powered by FKS

FX [f:ks]

Vzorové riešenia a výsledky 4. série 4. ročníka

Milí riešitelia! Ako sa to už vo FX stáva zvykom, okrem striktne vzatých vzorových riešení (t.j. riešení, ktoré by dostali plný počet bodov) Vám prinášame aj obsiahlejšie vysvetlenia tematiky a myšlienok týkajúcich sa riešených príkladov. Nezľaknite sa preto rozsahu týchto „vzorákov“, a ak vám tak bude ľahšie, berte ich skôr ako veľmi užitočný učebný text, určený na viac než letmé prečítanie ponáhľajúc sa smerom k výsledkovke. Veľa zábavy!

FX10 Guľa (Opravoval Jakub)

Víla Amálka si svoju krištáľovú guľu položila na veľký stôl pokrytý obrusom. Keď mala slávnostnú náladu, veľkolepo strhla obrus zo stola (vodorovným pohybom). Aká bude rýchlosť gule po tom, ako na stole prestane prešmykovať? Môžete predpokladať, že toto sa stane ešte predtým, ako spadne zo stola, a že guľa pri stŕhaní obrusu neposkakuje. Polomer gule je R, hmotnosť M, koeficient trenia o obrus f_1 a o stôl f_2.

V nasledovnom texte budem našu krištáľovú guľu považovať za dokonale homogénne teleso. Moment zotrvačnosti homogénnej gule vzhľadom na ľubovoľnú os prechádzajúcu jej stredom (ktorý je tiež ťažiskom) je $I = \frac{2}{5}MR^2$, kde M a R sú veličiny známe zo zadania. Popisovať ju budem pomocou modelu tuhého telesa. Sústava spojená so stolom bude pre mňa inerciálna.

Počas trhnutia, ak je dostatočne prudké, bude guľa zrejme prešmykovať. Ak je však trhnutie iba také relatívne pomalé potiahnutie, tak sa môže stať, že guľa prešmykovať nebude. Neprešmykovaniu sa dá tiež pomôcť zvýšením koeficientu trenia f_1. Keďže bez konkrétnych údajov nevieme povedať, ktorá z možností sa bude realizovať, tak by sme mali rozobrať všetky možnosti. Avšak tých je mnoho, lebo zadanie žiaden konkrétny priebeh zrýchlenia obrusu nepredpisuje. Takže obrus môžeme najprv trhnúť a ďalej už len pomaly zrýchľovať. A celé to nemusí prebiehať len v jednom smere – môžeme najprv trhnúť jedným smerom a potom ešte aj smerom kolmým naň, napríklad. Podrobná analýza všelijakých prípadov by bola značne komplikovaná a ošemetná, a ako ukážeme, aj zbytočná. My sa pokúsime vyriešiť všetky prípady súčasne. Zvládneme to pre ľubovoľné trhnutie v rovine obrusu (s ľubovoľným priebehom vektora zrýchlenia obrusu) a ešte aj pre ľubovoľný zákon trenia. Čitateľovi predkladáme 2 rôzne riešenia:

A. Riešenie na základe dynamiky tuhého telesa inšpirované Michalom Spišiakom.

B. Formálna analýza situácie z pohľadu zákona zachovania momentu hybnosti.

Výstraha! V ďalšom texte sa to bude hemžiť vektormi. Budeme ich značiť tučným písmom (napríklad vektor rýchlosti $\mathbf{v}$ o veľkosti v), a budeme s nimi operovať najmä pomocou vektorových, resp. skalárnych súčinov. Odporúčam čitateľovi pripomenúť si základné vlastnosti týchto vektorových operácií. Taktiež sa tu vyskytnú derivácie a integrály vektorových veličín, ktoré sú zavedené veľmi prirodzeným spôsobom, hľa:

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{F}(t)}{\mathrm{d}t} = \left(\frac{\mathrm{d}F_x(t)}{\mathrm{d}t}, \frac{\mathrm{d}F_y(t)}{\mathrm{d}t}, \frac{\mathrm{d}F_z(t)}{\mathrm{d}t}\right),$$

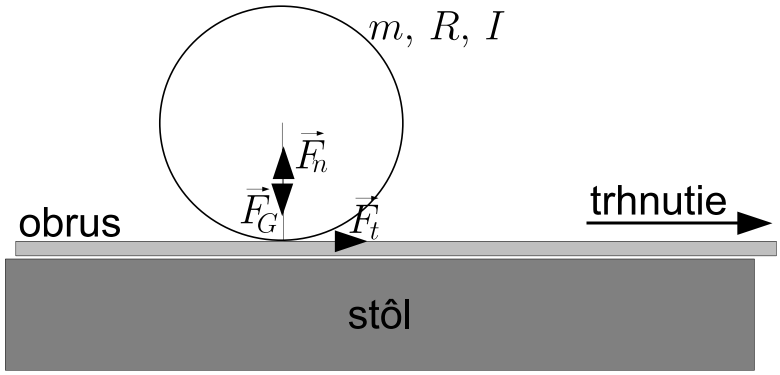
$$\int_B^A \mathbf{F}(t)\mathrm{d}t = \left(\int_B^A F_x(t)\mathrm{d}t, \int_B^A F_y(t)\mathrm{d}t, \int_B^A F_z(t)\mathrm{d}t\right).$$

A. Riešenie na základe dynamiky tuhého telesa inšpirované Michalom Spišiakom.

Úlohu budeme riešiť v inerciálnej vzťažnej sústave spojenej so stolom.

Na guľu pôsobia počas celého pohybu (až pokým neprestane prešmykovať) práve 3 sily: tiažová sila ($\mathbf{F_G}$), normálová sila od podložky ($\mathbf{F_n}$) a trecia sila od podložky ($\mathbf{F_t}$). Keďže guľka podľa zadania nenadskakuje, tak v každom okamihu musí platiť, že zvislá zložka výslednice pôsobiacich síl ju nulová (teda tiažová sila je vždy kompenzovaná normálovou silou)[1]. Vodorovná zložka výslednice je potom samotná trecia sila a teda zrýchlenie ťažiska guľky je $\mathbf{a_T}(t) = \frac{\mathbf{F_t}(t)}{m}$ (tu treba upozorniť na to, že trecia sila je vo všeobecnosti funkcia času – čím vyriešime súčasne prešmykovanie i neprešmykovanie – môže meniť veľkosť i smer, vždy však leží v rovine stola).

[1] Úprimne povedané, platí to tak skoro vždy. Keď gulička schádza z obrusu, tak zrejme trošku mení svoju výšku. Ďalej sa ukáže, že tento prístup riešenia je však vo svojej podstate voči zvislým silám úplne necitlivý. Postačujúce je, ak trecia sila je vodorovná.



Ďalej zisťujme, čo sa bude diať s otáčaním guličky. To je celkom jednoduché, lebo v našom jednoduchom prípade (guľa je tzv. sférický zotrvačník, ktorý je charakteristický tým, že má moment zotrvačnosti I vzhľadom na každú os prechádzajúcu ťažiskom rovnaký) platí pre moment sily $\mathbf{M_{celk}}(t)$ a moment hybnosti $\mathbf{L}(t)$ počítaný vzhľadom na ťažisko tuhého telesa **úplne všeobecne** (dôkaz možno nájsť v **B.** časti)

$$\mathbf{M_{celk}}(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{L}(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(I\boldsymbol{\omega}(t)) = I\boldsymbol{\varepsilon}(t).$$

V tomto vzťahu $\mathbf{M_{celk}}(t)$ značí celkový moment síl pôsobiacich na dané teleso určený vzhľadom na stred (ťažisko) guličky v čase t; $\mathbf{L}(t)$ je moment hybnosti telesa počítaný tiež vzhľadom na stred guličky; I je moment zotrvačnosti telesa vzhľadom na os prechádzajúcu ťažiskom; vektor $\boldsymbol{\omega}(t) = \omega(t)\mathbf{n}(t)$ (kde $\mathbf{n}(t)$ je jednotkový vektor) je vektor uhlovej rýchlosti otáčania, pričom jeho veľkosť $\omega(t)$ je to, čo sa bežne pod pojmom uhlová rýchlosť myslí, a jeho smer daný vektorom $\mathbf{n}(t)$ určuje os otáčania; $\boldsymbol{\varepsilon}(t)$ je prvá časová derivácia $\boldsymbol{\omega}(t)$, čiže vektor uhlového zrýchlenia a v prípade, že smer má totožný so smerom $\boldsymbol{\omega}(t)$, tak jeho veľkosť je nám bežne známe uhlové zrýchlenie.

V prípade zobrazenom na obrázku hore je vektor $\mathbf{M_{celk}}$ a s ním aj $\boldsymbol{\varepsilon}$ kolmý na obrázok (to je dané tým, že trecia sila leží v rovine obrázka). Celkový pôsobiaci moment vzhľadom na ťažisko guľky je daný len momentom trecej sily (ostatné sily ležia na priamke prechádzajúcej ťažiskom). Platí $\mathbf{M_{celk}}(t) = \mathbf{r_0} \times \mathbf{F_t}(t)$, kde vektor $\mathbf{r_0}$ je zvislý vektor o dĺžke R z ťažiska guličky do jej dotykového bodu (v každom čase rovnaký). Tento moment jej teda udeľuje uhlové zrýchlenie $\boldsymbol{\varepsilon}(t) = \frac{\mathbf{M_{celk}}(t)}{I}$.

Je zrejmé, že guľka v nejakom konečnom čase (označím ho T) prestane prešmykovať. Ďalej sa bude pohybovať rovnomerne priamočiaro. Trenie na ňu potom už nebude pôsobiť. Keď sa to stane, tak dotykový bod bude voči stolu nehybný, čo zapíšeme rovnicou

$$\mathbf{v_{r_0}}(T) = \mathbf{v_T}(T) + \mathbf{v_{obv}}(T) = \mathbf{v_T}(T) + \boldsymbol{\omega}(T) \times \mathbf{r_0} = \mathbf{0},$$

ktorá vyjadruje, že rýchlosť dotykového bodu vzhľadom na stôl napísaná ako vektorový súčet rýchlosti ťažiska vzhľadom na stôl a obvodovej rýchlosti dotykového bodu okolo osi prechádzajúcej ťažiskom (to si už každý na prstoch overí, že to je presne ten druhý člen) je nulová. Pritom ale vieme, že

$$\mathbf{v_T} = \int_0^T \mathbf{a_T}(t)\ \mathrm{d}t = \frac{1}{M}\int_0^T \mathbf{F_t}(t)\ \mathrm{d}t,$$

a tiež vieme (posledná úprava využíva fakt, že vektory $\mathbf{F_t}(t)$ a $\mathbf{r_0}$ sú na seba v každom čase t kolmé)

$$\begin{aligned}
\mathbf{v_{obv}}(T) &= \boldsymbol{\omega}(T) \times \mathbf{r_0} \\
&= \left[\int_0^T \boldsymbol{\varepsilon}(t)\mathrm{d}t\right] \times \mathbf{r_0} \\
&= \int_0^T \left\{\frac{[\mathbf{r_0} \times \mathbf{F_t}(t)]}{I} \times \mathbf{r_0}\right\}\ \mathrm{d}t \\
&= \frac{R^2}{I}\int_0^T \mathbf{F_t}(t)\ \mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

Vnímavejší čitateľ už iste vidí, čo príde ďalej. Totiž, vieme že

$$\begin{aligned}
\mathbf{v_{r_0}}(T) &= \mathbf{v_T}(T) + \mathbf{v_{obv}}(T) \\
&= \left[\frac{1}{M} + \frac{R^2}{I}\right]\int_0^T \mathbf{F_t}(t)\ \mathrm{d}t \\
&= \frac{7}{5M}\int_0^T \mathbf{F_t}(t)\ \mathrm{d}t = \mathbf{0}.
\end{aligned}$$

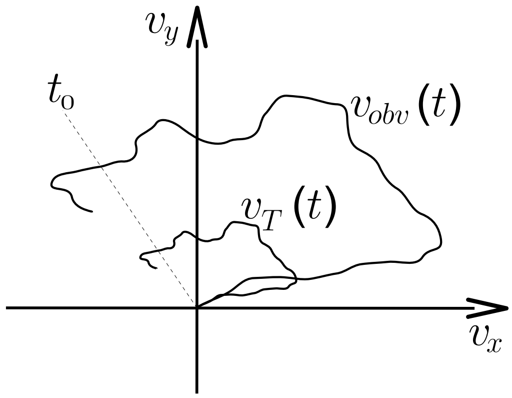
To ale znamená, že v čase, keď guľka prestane prešmykovať, je celkový impulz trecej sily $\int_0^T \mathbf{F_t}(t)\mathrm{d}t$ a s ním aj rýchlosti $\mathbf{v_T}(T)$, $\mathbf{v_{obv}}(T)$ a nutne aj uhlová rýchlosť otáčania $\boldsymbol{\omega}(T)$ nulová. Guľka zastane.

Slovne sa to dá okomentovať tak, že trecia sila $\mathbf{F_t}$ v každom okamihu spôsobuje zrýchlenie tažiska $\mathbf{a_T} = \frac{\mathbf{F_t}}{M}$ v smere pôsobenia trecej sily a súčasne zrýchlenie obvodovej rýchlosti dotykového bodu gule $\mathbf{a_{obv}} = \frac{5\mathbf{F_t}}{2M}$ v **rovnakom** smere. Pomer týchto zrýchlení je v každom čase konštantný (konkrétne $\frac{5}{2}$). Fakt, že koleso v čase T neprešmykuje, je ekvivalentný s rovnosťou $\mathbf{v_T}(T) = -\mathbf{v_{obv}}(T)$. Potom je už jednoduché nahliadnuť, že ak

$$\begin{aligned} \mathbf{a_T}(t) &= \frac{2}{5}\mathbf{a_{obv}}(t) \qquad \text{pre všetky } t \in [0, T], \\ \mathbf{v_T}(0) &= \mathbf{v_{obv}}(0) = \mathbf{0} \qquad \text{a zároveň} \\ \mathbf{v_T}(T) &= -\mathbf{v_{obv}}(T), \end{aligned}$$

potom nutne

$$\mathbf{v_T}(T) = \mathbf{0}.$$



Ešte lepšiu predstavu si človek môže urobiť pomocou ilustračného obrázku, ktorý zachytáva krivku rýchlosti ťažiska a obvodovej rýchlosti dotykového bodu. Je tam vyznačený stav v čase t_0. Pri pohľade na tento obrázok by už každému malo byť jasné, že ak požadujeme rovnosť $\mathbf{v_T}(T) = -\mathbf{v_{obv}}(T)$ v nejakom čase T, tak to nutne v našej situácii znamená $\mathbf{v_T}(T) = \mathbf{0}$.

Rezultát: Guľka ostane naveky nehybná za predpokladu, že sa správa ako tuhé teleso a trecia sila (inak ľubovoľná) leží vždy v rovine stola.

B. Formálna analýza situácie z pohľadu zákona zachovania momentu hybnosti.

V tejto časti sa na situáciu pozerám z inerciálnej vzťažnej sústavy spojenej so stolom. Jej počiatok umiestnim do ľubovoľného bodu na povrchu stola, ktorý označím A.

Začnem zľahka prípravou aparátu. Bude to zahŕňať dôkladné odvodenia známych vzorcov otáčavej mechaniky tuhého telesa. Nerobíme to zbytočne – totiž, tie známe vzorce platia zvyčajne iba v špeciálnych prípadoch.

Oboznámme sa najprv s modelom tuhého telesa. Tuhé teleso je absolútne nedoformovateľné, so stálymi vzájomnými vzdialenosťami všetkých jeho bodov. Samotné teleso si predstavím ako sústavu N (predstav si mnoho) hmotných bodov s hmotnosťami m_i nachádzajúcimi sa v mieste danom polohovým vektorom $\mathbf{r}_i(t)$. Potom vektor do ťažiska viem určiť ako vážený priemer

$$\mathbf{r_T}(t) = \frac{\sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}_i(t)}{\sum_{i=1}^N m_i} = \frac{\sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}_i(t)}{M}.$$

Ďalej si definujem polohový vektor i-tej častice s počiatkom v ťažisku ako $\boldsymbol{\rho}_i(t) = \mathbf{r}_i(t) - \mathbf{r_T}(t)$. Je jasné, že vďaka nedeformovateľnosti tuhého telesa sa jeho dĺžka nebude meniť. Tiež je ľahko nahliadnuť, že

$$\sum_{i=1}^N m_i \boldsymbol{\rho}_i(t) = \sum_{i=1}^N m_i [\mathbf{r}_i(t) - \mathbf{r_T}(t)] = \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}_i(t) - M\mathbf{r_T}(t) = \mathbf{0}.$$

Ak máme teleso, ktoré sa otáča okolo osi prechádzajúcej ťažiskom, tak rýchlosť i-tej častice bude (dá sa ľahko preveriť)

$$\mathbf{v}_i(t) = \mathbf{v_T}(t) + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}_i(t).$$

Teraz spočítame moment hybnosti tuhého telesa vzhľadom na ľubovoľný bod:

$$\begin{aligned}
\mathbf{L}(t) &= \sum_{i=1}^N \mathbf{L}_i = \sum_{i=1}^N \mathbf{r}_i(t) \times \mathbf{p}_i(t) = \sum_{i=1}^N \mathbf{r}_i(t) \times m_i \mathbf{v}_i(t) \\
&= \sum_{i=1}^N \mathbf{r}_i(t) \times m_i [\mathbf{v_T}(t) + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}_i(t)] \\
&= \left[\sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}_i(t)\right] \times \mathbf{v_T}(t) + \sum_{i=1}^N \mathbf{r}_i(t) \times m_i [\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}_i(t)] \\
&= M\mathbf{r_T}(t) \times \mathbf{v_T}(t) + \sum_{i=1}^N [\mathbf{r_T}(t) + \boldsymbol{\rho}_i(t)] \times m_i [\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}_i(t)] \\
&= M\mathbf{r_T}(t) \times \mathbf{v_T}(t) + \mathbf{r_T}(t) \times \left\{\boldsymbol{\omega} \times \left[\sum_{i=1}^N m_i \boldsymbol{\rho}_i(t)\right]\right\} \\
&\quad + \sum_{i=1}^N m_i \boldsymbol{\rho}_i(t) \times [\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}_i(t)] \\
&= M\mathbf{r_T}(t) \times \mathbf{v_T}(t) + \mathbf{r_T}(t) \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{0}) \\
&\quad + \omega \sum_{i=1}^N m_i \boldsymbol{\rho}_i(t) \times [\mathbf{n} \times \boldsymbol{\rho}_i(t)].
\end{aligned}$$

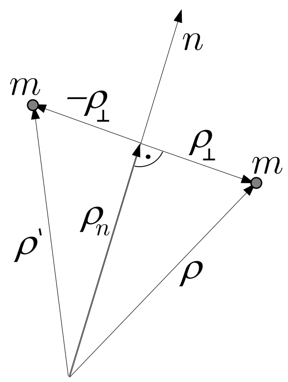
Nuž, prvý člen je už v konečnom tvare, druhý je nulový. Ostáva tretí, s ktorým vybabreme jednoducho, lebo máme teleso, ktoré je symetrické voči osi prechádzajúcej jeho stredom (a to dokonca ľubovoľnej). Totiž ten člen pre teleso symetrické voči osi určenej vektorom $\mathbf{n}$ nadobudne tvar

$$\left\{\sum_{i=1}^{N} m_i \left[\mathbf{n} \times \boldsymbol{\rho}_i(t)\right]^2\right\} \boldsymbol{\omega} = \left\{\sum_{i=1}^{N} m_i [\boldsymbol{\rho}_{i\perp}(t)]^2\right\} \boldsymbol{\omega} = I\boldsymbol{\omega}.$$

Prečo to tak je? Majme teleso symetrické okolo osi danej jednotkovým vektorom $\mathbf{n}$, ktorého súčasťou v nejakom čase t je bod o hmotnosti m. Jeho polohový vektor z ťažiska si rozložme ako $\boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{\rho}_{\mathbf{n}} + \boldsymbol{\rho}_{\perp}$, kde $\boldsymbol{\rho}_{\mathbf{n}} = (\boldsymbol{\rho} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n}$ je vektor v smere osi $\mathbf{n}$ a $\boldsymbol{\rho}_{\perp}$ je kolmý naň. Vďaka symetrii vieme, že v danom čase t je určite súčasťou telesa aj bod naproti nášmu bodu (výnimkou by bol bod, ktorý leží na osi, čo je triviálny prípad) s polohovým vektorom z ťažiska

$$\boldsymbol{\rho}' = \boldsymbol{\rho}_{\mathbf{n}} - \boldsymbol{\rho}_{\perp} = \boldsymbol{\rho}_{\mathbf{n}} - (\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}_{\mathbf{n}}) = 2(\boldsymbol{\rho} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n} - \boldsymbol{\rho}$$

a rovnakou hmotnosťou m.



Poďme spočítať, ako vyjde ten tretí člen (označím ho $\mathbf{L}'$) pre tieto dva hmotné body nášho telesa:

$$\begin{aligned}
\mathbf{L}' &= \omega \sum_{i=1}^{N} m_i \boldsymbol{\rho}_i(t) \times [\mathbf{n} \times \boldsymbol{\rho}_i(t)] \\
&= m\omega \left\{\boldsymbol{\rho} \times [\mathbf{n} \times \boldsymbol{\rho}] + \boldsymbol{\rho}' \times [\mathbf{n} \times \boldsymbol{\rho}']\right\} \\
&= m\omega \left\{\boldsymbol{\rho} \times [\mathbf{n} \times \boldsymbol{\rho}] + [2(\boldsymbol{\rho} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n} - \boldsymbol{\rho}] \times [\mathbf{n} \times [2(\boldsymbol{\rho} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n} - \boldsymbol{\rho}]]\right\} \\
&= m\omega \left\{\boldsymbol{\rho} \times [\mathbf{n} \times \boldsymbol{\rho}] - [2(\boldsymbol{\rho} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n} - \boldsymbol{\rho}] \times [\mathbf{n} \times \boldsymbol{\rho}]\right\} \\
&= 2m\omega \left\{[\boldsymbol{\rho} - (\boldsymbol{\rho} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n}] \times [\mathbf{n} \times \boldsymbol{\rho}]\right\} = 2m\omega \left\{\boldsymbol{\rho}_{\perp} \times [\mathbf{n} \times \boldsymbol{\rho}]\right\}.
\end{aligned}$$

Na čitateľa nechávam dôkaz (stačí preveriť, že veľkosť, smer a orientácia výsledných vektorov je zhodná; resp. preveriť analyticky, že jednotlivé zložky sa rovnajú), že sa to rovná

$$\mathbf{L}' = 2m\omega[(\boldsymbol{\rho} \times \mathbf{n})^2 \mathbf{n}] = 2m \left|\boldsymbol{\rho}_{\perp}\right|^2 \boldsymbol{\omega}.$$

Potom ale pre symetrické teleso platí skutočne to, čo sme tvrdili vyššie. Výsledný moment hybnosti tuhého telesa symetrického voči osi, okolo ktorej sa točí, teda je

$$\mathbf{L}(t) = M\mathbf{r_T}(t) \times \mathbf{v_T}(t) + I\boldsymbol{\omega}.$$

Ďalej poďme zderivovať moment hybnosti $\mathbf{L}$ podľa času:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{L}(t) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\sum_{i=1}^{N}\mathbf{L}_i(t)\right] = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\sum_{i=1}^{N}\mathbf{r_i}(t) \times m_i\mathbf{v}_i(t)\right] \\
&= \sum_{i=1}^{N}\left[\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}_i(t)}{\mathrm{d}t} \times m_i\mathbf{v}_i(t) + \mathbf{r}_i(t) \times m_i\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}_i(t)}{\mathrm{d}t}\right] \\
&= \sum_{i=1}^{N}\left[\mathbf{v}_i(t) \times m_i\mathbf{v}_i(t) + \mathbf{r}_i(t) \times m_i\mathbf{a}_i(t)\right] \\
&= \sum_{i=1}^{N}\left[\mathbf{0} + \mathbf{r}_i(t) \times \mathbf{F}_i(t)\right] \\
&= \sum_{i=1}^{N}\mathbf{M}_i(t) = \mathbf{M_{celk}}(t).
\end{aligned}$$

Dúfam, že výsledok nikoho neprekvapil. Hoci to z rovníc vidno, napíšem ešte po ľudsky, že ten celkový moment $\mathbf{M_{celk}}(t)$ pôsobiacich síl nám vyjde vzhľadom na rovnaký bod, vzhľadom na ktorý sme mali určený moment hybnosti $\mathbf{L}(t)$. Tiež treba povedať, že celkový moment sily pôsobiaci na tuhé teleso je determinovaný iba silami pôsobiacimi na teleso zvonku. Ak by to tak nebolo, tak by sa tuhé teleso mohlo samo od seba roztočiť, čo by bolo prinajmenšom čudné.

Spojme posledné 2 vzťahy dokopy. Zamerajme sa nejaký fixovaný čas t (a preto závislosť veličín od neho nebudem v tomto odseku explicitne písať). Uvažujme pritom moment hybnosti a celkový moment síl určený vzhľadom na ťažisko. Potom $\mathbf{r_T} = \mathbf{0}$ a v rovnici pre $\mathbf{L}$ bude prvý člen nulový. Pre teleso, ktoré má moment zotrvačnosti I vzhľadom na ťažisko rovnaký okolo ľubovoľne natočenej osi, je potom I konštanta (to je prípad našej gule). Dostávame vzorec, ktorý sa nám zišiel v časti **A.**

$$\mathbf{M_{celk}} = I\boldsymbol{\varepsilon}$$

Čo však v prípade, že máme iba teleso symetrické okolo aktuálnej osi otáčania?[2] Potom platí $\mathbf{L} = I\omega\mathbf{n}$. Nuž, ak by sme vedeli zaručiť, že sa

[2] Ideme odvodiť rovnicu pre tie najbežnejšie stredoškolské prípady!

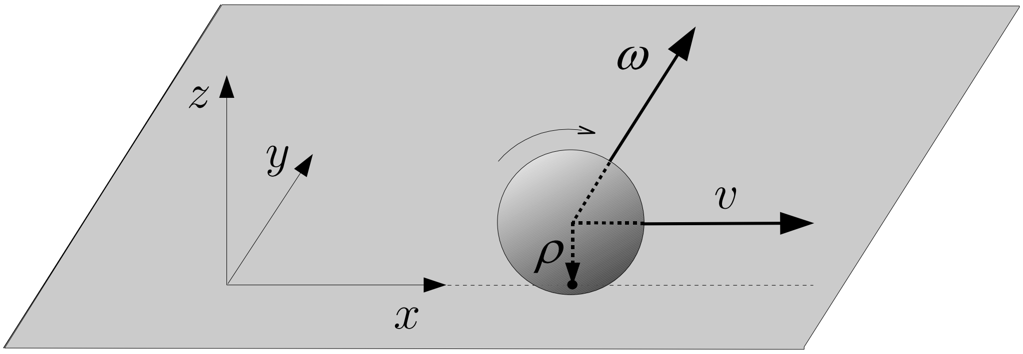
nám os otáčania nebude meniť, tak potom by to snaď mohlo fungovať, no nie? No áno! Predpokladajme, že máme celkový moment sily $\mathbf{M_{celk}}$ v smere osi otáčania[3] $\mathbf{n}$. Potom vektor zmeny momentu hybnosti má tiež smer $\mathbf{n}$. Vďaka tomu zotrvá aj moment hybnosti v tomto smere. S ním ostane v tomto smere, samozrejme, aj os otáčania a teda aj zmena vektoru uhlovej rýchlosti je v tomto smere. Sumárne môžeme konštatovať, že rovnica $\mathbf{M_{celk}} = I\boldsymbol{\varepsilon}$ platí aj v tomto prípade.

Teraz konečne prišiel čas, keď sa od teórie vrátime k nášmu prachom zapadnutému príkladu. Totiž, počas celého deja je moment síl pôsobiacich na guľu vzhľadom na bod A (pripomínam, že je to bod na povrchu stola a situáciu skúmame z inerciálnej vzťažnej sústavy) nulový! Potom ale moment hybnosti gule musí byť konštantný (jeho časová zmena je nulová) a konkrétne nulový (lebo pred trhnutím je nulový). Preverme to podrobnejšie: obrusom môžem trhať ľubovoľne rýchlo, akýmkoľvek smerom – ak sa mi spodok gule bude držať v rovine stola, tak trecia sila bude ležať v nej a jej moment sily vzhľadom na A bude celý čas nulový. Zároveň to implikuje, že výška ťažiska gule je nemenná a teda nutne vertikálne zložky všetkých pôsobiacich síl sa vzájomne kompenzujú. To je ale ekvivalentné s tým, že celý čas je tiažová sila rovnako veľká ako normálová. Keďže ležia na jednej priamke (ich pôsobiská sú presne nad sebou, posunuté v smere ich pôsobenia), tak ich momenty sa akurát rušia.

Predpokladajme, že guľka sa po trhnutí a prešmykovaní na stole dopracuje do stavu, keď sa jej ťažisko hýbe rýchlosťou $\mathbf{v}$ a ona neprešmykuje. Aby sme sa neprepracovali, tak si vyberme bod A (môžem si zvoliť predsa ľubovoľný bod povrchu stola) tak, aby ležal na priamke danej polohou guľky v ľubovoľnom čase, keď už doprešmykovala, a smerom $\mathbf{v}$. Ďalej si sústavu natočím tak, aby sa mi guľka hýbala po x-ovej osi. Os z nech je zvislá orientovaná nahor a os y bude potom kolmá na os x ležiaca v rovine stola s orientáciou takou, aby sústava bola pravotočivá. Viď obrázok nižšie. Potom platí $\mathbf{v} = (v, 0, 0)$, $\boldsymbol{\omega} = (0, \omega, 0) = \omega\hat{\mathbf{e}}_2$[4] a $\mathbf{r_T}(t) = (r_x(t), 0, R)$.

[3] V prípade fixovanej osi vzniknú v úchytoch sily, ktoré zabezpečia, že celkový moment síl na teleso bude v požadovanom smere (čo pre teleso nesymetrické voči osi otáčania nemusí byť smer osi otáčania).

[4] Kde $\hat{\mathbf{e}}_2 = (0, 1, 0)$ je len prepychové pomenovanie pre jednotkový vektor v smere osi y.



Dotykový bod guľky (v každom okamihu iný) daný polohovým vektorom z ťažiska $\boldsymbol{\rho} = (0, 0, -R)$ musí byť nehybný, čo zapíšeme rovnicou

$$\mathbf{v} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho} = \mathbf{0} \qquad \Leftrightarrow \qquad v = \omega R.$$

A náš tromf, moment hybnosti:

$$\begin{aligned} \mathbf{L}(t) &= M\mathbf{r_T}(t) \times \mathbf{v_T}(t) + I\boldsymbol{\omega} \\ &= MRv\hat{\mathbf{e}}_2 + I\omega\hat{\mathbf{e}}_2 \\ &= [MR^2 + I]\omega\hat{\mathbf{e}}_2 = \mathbf{0}, \end{aligned}$$

z čoho $\omega = 0$.

Odpoveď: Nech trháme ako chceme, pokiaľ guľka nezačne poskakovať, tak po istom čase na stole zastane. To by bolo všetko. Výsledok je úplne exaktný, avšak len pre tuhé teleso a aproximáciu nulovej hrúbky obrusu[5]. Opäť môžeme konštatovať, že **trecia sila** môže byť **úplne ľubovoľná** – nemusí rešpektovať vzťah $F_t = fF_n$, ktorý je síce veľmi jednoduchý, ale zato značne neseriózny![6]

PS1: Ak by naša guľka nebola tuhé teleso, ale deformovateľné teleso, tak to radšej neriešim. To je už skutočná fyzika. Toto je FX. :-)

PS2: Všimnite si drobný rozdiel v podmienkach platnosti v jednotlivých častiach! V časti **A.** sme požadovali, aby trecia sila bola v každom čase vodorovná. V **B.** sme žiadali, aby guľka nenadskakovala a zároveň sme potrebovali nulovú hrúbku obrusu.

[5] Čo sme ticho predpokladali celý čas v **B.** časti. Inak by trecia sila na stole alebo podložke mala nenulový moment sily.

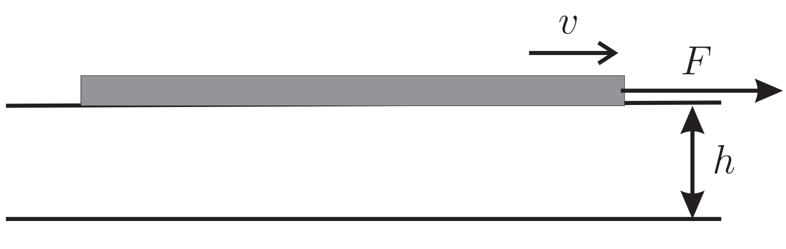
[6] Pre informáciu: o čosi slušnejší a presnejší vzťah $F_t = f(v)F_n$ používajú technici; tu je koeficient trenia pre dvojicu styčných materiálov nejaká (zvyčajne jednoduchá) funkcia rýchlosti v.

FX11 Žľab (Opravovala Marcelka)

Baša si na záhrade postavila dlhý žľab na odvod vody. Jeho šírka je b a sklon α. Keď sa raz rozpršalo, v žľabe tiekla voda prúdom o výške h (meranej kolmo na dno žľabu). Aký bol prietok vody žľabom, ak jej prúdenie považujeme za laminárne? Môžete predpokladať $h \ll b$.

Najprv si povieme niečo o viskozite. Ak kvapalina nemá vo všetkých miestach rovnakú rýchlosť, vznikajú v nej trecie sily – kvapalina sa „bráni“ pohybu. Zo skúsenosti vieme, že niektoré kvapaliny sa bránia pohybu viac, iné menej: napríklad med tečie veľmi pomaly, ale voda tečie rýchlo. Viskozita je vlastnosť kvapaliny, ktorá hovorí, aké veľké sú vnútorné trecie sily v pohybujúcej sa kvapaline. Preto veta „med tečie pomaly“ sa dá nahradiť slovami „med má veľkú viskozitu“.

Predstavme si nasledujúci experiment: zoberieme si dosku s plochou S, položíme ju na vodu s hĺbkou h a začneme ju ťahať tak, aby doska mala rýchlosť v. Môžeme si odmerať silu F, ktorá je potrebná na takéto ťahanie. Je očakávateľné, že čím väčšou rýchlosťou chceme dosku ťahať, tým väčšiu silu na to budeme potrebovať. Naproti tomu, čím tenšia je vrstvička vody, tým to pôjde ťažšie (ťahať nejakú platňu v bazéne je ľahšie ako ťahať ju po milimetrovej vrstvičke vody). Potrebná sila tiež závisí od plochy dosky – čím väčšia doska, tým väčšia sila.



Zoberme ako experimentálny fakt, že sila závisí od daných veličín ako

$$F = \eta S \frac{v}{h},$$

čo súhlasí s intuíciou. V tomto vzťahu sa okrem spomínaných veličín objavilo písmenko η. To je konštanta, ktorú voláme dynamická viskozita kvapaliny.[7] Každá kvapalina ju má inú a dá sa nájsť v tabuľkách. (Aby to nebolo *až* také jednoduché, nie všetky kvapaliny sa správajú takto. Sú aj také, kde viskozita nie je konštanta, ale funkcia rýchlosti kvapaliny. Voda však, našťastie, uvedený vzťah spĺňa.)

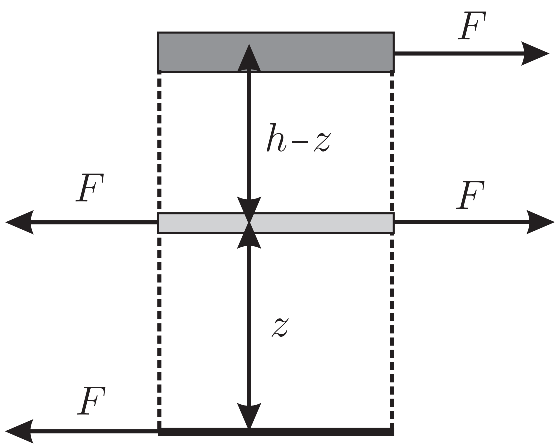
[7] Pozor, existuje aj konštanta nazývaná kinematická viskozita. Medzi oboma viskozitami je jednoduchý vzťah, ale netreba si ich popliesť, lebo to môže spôsobiť rádovo zlé výsledky.

Niekedy je rozumnejšie hovoriť o sile na plochu, teda o akomsi napätí. Toto napätie sa volá šmykové napätie a označuje sa τ. Platí preň vzťah

$$\tau = \frac{F}{S} = \eta\frac{v}{h}.$$

Predstavme si teraz, že nás zaujíma rýchlosť kvapaliny na rôznych miestach v kvapaline. (Stále sa rozprávame o ťahaní dosky, nie o našom žľabe. Berme to ako jednoduchý motivačný príklad, ktorý nám pomôže zoznámiť sa s viskozitou a lepšie si „ohmatať, ako to funguje“.) Predpokladajme, že doska je oveľa väčšia ako výška vody, a že prúdenie je ustálené. Zo symetrie[8] problému vyplýva, že všetka kvapalina bude mať rýchlosť rovnobežnú s rýchlosťou dosky a že rýchlosť kvapaliny závisí len od z-ovej súradnice (zvislej, kolmej na dosku). Zaujíma nás teda funkcia $v(z)$.

Zamerajme sa na nejakú vrstvu vody vo výške z. Rýchlosť tejto vrstvy označíme $v(z)$. Čo keby na mieste tejto vrstvy bola tenká platňa ťahaná rýchlosťou $v(z)$? Nič, voda by si to "nevšimla" a správala by sa rovnako ako predtým. V úvahách teda môžeme nahradiť vrstvu vody platňou.



Zoberme si teraz len malý valček vody s podstavou S. Na jeho hornú podstavu pôsobí sila $F = S\tau(h)$, no a keďže je prúdenie ustálené, celková sila pôsobiaca na valček (aj vo vodorovnom smere) bude nulová. Preto na jeho spodnú podstavu pôsobí sila $-F$. Ak si však valček vo výške z rozdelíme na dve časti (napríklad tenkou platňou), môžeme pre obe časti zopakovať rovnakú úvahu. Výslednica síl pôsobiacich na dolnú časť valčeka musí byť nulová, čiže naň horná časť (resp. platňa) pôsobí silou F, a podobne dolná časť pôsobí na hornú opačnou silou $-F$.

[8] O symetriách a ich využití, napríklad i o Nötherovej vete sa môžete dozvedieť viac napríklad v Príručke mladých fyzikov.

Toto ale znamená, že voda v spodnom valčeku sa správa tak, akoby sme vo výške z ťahali platňu silou F. Z našich úvah o viskozite potom ale vyplýva, že $S\tau(h) = F = S\tau(z)$, čiže $\tau(h) = \tau(z)$ a teda

$$\eta\frac{v(h)}{h} = \eta\frac{v(z)}{z}.$$

Inými slovami, funkcia $v(z)$ je lineárna, konkrétne

$$v(z) = z\frac{v(h)}{h}.$$

Skúsme ešte nahliadnuť, ako vyzerá diferenciálny tvar rovnice $\tau = \eta v/h$. Predstavme si dve vrstvy vody, jednu vo výške z, druhú vo výške $z+\mathrm{d}z$. Rýchlosť vrchnej vrstvy vzhľadom na spodnú je $v(z+\mathrm{d}z)-v(z)$. Predstavme si, že vrchná vrstva je platňa pohybujúca sa rýchlosťou $v(z+\mathrm{d}z)$. Sila, ktorou by sme takúto platňu museli ťahať, je

$$F = \eta S\frac{v(z+\mathrm{d}z) - v(z)}{\mathrm{d}z},$$

čo v limite $\mathrm{d}z \to 0$ dáva deriváciu rýchlosti podľa výšky. Odtiaľ máme vzťah pre šmykové napätie vo výške z;

$$\tau = \eta\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}z}.$$

Dostali sme vzťah pre šmykové napätie v najjednoduchšom možnom prípade: keď je prúdenie ustálené a rýchlosť vody rovnobežná vo všetkých miestach.

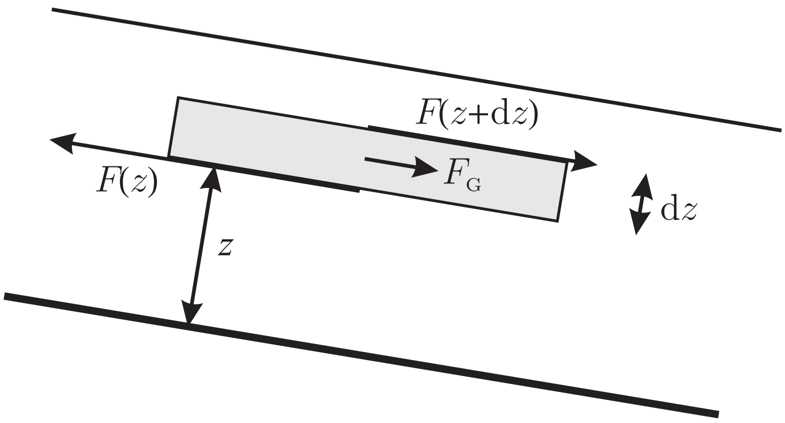
Keď už poznáme diferenciálny tvar rovnice pre šmykové napätie, môžme sa ešte iným spôsobom pozrieť na rýchlosť kvapaliny, na ktorej je položená doska ťahaná rýchlosťou $v(h)$. Opäť si pozrime nejakú vrstvu vo výške z, ktorá má hrúbku $\mathrm{d}z$. Na vrstvu pôsobia vo vodorovnom smere len šmykové sily – jedna smerom dopredu (od vrchných vrstiev), jedna smerom dozadu. Keďže predpokladáme ustálený stav, tieto dve sily musia mať rovnakú veľkosť. To znamená, že $\tau(z) = \tau(z+\mathrm{d}z)$, čiže šmykové napätie je všade rovnaké a nezávislé od zvislej súradnice. Čo z toho vyplýva? Derivácia rýchlosti podľa výšky je konštanta:

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}z} = c,$$

takže funkcia $v(z)$ musí byť tvaru $v(z) = cz + d$. Navyše vieme, že voda v nulovej výške má nulovú rýchlosť (z čoho $d = 0$) a že voda vo výške platne má rýchlosť platne: $v(h) = ch + d$. Z toho dostávame už známy vzťah

$$v(z) = z\frac{v(h)}{h}.$$

Po obohatení sa o poznatky o viskozite sa môžeme pustiť do riešenia samotného príkladu. V zadaní je napísané, že prúdenie je laminárne. To znamená, že je „hladké“ – jednotlivé vrstvy vody majú rovnobežnú rýchlosť a nepremiešavajú sa. Môžme si teda dovoliť predpokladať, že rýchlosť vody je rovnobežná s rovinou žľabu. Naviac, opäť je zo symetrie zrejmé, že rýchlosť vody bude mať len jeden smer (len „nadol“ a nie do bokov). Tiež môžeme predpokladať, že na podstatnej časti žľabu bude prúdenie ustálené, a keďže $h << b$, môžeme zanedbať javy na okrajoch žľabu. Opäť nás teda zaujíma len závislosť $v(z)$, pričom z je v tomto prípade súradnica kolmá na rovinu žľabu.



Zamerajme sa znova na tenučkú vrstvu vody vo výške z, ktorá má plochu S a hrúbku dz. Vo výške z bude šmykové napätie

$$\tau(z) = \eta\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}z}(z)$$

a vo výške $z + \mathrm{d}z$ bude

$$\tau(z + \mathrm{d}z) = \eta\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}z}(z + \mathrm{d}z).$$

Voda nad vrstvičkou bude „strhávať“ vrstvičku smerom dopredu, voda pod vrstvičkou zase smerom dozadu. (Je intuitívne jasné, že bližšie k podložke má voda menšiu rýchlosť.) Výslednica šmykových síl pôsobiacich na vrstvu teda bude teda

$$F_S = S(\tau(z + \mathrm{d}z) - \tau(z)) = S\eta\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}z}(z + \mathrm{d}z) - \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}z}(z)\right).$$

Všimnime si, že ak pošleme $\mathrm{d}z \to 0$, potom

$$\frac{\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}z}(z+\mathrm{d}z) - \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}z}(z)}{\mathrm{d}z} \to \frac{\mathrm{d}^2 v}{\mathrm{d}z^2}(z),$$

čo je druhá derivácia rýchlosti v podľa z. Odtiaľ máme vzťah pre výslednicu šmykových síl pôsobiacich na vrstvu vody vo výške z:

$$F_S = S\eta \mathrm{d}z \frac{\mathrm{d}^2 v}{\mathrm{d}z^2}(z).$$

Zároveň na vrstvičku pôsobí okrem šmykových síl zložka gravitačnej sily rovnobežná so žľabom. Táto má veľkosť $F_G = S\mathrm{d}z\rho g \sin\alpha$. Keďže prúdenie je ustálené, výslednica všetkých síl pôsobiacich na vrstvičku musí byť nula, čiže (uvažujúc len sily v smere rovnobežnom so žľabom)

$$F_G + F_S = S\mathrm{d}z\rho g \sin\alpha + S\eta \mathrm{d}z \frac{\mathrm{d}^2 v}{\mathrm{d}z^2}(z) = 0.$$

Po jednoduchej úprave dostávame diferenciálnu rovnicu

$$\frac{\mathrm{d}^2 v}{\mathrm{d}z^2} = -\frac{\rho g \sin\alpha}{\eta}.$$

Riešením tejto rovnice je funkcia, ktorej druhá derivácia je konštanta. Túto podmienku spĺňa polynóm druhého stupňa, preto

$$v(z) = kz^2 + mz + n,$$

kde

$$k = -\frac{\rho g \sin\alpha}{2\eta}.$$

Už len potrebujeme zistiť veľkosť konštánt m a n. Na to použijeme okrajové podmienky: vieme, že voda vo výške $z = 0$ má nulovú rýchlosť a šmykové trenie vo výške $z = h$ je nulové (vzduch vodu nebrzdí). Keďže

$$v(0) = n \qquad \text{a} \qquad \tau(h) = \eta \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}z}(h) = \eta(2kh + m),$$

dostávame $n = 0$ a $m = -2hk$.

Zadanie sa pýta, aký je prietok vody žľabom. Keď už poznáme funkciu $v(z)$, je to jednoduché:

$$Q = \int_0^h bv(z)\,\mathrm{d}z = \int_0^h b(kz^2 - 2hkz)\,\mathrm{d}z = \left[b\frac{kz^3}{3} - bhkz^2\right]_0^h$$
$$= b\frac{kh^3}{3} - bkh^3 = -\frac{2}{3}bkh^3 = \frac{\rho g b \sin\alpha}{3\eta}h^3.$$

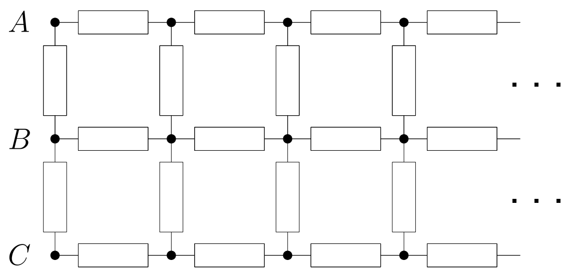
FX12 Rebrík (Opravoval Bzdušo)

Juro si na chate postavil rebrík z rezistorov s odporom R. A to nie hocijaký, dokonca dvojitý a nekonečný, tak ako na obrázku.

(a) Vypočítajte odpor medzi bodmi A a C.

(b) Vypočítajte odpor medzi bodmi A a B, ak sú body A a C vodivo spojené (vodičom s nulovým odporom).

(c) Vypočítajte odpor medzi bodmi A a B.



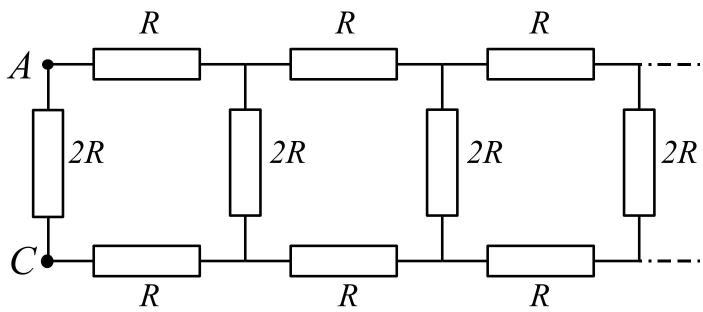
Aby sme mali jednotnú terminológiu označovania uzlov (bodov) schémy, dohodnime sa, že body napravo od A budeme označovať A_1, A_2, ...[9], body za B budeme označovať B_1, B_2, ... a za C to budú body C_1, C_2, ... Teraz sa môžeme s chuťou pustiť do práce.

Začneme teda pekne po poradí. Najprv určíme odpor medzi bodmi A a C. Situácia je symetrická podľa osi určenej uzlami B_i a našepkáva nám, že potenciál v bode B_i sa musí rovnako veľmi líšiť od potenciálov v bodoch A a C, teda musí byť strednou hodnotou potenciálov v týchto bodoch. Ale to isté platí pre úplne všetky body B_i. Dospeli sme teda k záveru že vo všetkých bodoch B_i bude rovnaký potenciál.

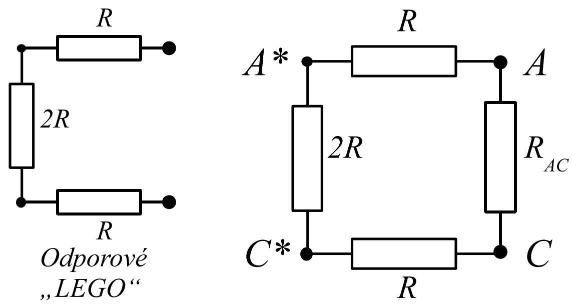
Rovnosť potenciálov nám umožňuje z obvodu „škrtnúť"[10] všetky odpory spájajúce akékoľvek dva body B_i, B_j, to znamená celý jeden riadok odporov. Pýtate sa prečo? Ohm nám zanechal zákon pre tečenie prúdu, podľa ktorého $I = U/R$, kde $U = |\varphi_i - \varphi_j|$ je rozdiel potenciálov v daných bodoch a R je odpor, ktorým sú spojené a ktorým počítaný prúd preteká. A vidíme to. Žiadne napätie, žiadny prúd. No a rovnako veľký – žiadny – prúd bude tiecť medzi danými bodmi B_i a B_j aj vtedy, keď odpory R medzi nimi vynechám. Prúdy v ostatných vetvách a potenciály v jednotlivých bodov sa tým neovplyvnia a odpor schémy medzi bodmi A a C sa nezmení. Dostávame tým nasledovnú schému:

[9] Bod A si možno predstaviť ako bod A_0, ale nebudeme to tak robiť kvôli kompatibilite so zadaním.

[10] Poznámka z Príručky mladých fyzikov: Pri konečných sieťach používajú najmä experimentálni fyzici termín „odpojiť".



Náš pôvodný dvojitý rebrík sa, pokiaľ skúmame len odpor medzi bodmi A a C, bude správať rovnako ako tento nový elegantný jednoduchý rebrík. Všimnite si, že je tvorený nekonečným množstvom pravidelne sa opakujúcich dielcov[11] znázornených na ľavom z nasledujúcej dvojice obrázkov. Označme hľadaný odpor medzi bodmi A a C ako R_{AC}. Zrejme pokiaľ k začiatku rebríka pridám ešte jeden dielec a budem skúmať odpor medzi novými koncovými bodmi A^* a C^*, tak bude taký istý ako predošlý, pretože ide o rovnakú nekonečnú schému vzhľadom na (*topologicky*) tie isté body ako pred tým.[12] To znamená, že odpor medzi A^* a C^* bude znova R_{AC}.



V pravom obrázku sme celú schému medzi bodmi A a C nahradili hľadaým odporom R_{AC}. Ten istý odpor očakávame aj medzi bodmi A^* a C^*, čo nám použitím vzťahov pre paralelne a sériovo zapojené rezistory umožňuje vyjadriť R_{AC} pomocou „seba samého”:

$$R_{AC} = \frac{2R\,(2R + R_{AC})}{2R + (2R + R_{AC})}.$$

Trochu zvláštne, že sme vyjadrili R_{AC} pomocou R_{AC}, ale v tom práve spočíva náš trik, pretože sme tým zostavili rovnicu, kde je jedinou neznámou a z ktorej sme schopní ho určiť. Jednoduchými úpravami dostávame kvadratickú rovnicu

$$R_{AC}^2 - 2RR_{AC} - 4R^2 = 0$$

[11] Akási LEGO skladačka, ale z odporov.

[12] V sieti je teraz síce zapojená jedna skladačka navyše. Otázka je, či to má nejaký zmysel, ak predpokladáme, že ich je nekonečne veľa. Pre konečné schémy by bol nový odpor naozaj iný, ale s rastúcim počtom priečok sa rozdiel zmenšuje a konverguje k nule. Premyslite si prečo.

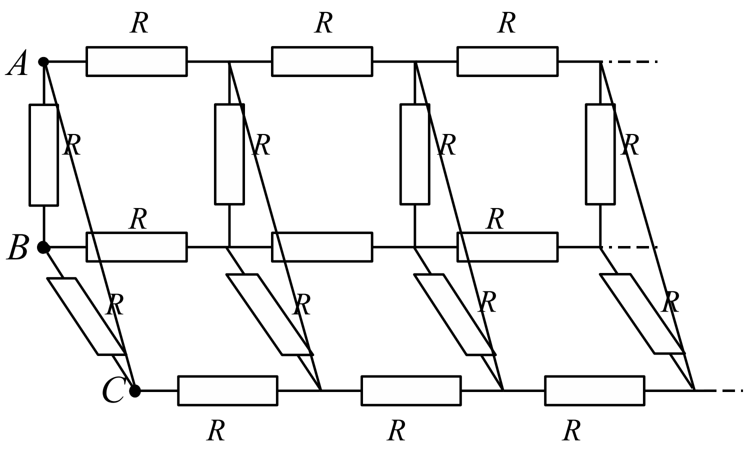
s dvoma riešeniami, správnym je nezáporné z nich[13],

$$R_{AC} = (\sqrt{5} - 1)R.$$

Aký je odpor medzi bodmi A a B, pokiaľ sú body A a C vodivo spojené? V prvom rade si treba uvedomiť, že odpor medzi A a B je rovnaký ako medzi bodmi B a C, pretože bezodporovým spojením sme z bodov A a C spravili prakticky jeden bod a máme záruku, že v oboch bude vždy rovnaký potenciál.

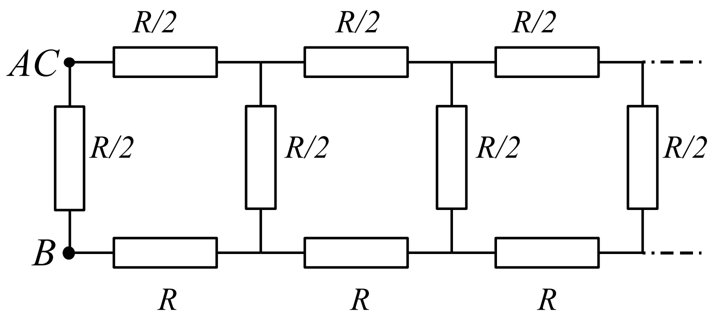
Skúsme rovnako ako v predošlej časti úlohy skúsiť niečo poodpájať alebo pospájať. K tomu musíme skúmať potenciály v jednotlivých bodoch. Avšak symetria, tzn. fakt že v bodoch A a C je rovnaký potenciál, nám našepkáva, ktoré body sú pre nás zaujímavé. Konkrétnejšie, symetria nám vraví, že rovnaký potenciál je očakávateľný v dvojici bodov A_i a C_i pre každé i.

Tieto body nie sú spojené žiadnym odporom, takže škrtať nebudeme. Spravíme presný opak. V bodoch A_i a C_i je rovnaký potenciál, preto medzi nimi nebude tiecť prúd, ani ak ich spojíme vodičom s nulovým odporom. Prúdy prechádzajúce jednotlivými časťami siete budú stále rovnaké. Vznikne nám teda niečo takéto:

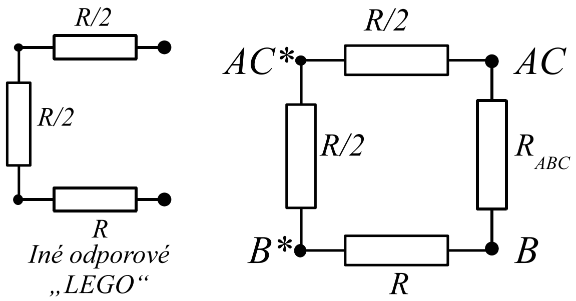


Schému ešte prekreslíme. Ak v nej zaznačené vodivé spojenie skrátime na nulu, uvidíme, o čo vlastne ide. Body A_i a C_i sa pre každé i stanú jedným bodom, nech ho naďalej označujeme ako AC_i. Všimnime si, že každé body AC_i a B_i sú spojené paralelne dvoma odpormi R, teda ich možno nahradiť odporom $R/2$. Rovnako tak sú dvoma paralelnými odpormi R spojené aj každé dva body AC_i a AC_{i+1}, preto aj toto spojenie nahradíme odporom $R/2$. Tak dostávam nový jednoduchý rebrík na nasledujúcom obrázku:

[13]Druhé riešenie síce vyhovuje tej istej rovnici, no nemá fyzikálny zmysel.



Avšak podobný problém sme už riešili v prvej časti úlohy. Akurát naša skladačka je tento raz o trošičku iná. Ak označíme hľadaný odpor ako R_{ABC}, tak musíme ten istý odpor dostať aj ak nadpojíme jednu skladačku. Schematické znázornenie skladanie je teraz takéto:



Ak budeme postupovať rovnako ako v prvej časti, dostaneme pre neznámy odpor R_{ABC} vyjadrenie

$$R_{ABC} = \frac{\frac{R}{2}\left(\frac{3R}{2} + R_{ABC}\right)}{2R + R_{ABC}},$$

ktoré analogickým spôsobom vedie na kvadratickú rovnicu

$$4R_{ABC}^2 + 6RR_{ABC} - 3R^2 = 0$$

so správnym nezáporným riešením

$$R_{ABC} = \frac{\sqrt{21} - 3}{4} R.$$

Zostáva nám posledná časť úlohy; nájsť odpor medzi A a B. Budeme ho označovať R_{AB}. Ak sa pozrieme na zadanú schému, nevieme nájsť žiadnu symetriu, ktorá by nám pomohla situáciu prekresliť nejakým škrtaním alebo spájaním na niečo jednoduchšie. Nevieme totiž nijakým spôsobom nájsť dva body s rovnakým potenciálom. Ani LEGO skladačku nevieme použiť. Chce to niečo nové.

V elektrických obvodoch platí niečo, čo možno jedným slovom nazvať *superpozícia* a ktorá vystihuje nasledovný fakt: Pokiaľ na svorky

A, B a C našej siete priložíme elektrické potenciály $(\varphi_{A1}, \varphi_{B1}, \varphi_{C1}) = \overrightarrow{\varphi_1}$,[14] tak sa v celej sieti ustália prúdy vyhovujúce Ohmovmu a Kirchhoffovým zákonom a z jednotlivých svoriek budú vytekať prúdy postupne $(I_{A1}, I_{B1}, I_{C1}) = \overrightarrow{I_1}$.[15] Ak by sme vzali nejakú inú trojicu potenciálov $(\varphi_{A2}, \varphi_{B2}, \varphi_{C2}) = \overrightarrow{\varphi_2}$, tak riešením bude nejaká (vo všeobecnosti iná, ale nie nutne) trojica vytekajúcich prúdov $(I_{A2}, I_{B2}, I_{C2}) = \overrightarrow{I_2}$. Princíp superpozície vraví, že ak na svorky prvediam lineárnu kombináciu potenciálov $\overrightarrow{\varphi} = c_1\overrightarrow{\varphi_1} + c_2\overrightarrow{\varphi_2}$, tak zo svoriek bude vytekať rovnaká lineárna kombinácia prúdov $\overrightarrow{I} = c_1\overrightarrow{I_1} + c_2\overrightarrow{I_2}$.

Skúsme trošku nahliadnuť do problému, prečo by to tak malo byť.[16] Tvrdenie nejdeme odvodzovať, skôr iba ukážeme že takéto riešenie naozaj vyhovuje rovniciam. Ak na svorky privediem potenciál $\overrightarrow{\varphi_1}$, tak okrem toho, že zo svoriek bude vytekať prúd $\overrightarrow{I_1}$, vo všetkých uzloch obvodu sa ustália nejaké potenciály a vo všetkých vetvách nejaké prúdy. Aké by boli jednotlivé potenciály a prúdy, keby sme na svorky priviedli potenciál $c_1\overrightarrow{\varphi_1}$? Na prvý pohľad ťažká otázka, ale poďme overiť tip, že všetky potenciály a prúdy budú $c_1$násobné. Ak platil Kirchhoffov zákon o prúdoch v každom uzle pred tým, musí platiť aj teraz: súčet prúdov vtekajúcich do každého uzla bola nula, a keď sa všetky prúdy zc_1-násobia, tak to bude stále nula. A Ohmov zákon o napätiach bude platiť naďalej tiež, pretože v rovniciach pre každú slučku vystupujú len členy typu „U”, resp. typu „RI”. Ak ich rovnosť platila pred tým, musí platiť aj teraz, keď sú U-čka aj I-čka c_1-násobné.

Ďalej viem, že ak som na svorky pripojil napätia $\overrightarrow{\varphi_2}$, tak mi z nich tiekli prúdy $\overrightarrow{I_2}$, pričom na všetkých uzloch sa zase spravili nejaké konkrétne potenciály a tiekli medzi nimi nejaké konkrétne prúdy. Čo ak priložím na svorky potenciál $\overrightarrow{\varphi_1}+\overrightarrow{\varphi_2}$? Naša hypotéza je, že potenciál v jednotlivých bodoch bude súčtom potenciálov v oboch situáciach a prúdy prechádzajúce každou vetvou budú súčtami prúdov v oboch situáciach. Znova môžete skúsiť jednoducho nahliadnuť, že Ohmov aj oba Kirchhoffove zákony budú naďalej platiť v celej schéme.[17]

Keď sme si princíp superpozície poriadne odôvodnili, skúsme ho

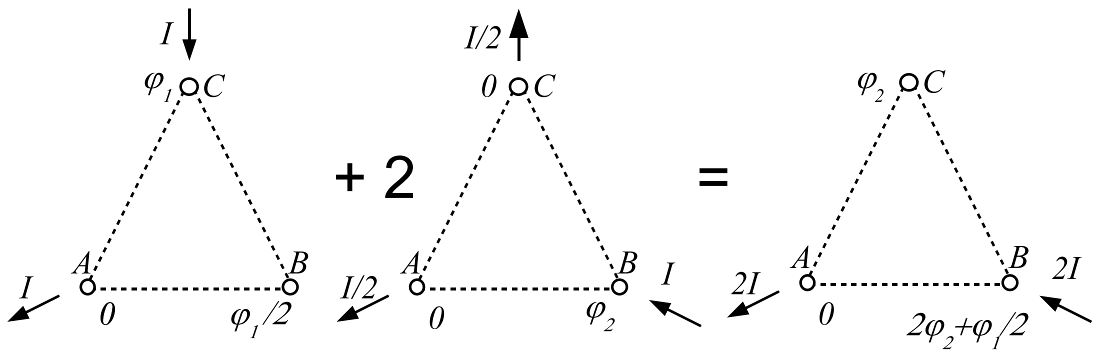
[14] Vektorovú notáciu zavádzame len kvôli jej stručnosti. Pod vektorom potenciálu, resp. elektrického prúdu si predstavte len trojicu premenných. Nejde tu o nijaké magické priestory a čarovné šípky:-)

[15] Z Kirchhoffovho zákona o prúdoch priamo vyplýva, že jeden alebo dva z týchto prúdov sú podľa tejto definície záporné, pretože niektorou svorkou musí do obvodu elektrický prúd aj vchádzať. Nikde v obvode sa nemôže hromadiť elektrický náboj.

[16] Pokiaľ sa vám nasledujúci odsek bude zdať po prvom prečítaní náročný alebo nebodaj nepochopiteľný, skúste si najprv v dôkaze nahradiť za c_1 konkrétne číslo 2. Potom si dôkaz prebehnite aj so všeobecným parametrom.

[17] Iný pekný dôkaz možno nájsť napríklad v Príručke mladých fyzikov. Okrem neho sa v kapitole o superpozícii dočítate o vlnách na vode a Schrödingerovej mačke, ale aj o tom, ktoré krajiny majú najvýhodnejšiu geografickú polohu z hľadiska medzinárodného obchodu alebo o tom, ku ktorej pokladni v Tescu sa treba postaviť, aby sme čakali pokiaľ možno čo najkratší čas.

aplikovať na náš problém. Situáciu, keď by sme merali odpor R_{AC}, si predstavme tak, že sme chceli nechať medzi bodmi A a C prechádzať prúd I a zisťovali sme, aký napäťový rozdiel φ_1 je na to potrebný (prvý obrázok). Pritom samozrejme vieme, že to bude $\varphi_1 = R_{AC}I$. Podobne, keď sme merali odpor R_{ABC}, zisťovali sme, aký napäťový rozdiel je potrebné vytvoriť, aby obvodom prechádzal rovnako veľký prúd I a zistili sme, že to je nejaké φ_2 (druhý obrázok), pričom zase vieme, že $\varphi_2 = R_{ABC}I$. V treťom prípade potrebujeme získať situáciu, kde z bodu C nevyteká žiaden prúd. Je práve jedna a je zobrazená v nasledujúcej schéme.[18]



Zo schémy (a z Ohmovho zákona) vidno, že hľadaný odpor R_{AB} musí spĺňať rovnicu:

$$
\begin{aligned}
2IR_{AB} &= 2\varphi_2 + \varphi_1/2 \\
2IR_{AB} &= 2R_{ABC}I + R_{AC}I/2 \\
R_{AB} &= R_{ABC} + R_{AC}/4.
\end{aligned}
$$

Ak dosadíme za už spočítané odpory R_{AC} a R_{ABC}, dostávame

$$R_{AB} = \left(\frac{\sqrt{5} + \sqrt{21}}{4} - 1 \right) R.$$

Napokon ešte malá odozva k vašim riešeniam. Niektorí ste pri počítaní poslednej časti úlohy využívali trik, ktorému sme dali pracovný názov *čierna skrinka*. Povedali ste si, že schému medzi bodmi A, B a C si možno predstaviť tak, akoby bol každý bod spojený s každým práve jedným odporom (zapojenie do trojuholníka) alebo že každý z týchto bodov je spojený s akýmsi uzlom uprostred práve jedným odporom (zapojenie do hviezdy). Potom ste si povedali, že zo symetrie sú dva z týchto odporov rovnaké, čím vám ostali v náhradnej schéme len dva

[18]Správne vzaté, je to aj hocijaký násobok tejto situácie. Všetky sú charakteristické tým, že pomer namiešania situácií (a) a (b) je 1 : 2.

neznáme parametre, ktorých hodnoty sa už dali určiť z častí (a) a (b) úlohy. Potom ste už ľahko dorátli odpor v časti (c). Tento trik naozaj funguje, ale vôbec nejde o triviálny fakt. Existuje dokonca sofistikovanejšie tvrdenie, ktoré vraví, že ak mám „čiernu skrinku“ s n svorkami, môžem si namiesto jej skutočného obsahu predstaviť náhradnú schému, kde je každá svorka spojená s každou práve jedným odporom. Pokiaľ ste tento trik používali a náležite ste jeho správnosť neodôvodnili, strhol som vám bod. Kto má záujem, môže si pozrieť korektný Kubusov dôkaz tohto tvrdenia na `www.gamca.sk/~kubo/doc/eos.pdf`.

Aby som vás ešte trošku utíšil, poviem vám smutnú správu. Náhradná schéma ku „čiernej skrinke“ nie je až taká dokonale užitočná, pretože sa pri nej narátate ako draci pri určovaní jednotlivých odporov, ale úlohy sa pomocou nej dajú porátať práve vtedy, keď sa dajú vyrátať aj cez vo vzoráku použitú fintu so superpozíciou. Toľko k vám. Zostáva len popriať veľa dobrých nápadov v ďalšej sérii. Dohovoril som. Howgh!

Výsledková listina FX po štvrtej sérii.

#	Riešiteľ	FX1-9	FX10	FX11	FX12	$\sum$
1.	Filip Kubina	32.5	3	3.5	4.2	43.2
2.	Jan Hermann	23.5	3	5	3	34.5
3.	Peter Vanya	10	3	4.5	2.9	20.4
4.	Michal Spišiak	10	5	-	4	19
5.	Lukáš Konečný	14	-	-	2.2	16.2
6.	Lucia Simanová	11.5	-	-	-	11.5
7.	Samuel Hapák	8.5	-	-	-	8.5
8.	Dávid Vendel	5	-	-	-	5
9.	Mária Kieferová	-	-	-	3.4	3.4
10.	Ivan Burmister	1	-	-	-	1
	Michal Hojčka	1	-	-	-	1
	Peter Ondáč	1	-	-	-	1
13.	Zuzana Horváthová	0	-	-	-	0
	Eugen Hruška	0	-	-	-	0
	Barbora Sedlačková	0	-	-	-	0
	Alena Černá	0	-	-	-	0