powered by FKS

FX [f:ks]

Vzorové riešenia a výsledky 2. série 3. ročníka

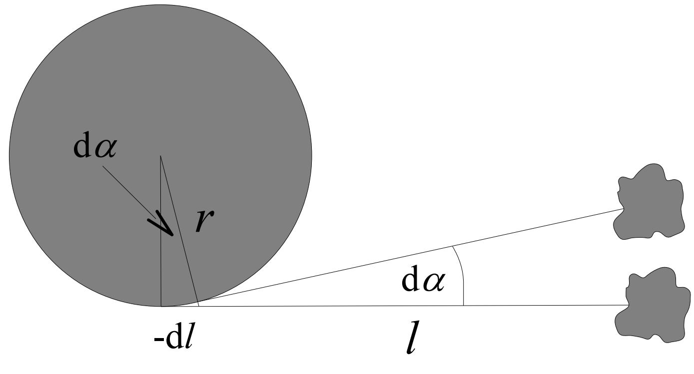
FX4 Špirála (Opravoval Bzdušo)

Fajo našiel vo vesmíre dlhý a veľmi ťažký valec s polomerom r. Na jeho plášti bol uviazaný špagát s voľnou dĺžkou L, s malým kamienkom pripevneným na druhom konci. Ako správny fyzik, Fajo natiahol špagát tak, aby sa uviazaným koncom práve dotýkal valca, a kamienku udelil rýchlosť v kolmú na špagát tak, aby sa začal namotávať v rovine kolmej na os valca. Za aký čas sa špagát úplne namotá na valec?

Čaute decká. Túto úlohu poslali len traja riešitelia, napriek tomu si dovoľujem tvrdiť, že v tejto sérii bola snáď výpočtovo najjednoduchšia. Ako je to možné, keď sa kamienok na konci pohybuje po akejsi špirálu-pripomínajúcej dráhe? Je pravda, že dráha vyzerá na prvý pohľad hrozivo, ale nás vôbec nemusí zaujímať jej tvar. Ukážeme si, ako sa dala úloha poriešiť veľmi jednoducho.

Mnohé úlohy sa veľmi zjednodušia, ak nájdeme nejaký zákon zachovania. Zdá sa to neuveriteľné, ale náš kamienok sa bude celý čas pohybovať počiatočnou rýchlosťou. Jediná sila, ktorá naň pôsobí, je ťah v špagáte, a ten je kolmý na smer pohybu. Nekoná preto žiadnu prácu a energia kamienka sa nemení. Keďže sme vo vesmíre, ďaleko od gravitačných polí a odporových prostredí, jedinou relevantnou formou energie je kinetická energia. Navyše valec, o ktorý je kamienok pripevnený, je veľmi ťažký, takže nebude odoberať skoro žiadnu energiu. (Rozmyslite si!) Rýchlosť kamienka sa preto meniť nebude.

Máme poznatok, s ktorým sa dajú robiť míľové kroky. Obzrime si situáciu na obrázku v čase, keď dĺžka nenamotaného povrázku je l a sledujme, ako sa zmení situácia o čas $\mathrm{d}t$.



Filip Kubina riešil túto úlohu nasledovne: Všimnime si, že za tento čas sa špagát otočí o uhol $\mathrm{d}\alpha$ a o ten istý uhol sa otočí aj bod, v ktorom sa špagát dotýka valca. Špagát sa skráti o tú svoju časť, ktorá sa namotá na valec, preto

$$\mathrm{d}l = -r\mathrm{d}\alpha.$$

V každom okamihu akoby sa špagát otáčal okolo bodu, kde sa dotýka valca, rýchlosťou v. Možno preto povedať, že uhlová rýchlosť kameňa okolo tohto bodu[1] je $\omega = \frac{v}{l}$, kde l je okamžitá dĺžka nenamotanej časti špagátu. Z pohybu kameňa kožmo potom vyčítať

$$\mathrm{d}\alpha = \omega \mathrm{d}t = \frac{v}{l}\mathrm{d}t.$$

Ak toto dosadíme to vzťahu pre skrátenie voľnej časti špagátu, dostaneme

$$\mathrm{d}l = -r\frac{v}{l}\mathrm{d}t.$$

Rovnicu rozseparujeme a zintegrujeme:

$$\int_L^0 l\,\mathrm{d}l = \int_0^T -rv\,\mathrm{d}t.$$

To vedie rýchlou cestou k výsledku

$$\frac{L^2}{2} = rvT, \qquad \text{čiže} \qquad T = \frac{L^2}{2rv}.$$

Iný prístup k riešeniu zvolil a k správnemu výsledku sa dopracoval Jan Hermann. Pozrime sa na situáciu v rovine, kde sa namotáva špagát. Ak si ju navyše natočíme tak, že na začiatku sa špagát dotýkal valca v bode $\mathbf{A} = [r; 0]$ a kamienok bol v bode $\mathbf{B} = [r; L]$, kamienok sa začne pohybovať proti smeru hodinových ručičiek. Voľná časť špagátu bude mať v závislosti od uhlu namotania α dĺžku $l = L - \alpha r$. Polohu kamienka budú určovať dva vektory: poloha bodu, kde sa špagát dotýka valca vzhľadom na stred valca a poloha kamienka vzhľadom na tento styčný bod. Poloha kamienka v našej súradnicovej sústave je dúčtom týchto vektorov, použitím čoho sa možno dopracovať k rovniciam

$$x = r\cos\alpha - (L - \alpha r)\sin\alpha,$$

$$y = r\sin\alpha + (L - \alpha r)\cos\alpha.$$

[1] Ten sa s časom síce mení, ale to nie je žiadnou prekážkou.

Keď sa uhol zmení o dα, obe súradnice sa máličko posunú a z Pytagorovej vety možno povedať, že prejdená dráha je

$$\mathrm{d}s = \sqrt{(\mathrm{d}x)^2 + (\mathrm{d}y)^2} = \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\alpha}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\alpha}\right)^2}\,\mathrm{d}\alpha.$$

Na začiatku bolo lano navinuté o nulový uhol, na konci pohybu bude navinuté o uhol $\frac{L}{r}$. Prejdená dráha je preto jednoducho

$$s = \int_0^{\frac{L}{r}} \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\alpha}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\alpha}\right)^2}\,\mathrm{d}\alpha.$$

Jediné, čo ostáva, je porátať tie škaredo vyzerajúce derivácie, umocniť ich na druhú a odmocniť. Človek by si pomyslel, že to bude nespočítateľné, ale môžete sa presvedčiť, že po všetkých týchto úpravách dostanete pekne vyzerajúci a zintegrovateľný vzťah

$$s = \int_0^{\frac{L}{r}} (L - \alpha r)\,\mathrm{d}\alpha = \frac{L^2}{2r}.$$

Vieme, že túto dráhu prejde kamienok konštantnou rýchlosťou v, takže sa namotá za čas

$$T = \frac{s}{v} = \frac{L^2}{2rv}.$$

Čo viac dodať, prajem veľa šťastia v tretej sérii!

FX5 Stavebnica (Opravoval Kubus)

Marcelka dostala na narodeniny sadu bodových nábojov veľkosti Q a k nim všakovaké väzby. Hneď sa pustila do všelijakých experimentov a má na vás tieto otázky.

a) Dva náboje fixujeme v priestore a tretí necháme voľne pohybovať po nimi danej priamke. Aká je jeho perióda kmitov v rovnovážnej polohe?

b) Štyri náboje fixujeme vo vrcholoch štvorca, piaty necháme voľne pohybovať v nimi danej rovine. Nájdite jeho periódu kmitov v strede štvorca.

c) Vymyslite konfiguráciu fixovaných nábojov v priestore tak, aby vznikla stabilná rovnovážna poloha pre ďalší náboj, a vypočítajte jeho periódu kmitov v nejakom smere.

Začnime pekne od začiatku, najjednoduchšou časťou a. Položme si fixované náboje na os x do polôh R a $-R$. Je zrejmé, že jediná rovnovážna poloha pre tretí náboj fixovaný na osi x je presne v strede medzi nimi, teda v bode $x = 0$. Aká sila naň bude pôsobiť, ak ho vychýlime do inej polohy x? Z Coloumbovho zákona to bude

$$F = \frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{(R+x)^2} - \frac{1}{(R-x)^2}\right),$$

rozmyslite si prečo sedí znamienko sily (t.j. kladný smer sily je rovnaký ako kladný smer polohy x). Toto síce nie je lineárna závislosť sily od polohy, akú by sme pre harmonicky kmitavý pohyb očakávali, avšak pre malé výchylky x, keď môžeme členy $x^2, x^3, \dots$ zanedbať, bude závislosť približne lineárna:

$$F = \frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{(R-x)^2 - (R+x)^2}{(R-x)^2(R+x)^2} \approx \frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{-4Rx}{R^4} = -\frac{Q^2}{\pi\varepsilon_0 R^3}x.$$

Uhlovú frekvenciu kmitov zistíme pomocou analógie s hmotným bodom na pružinke, alebo si rovnicu upravíme do štandardného tvaru

$$a = \ddot{x} = -\tfrac{Q^2}{\pi\varepsilon_0 m R^3}x.$$

Napríklad dosadením všeobecného riešenia napríklad v tvare $x = A\sin(\omega t) + B\cos(\omega t)$ zistíme, že harmonické kmity s uhlovou frekvenciou kmitania $\omega = \sqrt{Q^2/(\pi\varepsilon_0 m R^3)}$ budú riešením tejto rovnice. Perióda kmitov bude teda

$$T_1 = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{\pi\varepsilon_0 m R^3}{Q^2}} = \frac{2\pi R}{Q}\sqrt{\pi\varepsilon_0 m R}.$$

V dvojrozmernom prípade postupujeme podobne; nech sú fixované náboje v polohách $[\pm_1 R, \pm_2 R]$, potom bude x-ová zložka sily pôsobiaca na voľný náboj v polohe $[x, y]$:

$$F_x = \sum_{\pm_1,\pm_2} \frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{((x\pm_1 R)^2 + (y\pm_2 R)^2)}\frac{x\pm_1 R}{\sqrt{(x\pm_1 R)^2 + (y\pm_2 R)^2}},$$

kde posledný zlomok len vyberá x-ovú zložku. Použili sme pri tom pekný zápis inšpirovaný riešením Jana Hermanna, kde sčítavame cez všetky štyri náboje, používajúc indexy na rozlíšenie znamienok pochádzajúcich z x-ovej a y-psilonovej súradnice. Ďalej už len zanedbávame všetky členy vyššieho rádu a tiež použijeme prvorádovú aproximáciu

$(1+x)^\lambda = 1+\lambda x$. (Pre odvodenie tohto vzorce si skúste si ľavú stranu zderivovať.)

$$\begin{aligned}
F_x &= \sum_{\pm_1,\pm_2} \frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0} \frac{(x \pm_1 R)}{((x\pm_1 R)^2 + (y \pm_2 R)^2)^{3/2}} \\
&\approx \sum_{\pm_1,\pm_2} \frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0} \frac{(x \pm_1 R)}{(2R^2 \pm_1 2Rx \pm_2 2yR)^{3/2}} \\
&\approx \sum_{\pm_1,\pm_2} \frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0} \frac{(x \pm_1 R)}{(2R^2)^{3/2}} (1 \mp_1 \tfrac{3}{2}\tfrac{1}{R}x \mp_2 \tfrac{3}{2}\tfrac{1}{R}y) \\
&\approx \sum_{\pm_1,\pm_2} \frac{Q^2}{8\sqrt{2}\pi\varepsilon_0 R^3} (x \pm_1 R - \tfrac{3}{2}x) \\
&= -\frac{Q^2}{4\sqrt{2}\pi\varepsilon_0 R^3} x.
\end{aligned}$$

V smere osi x bude teda stredný náboj kmitať s periódou

$$T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{4\sqrt{2}\pi\varepsilon_0 m R^3}{Q^2}} = \frac{2\pi R}{Q}\sqrt{4\sqrt{2}\pi\varepsilon_0 m R} = 2^{5/4} T_1.$$

Kvôli symetrii to bude rovnako aj pre výchylku v smere y. Všimnime si tiež, že sila F_x nezávisí od výchylky y a podobne ani F_y nezávisí od x (do prvého rádu). Preto budú malé kmity v osi x a y nezávislé, no a keďže ich perióda je rovnaká, môžete si rozmyslieť, že náboj bude v strede štvorca harmonicky kmitať v ľubovoľnom smere a to s rovnakou periódou T_2.

Ako to teda bude v priestore? Ak si napríklad skúsite porátať silu pôsobiacu na náboj blízko stredu kocky, zistíte, že nenulové členy sa objavujú až v treťom ráde – žiadne harmonické kmity sa teda nekonajú. Ba čo viac, poloha v strede kocky nie je pre voľný náboj stabilná. A ak by ste náhodou mali nervy hrať sa s ďalšími konfiguráciami, zistíte, že žiadna nemá stabilné rovnovážne polohy.

A dôvod? Predstavme si, že v nejakej konfigurácii nábojov v priestore by vznikla stabilná rovnovážna poloha pre ďalší náboj. Stabilná poloha znamená, že pre dostatočne malé výchylky sa náboj z nej vychýlený vráti naspäť. Ak by sme si teda nakreslili dostatočne malú guľovú škrupinu (sféru) okolo tejto polohy, sila pôsobiaca na náš náboj Q by musela pôsobiť smerom dovnútra. Ak je $Q > 0$, to by znamenalo, že elektrické pole na sfére smeruje do jej vnútra, a teda jeho plošný integrál po nej je záporný. Lenže Gaussov zákon nám potom hovorí, že celkový náboj vnútri tejto sféry je záporný – to však nie je možné, keďže vnútri je len prázdny priestor a nanajvýš nejaké z fixovaných nábojov $Q > 0$. (Ak $Q < 0$, argument je podobný.)

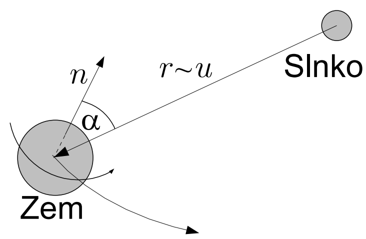
Inými slovami, v neexistuje elektrostaticky vytvorená stabilná rovnovážna poloha. Dalo by sa ešte namietať, ako je to možné, že sme v predošlých dvoch častiach dve také polohy našli. Je to možné len kvôli tomu, že sme voľný náboj viazali do danej priamky alebo roviny. Ak by sme napríklad náboj zo situácie so štvorcom nefixovali v jeho rovine, poloha v strede štvorca by bola labilná v smere kolmom na túto rovinu. Náboj by stále vedel kmitať v rovine štvorca, ale pri ľubovoľnom vychýlení z tejto roviny by ušiel do tretieho rozmeru…

FX6 Romantička (Opravoval Jakub)

Bea nedávno čítala Malého Princa a rozhodla sa, že aj jej sa veľmi páčia západy slnka. Aby jej však nezovšedneli a aby si ich patrične vychutnala, odsťahovala sa na severný pól. Tam je totiž západ slnka len raz za rok, a navyše trvá sakramentsky dlho. Ozaj, ako dlho?

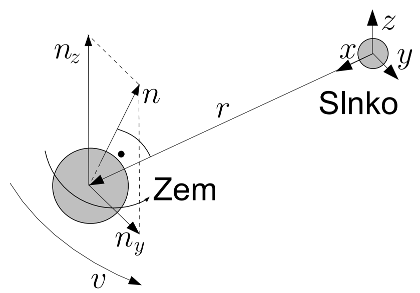
Tento príklad vyriešim za výdatnej pomoci vektorov a šikovných operácií s nimi.

Označím si $\mathbf{n}$ jednotkový vektor v smere zemskej osi. Tento vektor je kolmý na povrch Zeme na póloch. Teda je to normálový vektor dotykovej roviny severného pólu. Ďalej označím $\mathbf{r}$ polohový vektor Zeme voči Slnku. Vektor $\mathbf{r}$ predelený svojou dĺžkou bude jednotkový vektor v smere zo Slnka do stredu Zeme, označím ho $\mathbf{u}$. Potom platí, že skalárny súčin $\mathbf{n}\cdot\mathbf{u} = \cos(\pi-\alpha) = -\cos\alpha$, kde uhol α je uhol medzi zvislicou na severnom póle a spojnicou Zem-Slnko. Našou úlohou je nájsť čas, za ktorý sa tento zmení z hodnoty $90° - \gamma$ (vtedy sa slnečný kotúč dotkne obzoru) na $90° + \gamma$ (vtedy sa práve celý slnečný kotúč dostal pod obzor), kde $\gamma \approx 16'$ je zdanlivý polomer Slnka zo Zeme.



Ostáva nám vhodne vybrať súradnicovú sústavu (tú chceme pravouhlú, aby skalárny súčin jednotkových vektorov udával skutočne kosínus uhla nimi zovretého!), určiť vektory $\mathbf{n}$ a $\mathbf{u}$, z nich skalárny súčin a sme skoro hotoví. Počiatok mojej sústavy umiestnim do stredu

Slnka. Smery súradnicových osí zvolím tak, ako je to znázornené na obr.2, ktorý dokumentuje situáciu na jesennú rovnodennosť (23. september) – kedy na severnom póle zapadá slnko: rovina xy je teda rovina ekliptiky (v nej leží trajektória obehu Zeme okolo Slnka), Zem v čase jesennej rovnodennosti leží na kladnej poloosi x. Na rovnodennosť sú vektory $\mathbf{n}$ a $\mathbf{u}$ na seba kolmé ($\Leftrightarrow \mathbf{n}\cdot\mathbf{u} = 0$), preto vektor $\mathbf{n}$ musí mať x-ovú zložku $n_x = 0$. Jeho zvyšné komponenty určím ľahko, lebo viem, že s normálou ekliptiky (dá sa zapísať pomocou vektora $(0; 0; 1)$) zviera uhol $\varphi \approx 23°30'$. Os y je kolmá na x a jej orientáciu som zvolil tak, aby priemet vektora $\mathbf{n}$ do y-ového smeru bol kladný ($\Rightarrow$ aj rýchlosť Zeme na rovnodennosť bude mať kladnú y-ovú zložku). Os z je kolmá na ekliptiku a kladná poloos smeruje nahor.



V nami zavedenej báze vyjadrím vektory pri aproximácii obežnej dráhy Zeme okolo Slnka kružnicou a zanedbaní pohybov zemskej osi:

$\mathbf{n} = (n_x; n_y; n_z) = (0; sin\varphi; \cos\varphi)$ – vektor zemskej osi, resp. normála dotykovej roviny na póle (konštanta v čase),

$\mathbf{u} = (u_x; u_y; u_z) = (\cos\frac{2\pi t}{T}; \sin\frac{2\pi t}{T}; 0)$ – vektor od stredu Slnka do stredu Zeme, kde T je perióda obehu Zeme (= 1 rok) a t je čas uplynulý od niektorej jesennej rovnodennosti. Potom

$$\mathbf{n}\cdot\mathbf{u} = n_x u_x + n_y u_y + n_z u_z = \sin\varphi \sin\frac{2\pi t}{T}.$$

Ak t_1 je čas, kedy sa slnečný kotúč dotkne horizontu, a t_2 čas, kedy sa slnečný kotúč akurát ponára pod horizont, tak samotná doba západu slnka je $\Delta t = t_2 - t_1$. Pre časy t_1 a t_2 mám podmienky

$$\sin\varphi \sin\frac{2\pi t_1}{T} = -\cos(90° - \gamma) = -\sin\gamma,$$

$$\sin\varphi \sin\frac{2\pi t_2}{T} = -\cos(90° + \gamma) = \sin\gamma.$$

Samozrejme, že riešenia t_1 resp. t_2 nás nezaujímajú všetky (sledujeme iba západ v jednom roku, v ďalšom by sme už boli premrznutí na kosť :-)), zjavne iba tie z rozsahu $(-T/2; T/2)$ a preto dostávame jediné riešenie

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \frac{\arcsin \frac{\sin\gamma}{\sin\varphi}}{2\pi} T - \frac{\arcsin(-\frac{\sin\gamma}{\sin\varphi})}{2\pi} T = \frac{\arcsin \frac{\sin\gamma}{\sin\varphi}}{\pi} T \approx 32,5\mathrm{h}.$$

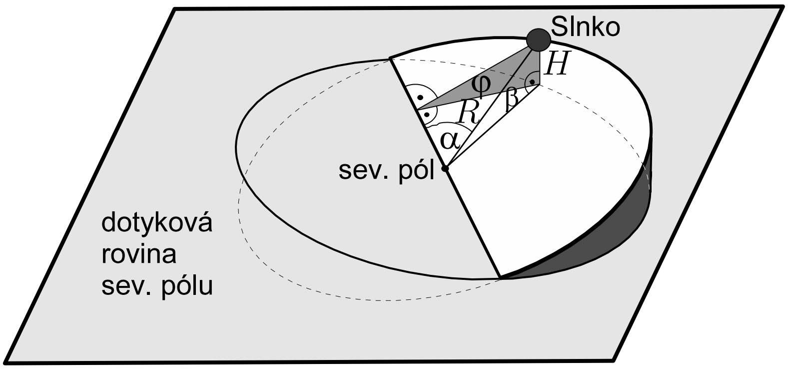
Pri vyčíslovaní si treba dať pozor na to, kedy počítame s radiánmi a kedy so stupňami.

Zanedbávam: ohyb svetla pri prechode atmosférou (práve pri pozorovaní objektov nízko nad obzorom je najmarkantnejší, chyba môže dosiahnuť až rád hodín!), excentricitu (eliptičnosť) obehu Zeme okolo Slnka, rozmery Zeme voči vzdialenosti Zem-Slnko, precesiu a nutáciu zemskej osi, obeh Zeme okolo spoločného ťažiska Zem-Mesiac, slapové javy, zakrivenie povrchu Zeme v mieste pozorovania (teda predpokladám, že pozorovateľ je nízko nad povrchom) a pravdepodobne ešte mnoho iného. Napriek tomu si trúfam tvrdiť, že sme dostali dosť presný výsledok. Nothing else matters…

Iný správny prístup k riešeniu tohoto problému spočíva v tom, že ak zanedbáme pohyby Zemskej osi (precesia, nutácia), tak dotyková rovina na póle sa voči vzťažnej sústave spojenej so stredom Slnka nenakláпа, ale len posúva. A západ slnka trvá v takomto modeli práve od vtedy, keď sa dotyková rovina dotkne jedného okraja Slnka, až pokým sa nedotkne toho druhého. Nakoľko vieme, že uhol medzi normálou dotykovej roviny a normálou ekliptiky je φ, tak vieme povedať, o koľko sa Zem musela pohnúť (v smere určenom priemetom zemskej osi do ekliptiky), aby dotyková rovina pólu „prerezala" celé Slnko (vzdialenosť rovnú jeho priemeru D) $l = D/\sin\varphi$. No a táto vzdialenosť je tetivou oblúka (ak aproximujeme dráhu Zeme kružnicou), po ktorom sa Zem počas západu slnka na póle pohybovala. Dostávame čas

$$\Delta t = \frac{2R \arcsin \frac{D}{2R\sin\varphi}}{v_{Zem}} \approx \frac{D}{v_{Zem}\sin\varphi} \approx 32,5\mathrm{h}.$$

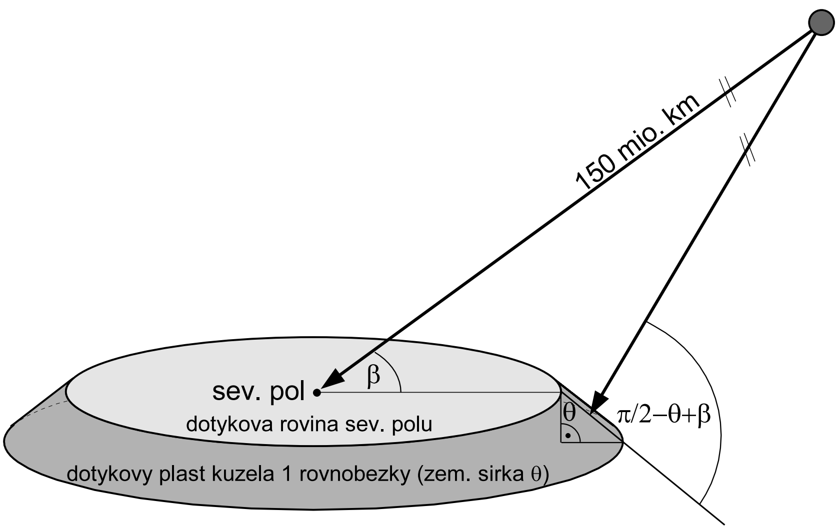
Ešte jedna poznámka: Hoci presné rovnice (v súlade s horeuvedenými aproximáciami) nedávajú pekné riešenie pre výšku slnka β na poludnie počas roka, riešenie tohoto problému v tvare $\beta = \pi/2 - \theta - \varphi \sin\frac{2\pi t}{T}$ pre miesto severne od obratníka Raka (južnejšie sa vo výraze menia znamienka) na zemepisnej šírke θ dosahuje pre pozemské parametre presnosť lepšiu ako $18'$. Použitím tohto priblíženia sa dalo dospieť k slušnému výsledku $\Delta t = 2\frac{\arcsin\frac{\gamma}{\varphi}}{2\pi}T \approx \frac{\gamma}{\pi\varphi}T \approx 32\mathrm{h}$. Treba poznamenať, že toto priblíženie platí len preto, že pre naše φ platí relatívne presne $\sin\varphi \approx \varphi$. Vzťah $\beta = \pi/2 - \theta - \arcsin(\sin\varphi \sin\frac{2\pi t}{T})$ je presný pre náš zjednodušený model. To vidno pre pól z nášho starého známeho skalárneho súčinu $\mathbf{n} \cdot \mathbf{u}$, ktorý však je málo názorný. Preto pridávam ešte jeden obrázok, kde sa na situáciu pozeráme z dotykovej roviny severného pólu.



Trajektória Slnka je kružnica ležiaca v rovine zvierajúcej s našou rovinou pozorovateľa uhol φ. Výška slnka nad obzorom je $\beta = \arcsin \frac{H}{R}$. Výšku H si však viem jednoducho vyjadriť z tých pravouhlých trojuholníkov. Vyznačený trojuholník je v rovine kolmej na priesečnicu dotykovej roviny s rovinou obehu Slnka okolo severného pólu (teda je v rovine kolmej na obe spomenuté roviny), preto tam vystupuje práve uhol, ktorý zvierajú tieto dve roviny, čiže φ. Ak ešte dodám závislosť $\alpha = \frac{2\pi t}{T}$ pre rovnomerný pohyb Slnka po kružnici, tak dostanem starý známy výraz

$$\beta = \arcsin(\sin \frac{2\pi t}{T} \sin \varphi).$$

A len tak mimochodom, keď už vieme výšku slnka na póle, v ľubovoľnej zemepisnej šírke θ bude na poludnie výška slnka len posunutá o $\pi/2 - \theta$. (Na rozdiel od pólu, toto naozaj platí len na poludnie, t.j. keď sú všetky čiary na obrázku v jednej rovine.)



Výsledková listina FX po druhej sérii.

#	Riešiteľ	FX1-3	FX4	FX5	FX6	$\sum$
1.	Filip Kubina	12.5	5	3.5	1	22
2.	Jan Hermann	-	5	5	4.5	14.5
3.	Lukáš Konečný	5	-	4	5	14
4.	Lucia Simanová	7.5	1.5	1.5	1	11.5
5.	Michal Spišiak	10	-	-	-	10
	Peter Vanya	2	-	3.5	4.5	10
7.	Dávid Vendel	5	-	-	-	5
8.	Samuel Hapák	3.5	-	-	-	3.5
9.	Ivan Burmister	-	-	-	1	1
	Michal Hojčka	-	-	-	1	1
	Peter Ondáč	1	-	-	-	1
12.	Zuzana Horváthová	0	-	-	-	0
	Eugen Hruška	0	-	-	0	0
	Barbora Sedlačková	0	-	-	-	0
	Alena Černá	0	-	-	-	0