 0 &= (1+\alpha)(1-\alpha^2)^2 - \alpha = \alpha^5 + \alpha^2 - 2\alpha^3 - 2\alpha^2 + 1 \\ &= (\alpha^2 + \alpha - 1)(\alpha^3 - \alpha - 1). \end{aligned}$$

Jej jediný kladný reálny koreň menší ako 1 (stále uvažujeme Q vonku zo škrupiny a teda $R < D$) je práve koreň $\alpha = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ prvého, kvadratického deliteľa. V tom prípade $D = \frac{R}{\alpha} = R\frac{\sqrt{5}+1}{2}$.

Pozor, keď je náboj Q vnútri škrupiny, nemôžeme použiť presne tú istú úvahu. Totiž jednoznačnosť riešenia a teda „rovnakosť situácie" pre vodivú škrupinu a pre náhradný náboj je teraz zabezpečená iba vnútri škrupiny. S našou gaussovskou plochou sa teda nemôžeme hrať mimo škrupiny, a hranie sa vnútri nám na určenie náboja Q' škrupiny príliš nepomôže (rozmyslite si).

Náboj Q' však jednoducho zistíme inou úvahou. Keď je na škrupine nulový potenciál a mimo nej je len prázdny priestor, musí byť nulový potenciál aj všade okolo nej. (Spomeňte si napríklad na jednoznačnosť riešenia mimo nej, alebo si rozmyslite ako by mohol vzniknúť nenulový potenciál len tak v prázdnom priestore.) Takže Gaussova plocha okolo škrupiny nameria nulový celkový náboj (teraz sa vôbec nerozprávame o nahradzovaní nábojom q, len o pôvodnej situácii, takže nám nič nebráni hrať sa s gaussovskými plochami aj mimo škrupiny), čiže celkový náboj škrupiny Q' musí byť rovný $-Q$, aby vyrovnal náboj Q vnútri.[5]

Teraz sa znova môžeme pustiť do výpočtov podľa úvahy (†). Máme teda Q vnútri škrupiny a vodivú škrupinu sme nahradili nábojom q a rovnomerne nabitou škrupinou s nábojom $Q - Q' = Q - (-Q) = 2Q$. Ale vlastne – táto rovnomerne nabitá škrupina na náboj Q nebude pôsobiť žiadnou silou, lebo tento je v jej vnútri! [6] Takže sila na náboj Q bude pochádzať len od náhradného náboja,

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Qq}{a^2}.$$

Toto nikdy nie je nula, keďže $q > 0$.

Okrem toho, že sme zabudli na špeciálny prípad $D = 0$ – vtedy a vôbec nie je definované a celé doterajšie riešenie nefunguje – ale vtedy je náboj Q v strede škrupiny a zo symetrie je jasné, že naň nebude pôsobiť žiadna sila. A tiež sme zabudli na špeciálny prípad $Q = 0$, keď naň zjavne nebude pôsobiť žiadna sila v ľubovoľnej polohe.

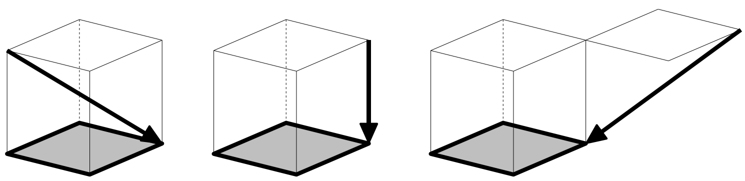
[5]Možno už tušíte, že na Q' nám nakoniec vôbec nebude záležať, ale chcel som ukázať aj túto úvahu.

[6]Spomeňte si napríklad na analogický fakt, že gravitačné pole vnútri homogénnej guľovej škrupiny je nulové.[7]

Na náboj teda nebude pôsobiť žiadna sila ak bude sám nulovej veľkosti, ak bude v strede škrupiny, alebo vo vzdialenosti $\frac{\sqrt{5}+1}{2}R$ od jej stredu.

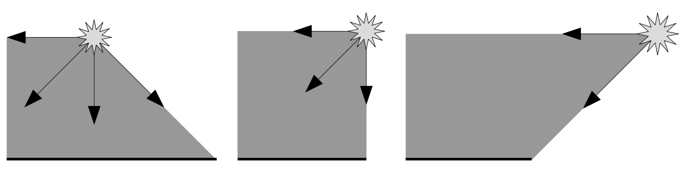
FX3 Svetlomety (Opravoval Bzdušo)

Bzdušo má stôl tvaru štvorca a chystá sa ho osvetliť zdrojom so svietivým výkonom P, a to dokonca takým, čo žiari do všetkých smerov rovnako. Týmto zdrojom sa blíži k rohu stola troma rôznymi spôsobmi (viď obrázok). Pri každom z nich vypočítajte hodnotu ku ktorej sa blíži svietivý výkon dopadajúci na stôl, keď sa zdroj blíži k rohu stola. (Všetky hrany na obrázku okrem šípok sú rovnako dlhé a uhly medzi nimi pravé, útvary na obrázku sú teda kocky. Šípky naznačujú smer pohybu zdroja. Stôl je vyznačený šedo.)

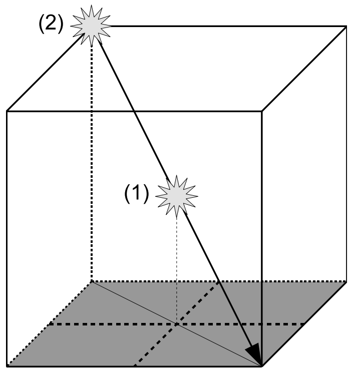


Úvodom hneď upozorním, že táto úloha bola naozaj veľmi ľahká a vzorák je taký dlhý len kvôli tomu, aby bol prístupný všetkým riešiteľom. Úloha sa dala riešiť viacerými spôsobmi, v tomto vzoráku ukážem najzaujímavejší a najtrikovejší z nich. Skôr, než sa pustíme do samotného riešenia, skúsme sa zamyslieť nad tým, prečo by mal byť svetelný výkon dopadajúci na povrch stola v jednotlivých prípadoch rôzny.

Keď sa budeme limitne približovať k rohu stola, môžeme si postupne meniť mierku obrázku tak, že vzdialenosť bodu od stola bude vyzerať rovnaká, ale stôl sa bude zväčšovať. Je zrejmé, že v limite bude povrch stole prakticky zaberať celú štvrťrovinu. Tiež je zrejmé, že na miesto stole bezprostredne pod bodovým zdrojom svetla, bude dopadať značná časť svetelného výkonu. Situácie sú teda rôzne v tom, že v prvom prípade sa nachádzame nad stolom, v druhom prípade nad rohom a v treťom prípade sme niekde mimo. Komu tieto slová nestačia, ponúkam dvojrozmernú analógiu, kde svetlo dopadá na povrch polpriamky.



Vidno, že v dvojrozmernom svete by v prvom prípade na priamku dopadlo $\frac{3}{8}$ celkového výkonu, v druhom $\frac{1}{4}$ a v treťom len $\frac{1}{8}$ celkového svetelného výkonu. Pritom sme sa blížili vždy k tomu istému koncu nejakej úsečky, ale z rôznych smerov. Vráťme sa však späť k stolu tvaru štvorca a všimnime si nasledujúce pekné polohy.



Všimnime si najprv polohu (1) na obrázku. Otázka znie, aká časť dopadá na štvorec, ak je zdroj svetla umiestnený v strede jemu prislúcahjúcej kocky. Zo symetrie musí na každú stenu kocky dopadať rovnaký podiel svetelného výkonu. Kocka má 6 stien, takže v tomto prípade dopadá na povrch stola $\frac{1}{6}$ celkového svetelného výkonu.

Teraz sa pozrime sa polohu (2). Vidíme, že sa má voči veľkému štvorcu rovnako, ako bod uprostred kocky voči jednej štvrtine tohto štvorca: z bodu (2) dopadne na veľký štvorec rovnaký podiel svetla ako zo stredu kocky na štvrtinu jednej steny. Ale takýchto plôch je na povrchu kocky 24, preto z bodu (2) dopadne na povrch nášho štvorca $\frac{1}{24}$ celkového svietivého výkonu. To nám zatiaľ vedieť stačí. Mimochodom, je zrejmé, že keď podstavu rozdelíme po naznačenej uhlopriečke, tak na obe časti podstavy bude v oboch prípadoch dopadať rovnaký podiel svetelného výkonu, čiže pre (1) by to bola $\frac{1}{12}$ a pre (2) $\frac{1}{48}$.

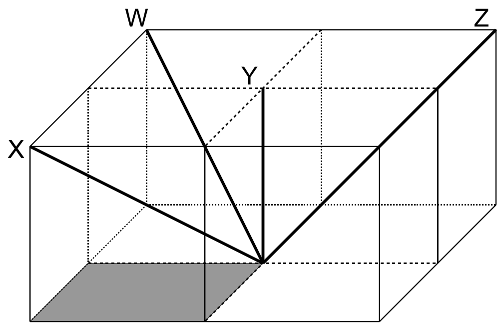
Teraz si predstavme, že sa po zakreslenej šípke v tom istom obrázku pohybuje k vrcholu štvorca. Aká časť svetelného výkonu dopadne na jeho povrch teraz? Konečne sme sa teda dostali k samotnej úlohe v zadaní. Konkrétne k prvej situácii. Zo symetrie musí na dolnú, prednú a pravú stranu kocky dopadať rovnaký svetelný výkon a rovnako takisto musí rovnaký svetelný výkon dopadať aj na hornú, ľavú a zadnú stenu kocky. Lenže tieto výkony už máme porátané, pretože ide o situáciu (2) z obrázka – vybratý vrchol a príslušné steny sú síce iné, ale majú sa k sebe rovnako. Môžete si overiť že vhodnými symetriami môžeme situáciu pretransformovať na tú v obrázku. Navyše, celkový svetelný výkon, ktorý dopadá na jednotlivé steny kocky je zrejme rovný P. Označme podiel svetelného výkonu, ktorý dopadne v prvej situácii v zadaní na povrch štvorca ako x. Musí platiť rovnosť

$$3 \cdot x + 3 \cdot \tfrac{1}{24} = 1, \qquad \text{čiže} \qquad x = \tfrac{7}{24}.$$

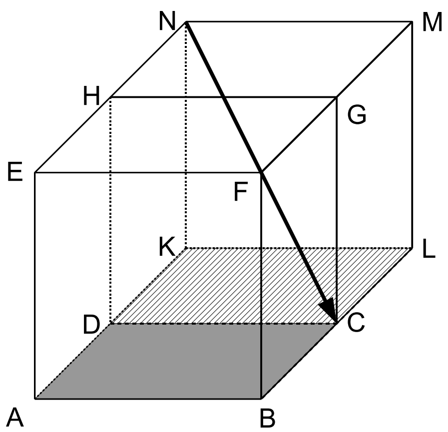
Vidíme, že to vôbec nebolo namáhavé. Druhú situáciu zo zadania opäť vyriešime hravo. K rohu stola sa blížime priamo zhora. Ak budeme limitne blízko k rohu, štvorec bude prakticky zaberať celú stvrťrovinu. My si môžeme dokresliť 3 ďalšie rovnaké štvrťroviny, pričom na každú dopadne rovnaká časť svetelného výkonu. Rovnaké 4 štvrťroviny si môžeme dokresliť aj nad náš zdroj. Keďže sa tiahnu neobmedzene ďaleko, každý[8] lúč musí na niektorú z nich dopadnúť. Dovedna máme 8 rovnocenných plôch. Na každú teda musí dopadať rovnaký podiel y svetelného výkonu, čiže

$$y = \tfrac{1}{8}.$$

Zostáva nám posledná, najkomplikovanejšia možnosť. Ale aj tú hravo zvládneme. Cestou však budeme musieť spočítať svetelný výkon dopadajúci na povrch štvorca v ešte jednej situácii. V nasledujúcom obrázku je vyznačený náš štvorec a 4 body X,Y,Z,W z ktorých sa blížime k rohu tohto štvorca. Príslušné podiely svetelného výkonu, v prípade, že sa z daných bodov limitne približujeme k vrcholu štvorca označíme ako x, y, z, w.



Už vieme $x = \frac{7}{24}$ a $y = \frac{1}{8}$. K určeniu zvyšných výkonov použijeme usporiadanie na nasledujúcom obrázku.



[8]okrem dokonale vodorovných, tých je však nekonečne málo:)

Budeme sa limitne blížiť z bodu N do bodu C. Celkový výkon, ktorý dopadá ná steny kvádra ABKLEFMN musí byť P. Ale výkony dopadajúce na jednotlivé štvorčeky už skoro všetky vieme. Tu sú:[9]

$$\frac{P_{ABEF}}{P} = \frac{P_{EFGH}}{P} = \frac{P_{ADHE}}{P} = \frac{P_{KLMN}}{P} = \frac{P_{KDHN}}{P} = \frac{P_{HGMN}}{P} = \frac{1}{24},$$

$$\frac{P_{DCLK}}{P} = \frac{P_{CLMG}}{P} = \frac{7}{24},$$

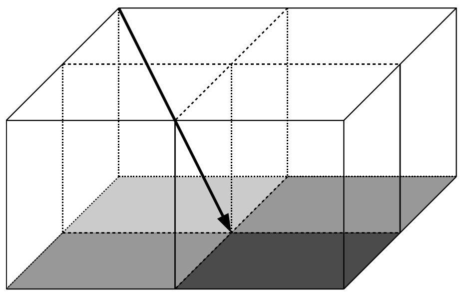
a nakoniec

$$\frac{P_{ABCD}}{P} = \frac{P_{BCFG}}{P} = w$$

sú naše neznáme. Dostávame rovnosť

$$6 \cdot \tfrac{1}{24} + 2 \cdot w + 2 \cdot \tfrac{7}{24} = 1,$$

čo je lineárna rovnica s riešením $w = \frac{1}{12}$. Už nám len stačí určiť z a vyhrali sme. Na to vezmeme 4 susedné kocky ako na nasledujúcom obrázku:



Keď budeme limitne blízko k povrchu, dolné 4 štvorce sa budú javiť ako celá rovina a dopadne na ne polovica celkového svietivého výkonu. To znamená, že $x + 2w + z = \frac{1}{2}$. Ak dosadíme, za x a w, ktoré už poznáme, dostávame $z = \frac{1}{24}$. Vlastne to vôbec to nebolo ťažké, len bolo treba pokúsiť sa nájsť nejakú fintu.

[9]Všimnime si, že rovnosť vyjadruje fakt o tom, že predný, zadný, horné a ľavé štvorce stien na obrázku sú voči bodu C orientované rovnako.

Výsledková listina FX po prvej sérii.

#	Riešiteľ	FX1	FX2	FX3	$\sum$
1.	Filip Kubina	5	2.5	5	12.5
2.	Michal Spišiak	5	0	5	10
3.	Lucia Simanová	5	1.5	1	7.5
4.	Lukáš Konečný	5	-	-	5
	Dávid Vendel	3	-	2	5
6.	Samuel Hapák	-	-	3.5	3.5
7.	Peter Vanya	2	-	-	2
8.	Peter Ondáč	1	0	0.5	1.5
9.	Alena Černá	0	0	0	0
10.	Zuzana Horváthová	0	0	0	0
11.	Eugen Hruška	0	0	0	0
12.	Barbora Sedlačková	0	0	0	0