

**FX [f:ks]**

Vzorové riešenia a výsledky 5. série 4. ročníka

**FX13 Kolieska** (Opravoval Jakub)

*Marcel sa rád hrá s kolieskami. Minule vzal dve homogénne kolieska s hmotnosťou  $M$  a polomerom  $R$  a pripojil ich na opačné konce spoločnej ľahkej osky dĺžky  $2L$  tak, aby sa mohli otáčať nezávisle od seba. Potom toto čudo položil na vodorovnú podložku a kolieska roztočil tak, aby sa oska otáčala uhlovou rýchlosťou  $\omega$  okolo zvislej osi prechádzajúcej jej stredom. Aká je celková kinetická energia tohto čuda, ak kolieska neprešmykujú?*

Najprv si úlohu skonkretizujeme, aby bola primerane ľahká/ťažká:

- Kolieska budem považovať za dokonale tuhé teleso v podobe konečne tenkého homogénneho disku (keby to bol homogénny valec, tak by sa to dalo riešiť presne rovnako, len by sa zmenil tenzor zotrvačnosti).
- Spájajúca oska je dokonale tuhá a nehmotná (jej kinetická energia je nulová).
- Podložku považujem za inerciálnu vzťažnú sústavu a v tejto sústave budem počítat kinetickú energiu toho zadaného čuda.<sup>1</sup>

Taktiku boja zvolíme „priamočiaru“. Dôsledne odvodíme formuly pre kinetickú energiu tuhého telesa a následne ich aplikujeme na danú úlohu.

Varovanie! V tomto riešení sa budú vyskytovať vo veľkom počte vektorové veličiny, písané tučne. Operovať s nimi budeme adekvátne ich povahe. Hojne sa bude používať skalárny a vektorový súčin. Ako cvičenie si skúste dokázať platnosť identity (ako roznásobiť štvorec dvojčlena)

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b})^2 \equiv (\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} + 2(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) + \mathbf{b} \cdot \mathbf{b} \equiv \mathbf{a}^2 + 2(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) + \mathbf{b}^2.$$

Na začiatok rýchle opakovanie o tuhom telese. Tuhé teleso s celkovou hmotnosťou  $M$  si predstavím ako sústavu  $N$  (predstav si mnoho,

<sup>1</sup>Niekoľko veľmi prefikáný by totiž mohol rátať kinetickú energiu tej našej hračky v sústave rotujúcej s uhlovou rýchlosťou  $\omega$  okolo nehybnej zvislej osi prechádzajúcej stredom osky koliesok. Potom by šmahom ruky povedal, že  $E_{kin} = 2\frac{1}{2}J\Omega^2$ , kde  $J = \frac{MR^2}{2}$  je moment zotrvačnosti plného homogénneho disku okolo jeho rotačnej osi a  $\Omega = \frac{L}{R}\omega$  je uhlová rýchlosť otáčania koliesok okolo svojej rotačnej osi.

veľa) hmotných bodov s hmotnosťami  $m_i$  nachádzajúcich sa v miestach daných polohovými vektormi  $\mathbf{r}_i(t)$ . Potom vektor do ťažiska viem určiť ako vážený priemer

$$\mathbf{r}_T(t) = \frac{\sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}_i(t)}{\sum_{i=1}^N m_i} = \frac{\sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}_i(t)}{M}.$$

Ďalej definujem polohový vektor  $i$ -tej častice s počiatkom vo vybranom bode danom vektorom  $\mathbf{r}_0(t)$  ako  $\boldsymbol{\rho}_i(t) = \mathbf{r}_i(t) - \mathbf{r}_0(t)$ . Je jasné, že ak je bod  $\mathbf{r}_0(t)$  fixovaný v telese, vďaka nedeformovateľnosti tuhého telesa sa dĺžka vektora  $\boldsymbol{\rho}_i(t)$  nebude meniť. Tiež je ľahko nahliadnúť, že

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N m_i \boldsymbol{\rho}_i(t) &= \sum_{i=1}^N m_i [\mathbf{r}_i(t) - \mathbf{r}_0(t)] \\ &= \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}_i(t) - M \mathbf{r}_0(t) = M [\mathbf{r}_T(t) - \mathbf{r}_0(t)]. \end{aligned}$$

Zamyslime sa nad tým, aký najvšeobecnejší pohyb môže tuhé teleso vykonávať! Keďže tuhé teleso má v každom okamihu vzájomné vzdialenosti všetkých jeho bodov rovnaké, tak žiadame, aby zobrazenie telesa v čase  $t_1$  na teleso v čase  $t_2$  bolo zhodné.<sup>2</sup> To nám však nestačí, lebo žiadne reálne teleso neviem zozrkadliť.<sup>3</sup> Preto žiadam ešte aj, aby to bolo priame zhodné zobrazenie. Nuž a priame izometrie v priestore sú len posunutie a otočenie okolo osi a ich kombinácia. Dopracovali sme sa k tomu, že najdivokejšie ródeo, ktorého je tuhé teleso schopné, pozostáva z translačného pohybu spojeného s rotáciou okolo nejakej okamžitej osi.

Ako popísať pohyb tuhého telesa? Transláciu viem popísať polohovým vektorom  $\mathbf{r}_0(t)$ , ktorým sledujem ľubovoľne vybraný „bod 0“ nami sledovaného tuhého telesa. Znalosť polohy bodu 0 mi dovoľuje myšlienkovito zafixovať tento bod a následne uvažovať rotáciu telesa upevneného v bode 0. Smer osi rotácie<sup>4</sup> popíšem jednotkovým vektorom  $\mathbf{n}(t)$  a rýchlosť rotácie okolo tejto osi nie je nič iné ako uhlová rýchlosť  $\boldsymbol{\omega}(t)$ . Vektoro môžem celú informáciu o rotácii zapísať pomocou vektora  $\boldsymbol{\omega}(t) = \omega(t)\mathbf{n}(t)$ . Pri takomto popise platí, že rýchlosť  $i$ -tej častice viem vyjadriť rovnicou

$$\mathbf{v}_i(t) = \mathbf{v}_0(t) + \boldsymbol{\omega}(t) \times \boldsymbol{\rho}_i(t),$$

<sup>2</sup>Inými slovami, zobrazenie má byť izometria.

<sup>3</sup>Alebo stredovo zosúmerníť.

<sup>4</sup>Orientáciu volíme tak, aby prsty pravej ruky ukazovali smer otáčania ak palec má smer a orientáciu vektora  $\mathbf{n}$ .

kde druhý člen vyjadruje obvodovú rýchlosť otáčania  $i$ -teho bodu okolo bodu 0; dá sa o tom ľahko presvedčiť (samozrejme, iba ak si čitateľ spomenie na vlastnosti vektorového súčinu).<sup>5</sup>

Teraz spočítame kinetickú energiu tuhého telesa v nejakom čase  $t$  (závislosť veličín na čase už ďalej nebudem písať)

$$\begin{aligned}
E_{kin} &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{v}_i^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i (\mathbf{v}_0 + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}_i)^2 \\
&= \frac{1}{2} M \mathbf{v}_0^2 + \sum_{i=1}^N m_i [\mathbf{v}_0 \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}_i)] + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}_i)^2 \\
&= \frac{1}{2} M \mathbf{v}_0^2 + \mathbf{v}_0 \cdot \left\{ \boldsymbol{\omega} \times \left[ \sum_{i=1}^N m_i \boldsymbol{\rho}_i \right] \right\} + \frac{1}{2} \omega^2 \sum_{i=1}^N m_i (\mathbf{n} \times \boldsymbol{\rho}_i)^2 \\
&= \frac{1}{2} M \mathbf{v}_0^2 + \mathbf{v}_0 \cdot \{ \boldsymbol{\omega} \times [M (\mathbf{r}_T - \mathbf{r}_0)] \} + \frac{1}{2} \omega^2 \sum_{i=1}^N m_i r_i^2 \\
&= \frac{1}{2} M \mathbf{v}_0^2 + M \mathbf{v}_0 \cdot \{ \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{r}_T(t) - \mathbf{r}_0(t)) \} + \frac{1}{2} J_0(\mathbf{n}) \omega^2,
\end{aligned}$$

kde veličina  $r_i = |\boldsymbol{\rho}_i| \sin \alpha = |\mathbf{n} \times \boldsymbol{\rho}_i|$  (viď obr. nižšie) je vzdialenosť  $i$ -teho bodu od osi rotácie prechádzajúcej bodom 0;  $J_0(\mathbf{n}) = \sum_{i=1}^N m_i r_i^2 = \sum_{i=1}^N m_i (\mathbf{n} \times \boldsymbol{\rho}_i)^2$  je moment zotrvačnosti telesa vzhľadom na bod 0 pre otáčanie okolo osi prechádzajúcej bodom 0 v smere  $\mathbf{n}$ . Vidno, že stredný člen môžeme ľahko znulovať. Stačí, ak vyberieme za bod 0 taký bod, ktorý stojí,<sup>6</sup> alebo ak zoberieme za bod 0 ťažisko. Nám sa bude hodiť vyjadrenie pomocou ťažiska ako referenčného bodu. Vektor  $\boldsymbol{\rho}_i$  bude v nasledovnom texte chápaný výlučne ako vektor idúci z ťažiska tuhého telesa do jeho  $i$ -teho bodu. Potom platí

$$\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}_T \quad \Rightarrow \quad \sum_{i=1}^N m_i \boldsymbol{\rho}_i = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad E_{kin} = \frac{1}{2} M \mathbf{v}_T^2 + \frac{1}{2} J_T(\mathbf{n}) \omega^2.$$

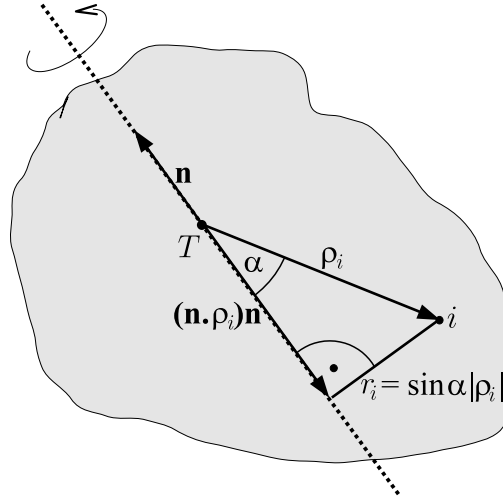
Našou ďalšou snahou bude vyšetriť moment zotrvačnosti vzhľadom na ťažisko okolo ľubovoľnej osi  $J_T(\mathbf{n})$ . Výchadzame z rovnice

$$J_T(\mathbf{n}) = \sum_{i=1}^N m_i r_i^2,$$

<sup>5</sup>Tu si treba uvedomiť, že rôzni pozorovatelia považujú za os rotácie rôzne navzájom rovnobežné osi. Napr. pre rovnomerne sa kotúlajúce koleso by nehybný pozorovateľ povedal, že koleso sa v každom okamihu otáča okolo osi prechádzajúcej dotykovým bodom, kdežto kamarát idúci na bicykli zároveň s kolesom by povedal, že koleso rotuje okolo osi prechádzajúcej stredom kolesa. Každopádne, náš popis je v poriadku nech bod 0 leží kdekoľvek. Totiž, ak by neležal na samotnej osi otáčania (nech na nej leží bod  $S$ ), tak jeho rýchlosť bude  $\mathbf{v}_0(t) = \mathbf{v}_S(t) + \boldsymbol{\omega}(t) \times [\mathbf{r}_0(t) - \mathbf{r}_S(t)]$ , čiže  $\mathbf{v}_i(t) = \mathbf{v}_0(t) + \boldsymbol{\omega}(t) \times \boldsymbol{\rho}_i(t) = \mathbf{v}_S(t) + \boldsymbol{\omega}(t) \times [\mathbf{r}_0(t) + \boldsymbol{\rho}_i(t) - \mathbf{r}_S(t)] = \mathbf{v}_S(t) + \boldsymbol{\omega}(t) \times [\mathbf{r}_i(t) - \mathbf{r}_S(t)]$ . Čo je presne to, čo chceme.

<sup>6</sup>Vzhľadom na sústavu, v ktorej počítam kinetickú energiu môjho tuhého telesa.

kde  $r_i$  je vzdialenosť  $i$ -teho bodu od osi otáčania prechádzajúcej ťažiskom. Pomôžeme si obrázkom,



z ktorého hneď vidíme, že

$$r_i^2 = \rho_i^2 - (\mathbf{n} \cdot \rho_i)^2,$$

lebo  $\mathbf{n} \cdot \rho_i$  je veľkosť priemetu vektora  $\rho_i$  do smeru jednotkového vektora  $\mathbf{n}$ .<sup>7</sup> Inak je to čistá Pytagova veta.

Uvažujme nejakú pravouhlú pravotočivú súradnicovú sústavu s počiatkom v ťažisku, pevne spojenú s telesom. Vyjadrime pomocou nej vektor  $\rho_i \equiv (x_i, y_i, z_i)$  a tiež jednotkový vektor smeru osi otáčania  $\mathbf{n} = (n_x, n_y, n_z)$ . Potom môžem písať

$$\begin{aligned} J_T(\mathbf{n}) &= \sum_{i=1}^N m_i r_i^2 = \sum_{i=1}^N m_i \{ \rho_i^2 - (\mathbf{n} \cdot \rho_i)^2 \} \\ &= \sum_{i=1}^N m_i \{ (x_i^2 + y_i^2 + z_i^2) - (n_x x_i + n_y y_i + n_z z_i)^2 \}. \end{aligned}$$

Teraz roznásobíme druhú zátvorku a prvú rafinovane prenášobím jednotkou v tvare  $1 = \mathbf{n}^2 = n_x^2 + n_y^2 + n_z^2$ :

$$\begin{aligned} J_T(\mathbf{n}) &= \sum_{i=1}^N m_i [(n_x^2 + n_y^2 + n_z^2)(x_i^2 + y_i^2 + z_i^2) - \\ &\quad - (n_x^2 x_i^2 + n_y^2 y_i^2 + n_z^2 z_i^2 + 2n_x x_i n_y y_i + 2n_x x_i n_z z_i + 2n_y y_i n_z z_i)] \end{aligned}$$

<sup>7</sup>Teda vektor  $(\mathbf{n} \cdot \rho_i)\mathbf{n}$  je samotný priemet vektora  $\rho_i$  do smeru jednotkového vektora  $\mathbf{n}$ .

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^N m_i [n_x^2(y_i^2 + z_i^2) + n_y^2(x_i^2 + z_i^2) + n_z^2(x_i^2 + y_i^2) - \\
&\quad - 2n_x n_y x_i y_i - 2n_x n_z x_i z_i - 2n_y n_z y_i z_i] \\
&= n_x^2 \sum_{i=1}^N m_i (y_i^2 + z_i^2) + n_y^2 \sum_{i=1}^N m_i (x_i^2 + z_i^2) + n_z^2 \sum_{i=1}^N m_i (x_i^2 + y_i^2) - \\
&\quad - 2n_x n_y \sum_{i=1}^N m_i x_i y_i - 2n_x n_z \sum_{i=1}^N m_i x_i z_i - 2n_y n_z \sum_{i=1}^N m_i y_i z_i \\
&= n_x^2 J_{xx} + n_y^2 J_{yy} + n_z^2 J_{zz} + 2n_x n_y J_{xy} + 2n_x n_z J_{xz} + 2n_y n_z J_{yz},
\end{aligned}$$

čo sa dá prehľadne zapísať pomocou maticového zápisu

$$J_T(\mathbf{n}) = \begin{pmatrix} n_x & n_y & n_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_{xx} & J_{xy} & J_{xz} \\ J_{yx} & J_{yy} & J_{yz} \\ J_{zx} & J_{zy} & J_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix},$$

pričom matica s J-čkami sa nazýva tenzor zotrvačnosti telesa. Pre jeho komponenty platia vzťahy

$$\begin{aligned}
J_{xx} &= \sum_{i=1}^N m_i (y_i^2 + z_i^2) & J_{xy} &= J_{yx} = - \sum_{i=1}^N m_i x_i y_i \\
J_{yy} &= \sum_{i=1}^N m_i (x_i^2 + z_i^2) & J_{xz} &= J_{zx} = - \sum_{i=1}^N m_i x_i z_i \\
J_{zz} &= \sum_{i=1}^N m_i (x_i^2 + y_i^2) & J_{yz} &= J_{zy} = - \sum_{i=1}^N m_i y_i z_i.
\end{aligned}$$

Lepší pohľad na diagonálne komponenty nám odhalí, že sa jedná o momenty zotrvačnosti telesa okolo jednotlivých osí.<sup>8</sup> Nediagonálne členy sú pre pekne symetrické a homogénne telesá nulové.

Teraz prichádza taká malá fakultatívna odbočka. Bude sa týkať Steinerovej vety a je tu uvedená len kvôli tematickej spriaznenosti. Na výpočet príkladu ju nebudeme potrebovať. Uvažujme, že poznáme  $J_T(\mathbf{n})$  a chceme určiť  $J_O(\mathbf{n})$  pre nejaký iný bod  $O$ . Označím vektor z ťažiska do bodu  $O$  ako  $\overrightarrow{TO} = \mathbf{R}$ . Potom vektor z bodu  $O$  do  $i$ -teho bodu telesa bude  $\boldsymbol{\rho}_i - \mathbf{R}$ . Rozpísané na drobné platí

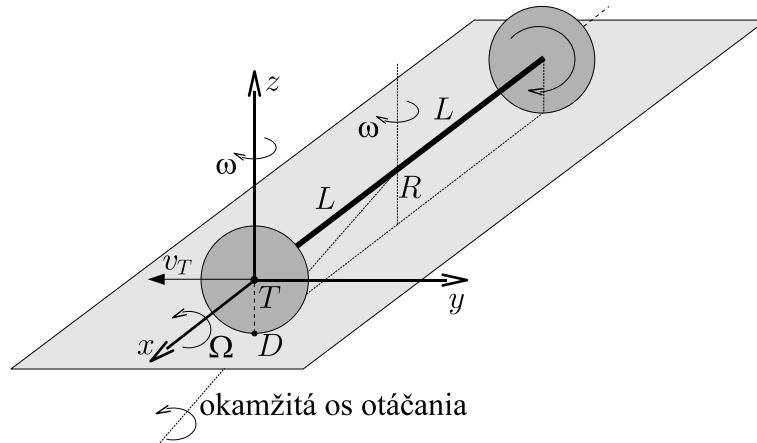
$$\begin{aligned}
J_O(\mathbf{n}) &= \sum_{i=1}^N m_i [\mathbf{n} \times (\boldsymbol{\rho}_i - \mathbf{R})]^2 = \sum_{i=1}^N m_i [(\mathbf{n} \times \boldsymbol{\rho}_i) - (\mathbf{n} \times \mathbf{R})]^2 \\
&= \sum_{i=1}^N m_i [(\mathbf{n} \times \boldsymbol{\rho}_i)^2 - 2(\mathbf{n} \times \boldsymbol{\rho}_i) \cdot (\mathbf{n} \times \mathbf{R}) + (\mathbf{n} \times \mathbf{R})^2]
\end{aligned}$$

<sup>8</sup>Inak to ani byť nemôže, lebo keď pre  $\mathbf{n} = (1, 0, 0)$  dostaneme  $J_T(\mathbf{n}) = J_{xx}$ , čo musí byť práve moment zotrvačnosti telesa vzhľadom na  $x$ -ovú os.

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^N m_i (\mathbf{n} \times \boldsymbol{\rho}_i)^2 - 2 \left\{ \mathbf{n} \times \left[ \sum_{i=1}^N m_i \boldsymbol{\rho}_i \right] \right\} \cdot (\mathbf{n} \times \mathbf{R}) + \\
&\quad + \sum_{i=1}^N m_i (\mathbf{n} \times \mathbf{R})^2 \\
&= J_T(\mathbf{n}) - \mathbf{0} + M(\mathbf{n} \times \mathbf{R})^2,
\end{aligned}$$

čo je skutočne známa Steinerova veta, lebo  $|\mathbf{n} \times \mathbf{R}|$  je vzdialenosť bodu  $O$  od osi rotácie prechádzajúcej ťažiskom. (Pretože  $\mathbf{n}$  je jednotkový vektor v smere tejto osi.) Všimnite si, že stredný člen v predposlednom riadku vypadol kvôli sume  $m_i \boldsymbol{\rho}_i$ .

Konečne prišiel čas riešiť náš príklad. Zo zadania sa dá vyrozumieť, že ťažisko celého čuda sa vzhľadom na podložku nehýbe. Avšak naše čudo nie je tuhé teleso, keďže jednotlivé kolesá sa môžu otáčať vďaka bombastickým vlastnostiam nehmotnej a dokonale tuhej osky úplne nezávisle na sebe. Zrejme atomistický problém bude kinetická energia jedného kolesa a je jasné, že kinetická energia druhého kolesa bude rovnaká ako toho prvého. Pozrieme sa na problém z inerciálnej vzťažnej sústavy sporej s podložkou. Ako súradnicovú sústavu si zvolím pravouhlú pravotočivú bázu takú, že v nejakom čase  $t_0$  problém vyzerá tak ako je vyobrazený na obrázku.



Budem počítať kinetickú energiu predného kolesa v tomto fixovanom čase  $t_0$ .<sup>9</sup> Toto koleso koná tri základné pohyby: jeho ťažisko sa pohybuje rýchlosťou  $\mathbf{v}_T = -L\omega\hat{\mathbf{e}}_2$ , otáča sa uhlovou rýchlosťou  $-\omega\hat{\mathbf{e}}_3$  (okolo zvislej osi) a uhlovou rýchlosťou  $\Omega\hat{\mathbf{e}}_1$  (okolo  $x$ -ovej osi). Podmienka je, že koleso neprešmykuje na stole, čo je ekvivalentné tomu, že rýchlosť bodu  $D$  je nulová, resp.

$$\mathbf{v}_D(t_0) = \mathbf{v}_T(t_0) + (-\omega\hat{\mathbf{e}}_3) \times (-R\hat{\mathbf{e}}_3) + (\Omega\hat{\mathbf{e}}_1) \times (-R\hat{\mathbf{e}}_3) = \mathbf{0},$$

<sup>9</sup>Očividne  $E_{kin}$  nezávisí explicitne od času, ale iba od  $\omega$ .

keďže vektor z ťažiska  $T$  do dotykového bodu  $D$  je  $\overrightarrow{TD} = -R\hat{\mathbf{e}}_3$ . Druhý člen je nulový a teda priamo dostávame

$$-L\omega\hat{\mathbf{e}}_2 + R\Omega\hat{\mathbf{e}}_2 = \mathbf{0}, \quad \text{teda} \quad \Omega = \frac{L}{R}\omega.$$

Potom ľubovoľný bod  $i$  kola určený vektorom z ťažiska  $\boldsymbol{\rho}_i$  sa pohybuje v čase  $t_0$  rýchlosťou

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_i(t_0) &= \mathbf{v}_T(t_0) + (-\omega\hat{\mathbf{e}}_3) \times \boldsymbol{\rho}_i(t_0) + (\Omega\hat{\mathbf{e}}_1) \times \boldsymbol{\rho}_i(t_0) \\ &= \mathbf{v}_T(t_0) + (\Omega\hat{\mathbf{e}}_1 - \omega\hat{\mathbf{e}}_3) \times \boldsymbol{\rho}_i(t_0), \end{aligned}$$

čo znamená, že vektor uhlovej rýchlosti otáčania kola v čase  $t_0$  je

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\phi} &= \Omega\hat{\mathbf{e}}_1 - \omega\hat{\mathbf{e}}_3 = \omega \left( \frac{L}{R}\hat{\mathbf{e}}_1 - \hat{\mathbf{e}}_3 \right) \\ &= \omega \sqrt{\left(\frac{L}{R}\right)^2 + 1} \left[ \frac{\frac{L}{R}}{\sqrt{\left(\frac{L}{R}\right)^2 + 1}}\hat{\mathbf{e}}_1 - \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{L}{R}\right)^2 + 1}}\hat{\mathbf{e}}_3 \right]. \end{aligned}$$

Prečítané do ľudskej reči to znamená, že koleso rotuje uhlovou rýchlosťou  $\boldsymbol{\phi} = \omega \sqrt{\left(\frac{L}{R}\right)^2 + 1}$  okolo osi danej jednotkovým vektorom<sup>10</sup>

$$\mathbf{n} = (n_x, n_y, n_z) = \left( \frac{\frac{L}{R}}{\sqrt{\left(\frac{L}{R}\right)^2 + 1}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{L}{R}\right)^2 + 1}} \right).$$

Potrebujem ešte určiť jednotlivé komponenty tenzora zotrvačnosti. To by som mal urobiť v nejakej pravouhlej báze pevne spojenj s telesom. V tej istej báze mám potom určiť komponenty jednotkového vektora  $\mathbf{n}$  osi rotácie v čase  $t_0$ . Nuž, môžem využiť bázu, ktorá je v zakreslená v obrázku vyššie. V čase  $t_0$  ju totiž naozaj môžem chápať ako pevne spojenú s kolesom.<sup>11</sup> Keďže koleso považujem za rovinné,<sup>12</sup> tak zjavne

$$J_{xy} = -\sum_{i=1}^N m_i x_i y_i = 0 \quad \text{a} \quad J_{xz} = -\sum_{i=1}^N m_i x_i z_i = 0.$$

<sup>10</sup>Táto os je v obrázku znázornená bodkovaně ako okamžitá os otáčania. Čiara na obrázku totiž spája stred osky (ktorý môžem chápať ako nehmotnú súčasť sledovaného predného kola) a bod  $D$ . Oba sú v čase  $t_0$  nehybné, takže ležia na jeho okamžitej osi rotácie.

<sup>11</sup>Fakt, že báza pevne spojená s kolesom je rotujúca a pohybujúca sa báza neinerciálnej vzťažnej sústavy nás netrápi, lebo skúmame iba stav vo fixovanom čase  $t_0$ , v ktorom potrebujem v danej báze vyjadriť komponenty jednotkového vektora  $\mathbf{n}$ , čo už mám dokonca hotové.

<sup>12</sup>Pre homogénny valec s hrúbkou  $H$  by sme dostali komponenty  $J_{xx} = \frac{1}{2}MR^2$ ;  $J_{yy} = J_{zz} = \frac{1}{4}MR^2 + \frac{1}{12}MH^2$ ;  $J_{xy} = J_{xz} = J_{yz} = 0$ .

Vďaka symetrii kola vzhľadom na  $y$ -ovú os (rovnako dobre by poslúžila aj  $z$ -ová) dostaneme

$$J_{yz} = - \sum_{i=1}^N m_i y_i z_i = 0.$$

Napokon diagonálne členy budú pre homogénny disk

$$J_{xx} = \sum_{i=1}^N m_i (y_i^2 + z_i^2) = \frac{1}{2} M R^2,$$

čo je moment zotrvačnosti plného disku vzhľadom na jeho stred pre otáčanie okolo rotačnej osi, resp.

$$J_{yy} = \sum_{i=1}^N m_i (x_i^2 + z_i^2) = \sum_{i=1}^N m_i z_i^2 = \frac{1}{4} M R^2,$$

$$J_{zz} = \sum_{i=1}^N m_i (x_i^2 + y_i^2) = \sum_{i=1}^N m_i y_i^2 = \frac{1}{4} M R^2,$$

čo sú momenty zotrvačnosti plného disku vzhľadom na jeho stred pre otáčanie okolo osi ležiacej v rovine disku.<sup>13</sup>

Pre väčšiu preľadnosť rovníc si označme  $\sqrt{\left(\frac{L}{R}\right)^2 + 1}$  ako  $C$ . Potom kinetická energia jedného kola je

$$\begin{aligned} E_{kin} &= \frac{1}{2} M \mathbf{v}_T^2 + \frac{1}{2} J_T(\mathbf{n}) \phi^2 \\ &= \frac{1}{2} M (L\omega)^2 + \frac{1}{2} [n_x^2 J_{xx} + n_z^2 J_{zz}] [\omega C]^2 \\ &= \frac{1}{2} M L^2 \omega^2 + \frac{1}{2} \left[ \left(\frac{L}{RC}\right)^2 \frac{1}{2} M R^2 + \left(-\frac{1}{C}\right)^2 \frac{1}{4} M R^2 \right] \omega^2 C^2 \\ &= \frac{1}{2} M L^2 \omega^2 + \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{2} M L^2 + \frac{1}{4} M R^2 \right] \omega^2 \\ &= M \omega^2 \left[ \frac{3}{4} L^2 + \frac{1}{8} R^2 \right]. \end{aligned}$$

Dostávame riešenie (kinetická energia celej sústavy – čiže oboch kolies)

$$E = M \omega^2 \left[ \frac{3}{2} L^2 + \frac{1}{4} R^2 \right].$$

<sup>13</sup>Malo by byť jasné, že platí  $J_{xx} = 2J_{yy} = 2J_{zz}$ , lebo sumy  $\sum_{i=1}^N m_i y_i^2$  a  $\sum_{i=1}^N m_i z_i^2$  sú zhodné a suma  $\sum_{i=1}^N m_i x_i^2$  je nulová.



Alternatívne riešenie využije vyššie dokázanú skutočnosť, že kinetickú energiu tuhého telesa (ale to sa dá dokázať aj pre ľubovoľnú sústavu hmotných bodov) môžeme určiť ako súčet translačnej kinetickej energie ťažiska ( $\frac{1}{2}M\mathbf{v}_{\mathbf{T}}^2$ ) a rotačnej kinetickej energie. Nuž, a tá rotácia je, ako sme už spomínali, rotácia okolo  $x$ -ovej osi uhlovou rýchlosťou  $\Omega$  a súčasná rotácia okolo  $z$ -ovej osi uhlovou rýchlosťou  $\omega$ . Označme si vektorom  $\mathbf{u}_i$  rýchlosť  $i$ -teho bodu telesa vzhľadom na ťažisko. Môžeme si všimnúť, že rotácia okolo osi  $x$  spôsobí, že body kolesa majú nenulové zložky rýchlostí  $(\mathbf{u}_i)_y$  a  $(\mathbf{u}_i)_z$ . Rotácia okolo osi  $z$  však vďaka nulovej hrúbke kolesa dá bodom kolesa rýchlosť len v smere osi  $x$ , čiže spôsobí nenulové  $(\mathbf{u}_i)_x$ . Takže rýchlosti jednotlivých bodov kolesa  $\mathbf{u}_i$  za tieto dve rotácie sú na seba kolmé. To nám umožňuje rotačnú energiu veľmi jednoducho rozdeliť na 2 členy, z ktorých prvý člen musí byť kinetická energia rotácie okolo osi  $z$  a druhý člen kinetická energia rotácie okolo osi  $x$ :

$$\begin{aligned}
 E_{rot} &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{u}_i^2 \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i [(u_i)_x^2 + (u_i)_y^2 + (u_i)_z^2] \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i (u_i)_x^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i [(u_i)_y^2 + (u_i)_z^2] \\
 &= \frac{1}{2} J_{zz} \omega^2 + \frac{1}{2} J_{xx} \Omega^2.
 \end{aligned}$$

Tým je hlavná potiaž tejto úlohy prekonaná bez vyjadrovania vektoru okamžitej osi rotácie, veľkosti uhlovej rýchlosti a momentu zotrvačnosti vzhľadom na os okamžitej rotácie. Dovoľujeme si spočítať len na určenie  $\mathbf{v}_{\mathbf{T}}$ ,  $\Omega$ ,  $J_{xx}$  a  $J_{zz}$  a dosadení do rovnice

$$E_{kin} = M\mathbf{v}_{\mathbf{T}}^2 + J_{zz}\omega^2 + J_{xx}\Omega^2.$$

### FX14 Pinkačka (Opravoval Kubus)

Jano chce poraziť Jura v squashu a tak poctivo trénuje. Minule si napríklad zohnal loptičku s hmotnosťou  $m$  a škatuľu tvaru kvádra s hmotnosťou  $M \gg m$ . Potom kopol do škatule tak, aby sa šmýkala po zemi rýchlosťou  $v$  v smere kolmo na stenu, a do jej dráhy položil vo vzdialenosti  $D$  od steny nehybnú loptičku. Vypočítajte do akej najmenšej vzdialenosti od steny sa krabica dostane. Trenie škatule aj loptičky o zem považujte za nulové, všetky zrážky za dokonale pružné, a predpokladajte, že krabica sa neotáča (celý pohyb loptičky sa deje na jednej priamke kolmej na stenu). Odpoveď stačí do prvého rádu v  $\frac{m}{M}$ .

Označme si rýchlosť krabice po  $n$ -tej zrážke s loptičkou ako  $V_n$  a rýchlosť loptičky po tejto zrážke ako  $v_n$ , pričom kladný smer rýchlosti volíme smerom ku stene. Medzi zrážkami sa rýchlosť krabice nemení, rýchlosť loptičky sa pružným odrazom od steny zmení na opačnú. Pred  $(n+1)$ -vou zrážkou sa teda krabica a loptička pohybujú rýchlosťami  $V_n$  a  $-v_n$ . Logicky si teda označme rýchlosť krabice pred prvou zrážkou ako  $V_0 = v$  a rýchlosť loptičky ako  $v_0 = -0 = 0$ , aby sme mohli s prvou zrážkou počítať symbolicky rovnako ako s ostatnými.

Pozrime sa na teraz na  $(n+1)$ -vú zrážku. Je to jednoduchá pružná jednorozmerná zrážka dvoch telies so všeobecnými hmotnosťami  $M$  a  $m$  a všeobecnými rýchlosťami  $V_n$  a  $-v_n$ . Mohli by sme si napísať zákon zachovania hybnosti a zákon zachovania energie a vytriasť z nich rýchlosti  $V_{n+1}$  a  $v_{n+1}$ , my však použijeme malú fintu na zjednodušenie počítania. Pozrime sa na celú zrážku v sústave spojenj so spoločným ťažiskom krabice a loptičky. Pretože na krabicu a loptičku počas zrážky nepôsobia žiadne vonkajšie sily, ich ťažisko nebude zrýchľovať, čiže sústava spojená s ním musí byť inerciálna. Takže ZZH a ZZE v nej stále musia platiť. Navyše celková hybnosť je v tejto sústave nulová, čo by nám riešenie rovníc trochu zjednodušilo – ale najlepšie je na tom to, že my ich vôbec riešiť nemusíme. Vieme totiž, že rovnice pre ZZH a ZZE majú po zrážke jednoznačné riešenie,<sup>14</sup> stačí teda, keď jedno také riešenie tipneme. A to vôbec nie je také ťažké. Ak v takejto ťažiskovej sústave zmenia obe telesá rýchlosť na opačnú, celková hybnosť sa tiež zmení na opačnú, ale keďže je nulová, tak sa vlastne vôbec nezmení. Kinetická energia sa tiež zrejme nezmení, keďže závisí iba od druhých mocnín rýchlostí. To znamená, že takýto jednoduchý odraz v ťažiskovej sústave spĺňa ZZH aj ZZE, a teda správne popisuje

<sup>14</sup>Nie je to úplne pravda, riešenia pre rýchlosti loptičiek vyjdú dve. Jedno z nich budú pôvodné rýchlosti, druhé budú rýchlosti po zrážke.

zrážku dvoch telies.

Predtým ako sa bezhlavo vrhneme do písania rovníc a vyjadrovania rýchlostí po zrážke, zabudnime na chvíľu na ťažiskové sústavy a poďme sa pozrieť na to, čo to vlastne potrebujeme. Chceli sme porátať vzdialenosť krabice od steny, keď k nej bude najbližšie. Tento okamih zrejme nastane pri nejakej zrážke,<sup>15</sup> pozrime sa teda na vzdialenosť  $D_n$  krabice od steny pri  $n$ -tej zrážke s loptičkou. Po predošlej,  $(n - 1)$ -vej, zrážke má krabica rýchlosť  $V_{n-1}$  a musí prejsť vzdialenosť  $D_{n-1} - D_n$  ku miestu  $n$ -tej zrážky. Loptička má rýchlosť veľkosti  $v_{n-1}$  a musí prejsť vzdialenosť  $D_{n-1} + D_n$ , keďže sa medzitým ešte odrazí od steny. Obom to musí samozrejme trvať rovnaký čas, dostávame teda rovnicu

$$\frac{D_{n-1} - D_n}{V_{n-1}} = \frac{D_{n-1} + D_n}{v_{n-1}},$$

ktorej riešením je

$$D_n = D_{n-1} \frac{v_{n-1} - V_{n-1}}{v_{n-1} + V_{n-1}}.$$

Ak použijeme tento vzťah viackrát, dostávame

$$D_n = D_1 \left( \frac{v_1 - V_1}{v_1 + V_1} \right) \left( \frac{v_2 - V_2}{v_2 + V_2} \right) \cdots \left( \frac{v_{n-2} - V_{n-2}}{v_{n-2} + V_{n-2}} \right) \left( \frac{v_{n-1} - V_{n-1}}{v_{n-1} + V_{n-1}} \right).$$

A teraz pozor! Čo je to  $v_1 + V_1$ ? Je to rýchlosť približovania sa loptičky ku krabici tesne pred druhou zrážkou, lebo krabica má po prvej zrážke rýchlosť  $V_1$  smerom ku stene a loptička po prvej zrážke a odraze od steny rýchlosť  $v_1$  smerom od steny. A čo je  $v_2 - V_2$ ? No predsa rýchlosť vzdďalovania sa loptičky od krabice tesne po druhej zrážke. A čo je na tom také skvelé? No predsa to, že v ťažiskovej sústave krabica aj loptička zmenia rýchlosti na opačné, takže ich vzájomná rýchlosť sa tiež zmení na opačnú. Rýchlosť približovania sa pred zrážkou je rovnaká ako rýchlosť vzdďalovania sa po zrážke, čiže  $v_1 + V_1 = v_2 - V_2$ .

Podobnou úvahou pre  $n$ -tú zrážku dostaneme rovnosť  $v_{n-1} + V_{n-1} = v_n - V_n$ , pre ľubovoľné  $n$ . Teraz sa už len pozerať, ako sa zo susedných zlomkov v našej rovnici pre  $D_n$  vymlútia menovatele s čitateľmi, dostávajúc

$$D_n = D_1 \frac{v_1 - V_1}{v_{n-1} + V_{n-1}} = D \frac{v_0 + V_0}{v_n - V_n}.$$

Dosadením počiatočných rýchlostí  $V_0 = v$  a  $v_0 = 0$  dostaneme

$$D_n = D \frac{v}{v_n - V_n}.$$

---

<sup>15</sup>Inak sa krabica práve pohybuje ku stene alebo od steny, a v takom okamihu nemôže byť najbližšie. Alebo stojí, ale vtedy je od steny rovnako ďaleko ako pri najbližšej zrážke.

Intuitívne vidíme, že pri takejto pinkačke bude krabica pri zrážkach postupne spomaľovať a loptička zrýchľovať. Ak sú počiatočné podmienky správne nastavené, krabica pri jednej zo zrážok zastane a loptička bude niesť celú kinetickú energiu sústavy, čiže budeme mať  $V_n = 0$  a  $\frac{1}{2}mv_n^2 = \frac{1}{2}Mv^2$ , odkiaľ  $v_n = v\sqrt{M/m}$ . Potom by sme dostali

$$D_n = D\sqrt{\frac{m}{M}},$$

a to by bola aj najbližšia vzdialenosť krabice od steny, keďže krabica by medzi  $n$ -tou a  $n + 1$ -vou zrážkou stála.

Ak krabica po žiadnej zo zrážok nezastane, nemusíme zúfať. Ak je loptička veľmi ľahká ( $m \ll M$ ), pri každej zo zrážok odovzdá krabici len málo hybnosti a rýchlosť krabice po zrážke najbližšej ku stene (tj. tej, keď rýchlosť krabice zmení znamienko) bude len veľmi malá.

Môžeme urobiť aj nejaké konkrétnejšie odhady. Z energetických dôvodov bude rýchlosť loptičky ohraničená hodnotou  $v\sqrt{M/m}$ , pri každej zrážke sa teda jej hybnosť zmení najviac o  $2v\sqrt{Mm}$ . Najviac o toľko sa pri každej zrážke zmení aj hybnosť krabice, čo pri jej hmotnosti znamená zmenu rýchlosti o  $2v\sqrt{m/M}$ . Ak sa rýchlosť krabice mení nanajvýš takýmito malými krokmi, a ak je pred najbližšou ( $n$ -tou) zrážkou jej rýchlosť kladná a po nej záporná, musí nutne platiť  $|V_n| \leq 2v\sqrt{m/M}$ . Asymptoticky môžeme napísať  $V_n = vO(\sqrt{m/M})$  keď  $m \ll M$ .<sup>16</sup> Zo ZZE potom máme

$$\frac{1}{2}mv_n^2 + \frac{1}{2}MV_n^2 = \frac{1}{2}Mv^2,$$

čiže

$$v_n = \sqrt{\frac{M}{m}}\sqrt{v^2 - V_n^2} = v\sqrt{\frac{M}{m}}\sqrt{1 - O\left(\frac{m}{M}\right)} = v\sqrt{\frac{M}{m}}\left(1 + O\left(\frac{m}{M}\right)\right).$$

V našom vzťahu pre  $D_n$  to znamená

$$\begin{aligned} D_n &= D \frac{v}{v\sqrt{\frac{M}{m}}\left(1 + O\left(\frac{m}{M}\right)\right) - vO\left(\sqrt{\frac{m}{M}}\right)} \\ &= D\sqrt{\frac{m}{M}} \frac{1}{1 + O\left(\frac{m}{M}\right) - O\left(\frac{m}{M}\right)} \\ &= D\sqrt{\frac{m}{M}}\left(1 + O\left(\frac{m}{M}\right)\right). \end{aligned}$$

<sup>16</sup>Na značenie asymptotických odhadov veľkosti funkcií sa používa takáto  $O$ -notácia. V rôznych textoch sa používa i zneužíva veľmi voľne, jej presné definície si nájdite v literatúre alebo na internete. V tomto texte bude  $O(f(x))$  znamenať „nejaká funkcia  $x$ , ktorá pre dostatočne malé  $x$  nepresahuje nejaký konštantný násobok  $f(x)$ “. Menej formálne, napríklad pod  $O\left(\frac{m}{M}\right)$  si môžete predstaviť „dačo, čo je najviac rádovo  $\frac{m}{M}$ “.

Vidíme teda, že naša odpoveď  $D\sqrt{m/M}$  je presná v dominantnom ráde, chyba je rádovo až  $\frac{m}{M}$ -krát menšia ako skutočná odpoveď. Takýto presný odhad chyby som od vás v riešení nežiadal, sčasti aj preto, že v zadaní sa o „presnosti do prvého rádu“ hovorilo trochu zahmlene.

To by ale nebol vzorák FX, keby skončil takto narýchlo. Poďme si správanie loptičky spočítať trochu detailnejšie. Vráťme sa naspäť k počítaniu  $(n+1)$ -vej zrážky a zapíšme rozprávky o ťažiskovej sústave poriadne do rovníc. Rýchlosť spoločného ťažiska loptičky a krabice je

$$u_T = \frac{MV_n - mv_n}{M + m},$$

rýchlosti krabice a loptičky v ťažiskovej sústave budú pred zrážkou

$$V' = V_n - u_T \quad \text{a} \quad v' = -v_n - u_T$$

a po zrážke len zmenia znamienko na

$$V'' = u_T - V_n \quad \text{a} \quad v'' = u_T + v_n.$$

Rýchlosti po zrážke v sústave spojenjej so zemou budú teda

$$V_{n+1} = u_T + V'' = 2u_T - V_n \quad \text{a} \quad v_{n+1} = u_T + v'' = 2u_T + v_n.$$

Po dosadení za  $u_T$  dostávame

$$\begin{aligned} V_{n+1} &= \frac{M-m}{M+m}V_n - \frac{2m}{M+m}v_n, \\ v_{n+1} &= \frac{2M}{M+m}V_n + \frac{M-m}{M+m}v_n. \end{aligned}$$

(Všimnite si, že rovnice sú symetrické, tak, ako by sme mohli očakávať. Hoci to tak na prvý pohľad nevyzerá, vymenením  $M$  s  $m$  a  $V_n$  s  $-v_n$  sa nič nezmení.)

Vyjadrili sme si teda  $V_{n+1}$  a  $v_{n+1}$  ako lineárnu kombináciu  $V_n$  a  $v_n$ . Takýto vzťah sa dá jednoducho a prehľadne zapísať pomocou vektorov a matic:

$$\begin{pmatrix} V_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{M-m}{M+m} & -\frac{2m}{M+m} \\ \frac{2M}{M+m} & \frac{M-m}{M+m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_n \\ v_n \end{pmatrix}.$$

Čo je však na tomto zápise najlepšie, ľahko vieme napísať všeobecný vzťah pre rýchlosti  $V_n$  a  $v_n$ , a to konkrétne ako

$$\begin{pmatrix} V_n \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{M-m}{M+m} & -\frac{2m}{M+m} \\ \frac{2M}{M+m} & \frac{M-m}{M+m} \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} V_0 \\ v_0 \end{pmatrix}.$$

Ak si našu maticu a vektor označíme ako

$$A = \begin{pmatrix} \frac{M-m}{M+m} & -\frac{2m}{M+m} \\ \frac{2M}{M+m} & \frac{M-m}{M+m} \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} V_0 \\ v_0 \end{pmatrix},$$

stačí nám už len vypočítať  $A^n \mathbf{v}$ . Toto je celkom všeobecný problém z lineárnej algebry, a takmer vždy sa dá riešiť napríklad aj takto. Čo ak by sme našli taký milý vektor  $\mathbf{x}$ , že  $A\mathbf{x}$  by bol len  $\lambda$ -násobkom  $\mathbf{x}$  pre nejaké číslo  $\lambda$ ? Potom by sme celkom jednoducho dostali aj  $A^n \mathbf{x} = \lambda^n \mathbf{x}$ , pretože násobenie číslom ( $\lambda$ ) môžeme vyňať spred násobenia maticou. Ak by sme takýchto milých vektorov  $\mathbf{x}_i$  našli viac, hoc by mal aj každý svoju vlastnú  $\lambda_i$ , tak ich lineárne kombinácie by sme tiež vedeli jednoducho násobiť maticou  $A^n$ :

$$A^n(\sum_i a_i \mathbf{x}_i) = \sum_i A^n(a_i \mathbf{x}_i) = \sum_i a_i A^n(\mathbf{x}_i) = \sum_i a_i \lambda_i^n \mathbf{x}_i.$$

Stačí nám teda napísať naše  $\mathbf{v}$  ako kombináciu takých  $\mathbf{x}$ -iek a sme hotoví.

V našom konkrétnom prípade sa ukazuje, že to naozaj ide. Nájdime najprv nejaké vhodné  $\mathbf{x}$ -ká. Ak si napíšeme (vektorovú) rovnosť  $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ , dostávame dve rovnice o troch neznámych (dve komponenty  $\mathbf{x}$  a číslo  $\lambda$ ). Jedna možná dvojica riešení je napríklad

$$\mathbf{x}_{1,2} = \begin{pmatrix} 1 \\ \pm i \sqrt{\frac{M}{m}} \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad \lambda_{1,2} = \frac{M-m}{M+m} \mp \frac{2\sqrt{Mm}}{M+m}i.$$

Skúste si vyriešiť sami, alebo jednoducho len skontrolovať, že tieto  $\mathbf{x}_i$  a  $\lambda_i$  naozaj spĺňajú  $A\mathbf{x}_i = \lambda_i \mathbf{x}_i$ . No a keďže

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} V_0 \\ v_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{v}{2}(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2),$$

dostávame

$$A^n \mathbf{v} = \frac{v}{2}(A^n \mathbf{x}_1 + A^n \mathbf{x}_2) = \frac{v}{2}(\lambda_1^n \mathbf{x}_1 + \lambda_2^n \mathbf{x}_2),$$

čiže

$$\begin{pmatrix} V_n \\ v_n \end{pmatrix} = \frac{v}{2} \begin{pmatrix} \lambda_1^n + \lambda_2^n \\ (\lambda_1^n - \lambda_2^n)i \sqrt{\frac{M}{m}} \end{pmatrix}$$

Aby sme vedeli krajšie vyjadriť mocniny  $\lambda_i$ , všimnime si, že platí rovnosť  $(M-m)^2 + (2\sqrt{Mm})^2 = (M+m)^2$ , takže ak si v pravouhlom trojuholníku so stranami  $(M-m)$ ,  $2\sqrt{Mm}$  a  $(M+m)$  označíme uhol pri odvesne dĺžky  $(M-m)$  ako  $\varphi$ , potom

$$\lambda_{1,2} = \frac{M-m}{M+m} \mp \frac{2\sqrt{Mm}}{M+m}i = \cos \varphi \mp i \sin \varphi = e^{\mp i\varphi}.$$

Odtiaľ

$$\begin{aligned} \lambda_1^n + \lambda_2^n &= e^{-ni\varphi} + e^{ni\varphi} = 2 \cos(n\varphi) \\ \lambda_1^n - \lambda_2^n &= e^{-ni\varphi} - e^{ni\varphi} = -2i \sin(n\varphi), \end{aligned}$$

čo môžeme dosadiť do vzťahu pre rýchlosti  $V_n$  a  $v_n$ :

$$V_n = v \cos(n\varphi) \quad \text{a} \quad v_n = v \sin(n\varphi) \sqrt{\frac{M}{m}}.$$

Toto sú vzťahy pre rýchlosti krabice a loptičky po  $n$ -tej zrážke. V nečakane peknej a elegantnej forme. Pre riešenie pôvodnej úlohy nás zaujíma také  $n$ , keď je  $V_n$  prvýkrát záporné (resp. nekladné). To bude vtedy, keď bude argument kosínusu prvýkrát väčší než  $\frac{\pi}{2}$ , konkrétne pre

$$n = \left\lceil \frac{\pi}{2\varphi} \right\rceil \approx \frac{\pi}{2 \arcsin \frac{2\sqrt{Mm}}{M+m}} \approx \frac{\pi}{4} \sqrt{\frac{M}{m}}.$$

Z prvej časti vzoráku vieme, že vzdialenosť  $n$ -tého odrazu od steny bude  $D_n = D \frac{v}{v_n - V_n}$ . Vtedy sme odvodili, že je to približne  $D \sqrt{m/M}$ , teraz pre ňu máme po dosadení za  $V_n$  a  $v_n$  presný vzťah

$$D_n = \frac{D}{\sin(n\varphi) \sqrt{\frac{M}{m}} - \cos(n\varphi)},$$

kde  $n = \lceil \frac{\pi}{2\varphi} \rceil$  a  $\varphi = \arccos \frac{M-m}{M+m}$ . Pre  $m \ll M$  bude  $\varphi \ll 1$ , preto  $n\varphi$  bude blízko  $\pi/2$ , čiže naozaj  $D_n \approx D \sqrt{m/M}$ .

Tento presný výsledok nie je ktovieako pekný a užitočný, ale postup, ktorým sme sa k nemu dostali, obsahuje veľa hodnotných myšlienok. Ak máte ešte chuť, skúste si nakresliť, ako sa menia rýchlosti  $V_n$  a  $v_n$  podľa vyššie uvedených vzťahov. Ak sa vám ťažko trávili všetky tie algebraické manipulácie s maticami a vektormi, skúste si všetky tie úvahy zopakovať s konkrétnymi objektami, ktoré dané matice a vektory reprezentujú. (Vektory len schovávajú dvojicu rýchlostí loptičiek, matica  $A$  je len operátor, ktorý vezme rýchlosti pred zrážkou a vyplúje rýchlosti po zrážke.) Napokon, ak sa vám to celé zdá nejaké podozrivé, tiež sa môžete zamyslieť nad tým, kde všade sa nám pokazia naše rovnice po tom, ako sa loptička od krabice odrazí poslednýkrát. (Všetky tieto problémy sme vo vzoráku zamlčali, lebo nás zaujímala len zrážka najbližšia ku stene, a dovtedy sa to naozaj nepokazí.)

### FX15 Čiara (Opravoval Bzdušo)

*Keď bola Marcelka na prednáške, Janka jej zo stavebnice s nábojmi zobrala dva rovnaké kladné náboje o veľkosti  $Q$  a priblížila ich do vzdialenosti  $d$  od seba. Potom si nakreslila siločiaru, ktorá vychádzala z jedného z týchto nábojov pod uhlom  $\alpha$  ku spojnici oboch nábojov. Do akej najmensej vzdialenosti od roviny symetrie nábojov sa táto siločiara dostane?*

Nu, pišníci. Tento vzorák začnem veľmi stroho. Táto úloha je naozaj ťažká. Napriek tomu, naozaj má analytické riešenie. Hádám bude pre vás ponaučením, že niekedy si treba zvoliť naozaj bizarné súradnice, aby sa rovnice dali jednoducho vyriešiť. Mnohí ste istotne okúsili, že práca v karteziánskej súradnicovej sústave je slepá alebo prinajmenšom veľmi trnistá ulička. Je lepšie vrátiť sa späť na začiatok a vymyslieť nejakú inú cestu.

A teraz už pekne a po poradí. Alfou a omegou nášho riešenia bude Gaussov zákon, bez ktorého by sa síce úloha riešiť dala, avšak jednoduchšie by bolo postaviť z hracích kariet Koloseum. Pre poriadok a čiste z pedagogických dôvodov si dovoľím malú vsuvku, ktorú môžu znalci s čistým svedomím preskočiť.

#### Gaussov zákon

Začneme krátkou reklamou:

Gaussov zákon je úplne super!

Aby ste mi ho kúpili, mal by som ho dobre predávať, a uvedený nápis vyzerá určite krajšie ako rovnica, ktorá sa za ním skrýva:

$$\oint_{\partial D} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_D \rho \, dV.$$

Gaussov zákon je pre elektrostatické situácie ekvivalentný Coulombovemu zákonu, len je zapísaný vo veľmi odlišnom tvare. Nebudem ho tu z Coulombovho zákona odvodzovať, len si poriadne vysvetlíme, čo jeho rovnica ukrýva. Začneme významom jednotlivých písmen:

- $D$  predstavuje nejakú (ľubovoľnú) myslenú uzavretú oblasť priestoru (napr. zemiak, vnútro balóna),  $\partial D$  predstavuje hranicu tejto oblasti (napr. zemiaková šupa, povrch balóna).
- $d\vec{S}$  predstavuje diferenciálny kúsok hranice myslenej oblasti,  $d\vec{S}$  je tejto plôške prislúchajúci vektor. Má tú vlastnosť, že je kolmý na povrch hranice  $\partial D$ , smeruje von z oblasti  $D$  a pre jeho veľkosť platí  $|d\vec{S}| = dS$ .

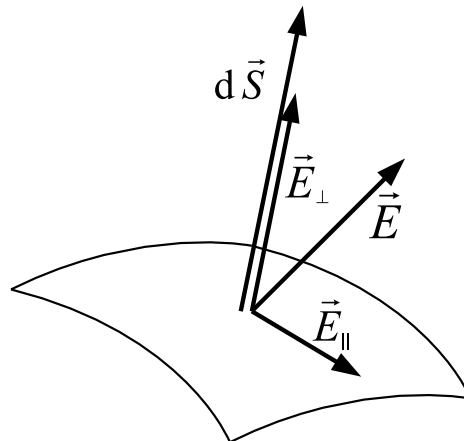


- $\vec{E}$  je vektor elektrickej intenzity.
- $\rho$  je hustota elektrického náboja.

Ostatné písmenká, ako napríklad permitivitu vákua  $\varepsilon_0$ , by sme mohli v dave rozoznať.

Najprv si premyslime integrál na pravej strane rovnice. Integrujeme hustotu náboja cez nejakú oblasť. Výsledok bude analogický, ako keď zintegrujeme hustotu hmoty cez nejaký objem, tzn. dostaneme celkový náboj, ktorý je obklopený hranicou oblasti  $\partial D$ . Množstvo tohto náboja je ešte predelené bulharskou konštantou  $\varepsilon_0$ .

Ľavá strana je o niečo komplikovanejšia. Je tam integrál akéhosi skalárneho súčinu cez akúsi plochu . . . jednoducho vec, ktorá si zaslúži nasledujúci obrázok. Je na ňom zakreslená diferenciálna ploška  $d\vec{S}$ , ktorá je taká malá, že ju možno prakticky považovať za plochú, a ktorá tvorí drobný kúsok hranice  $\partial D$ :



Táto ploška je tiež dosť malá na to, aby sa elektrická intenzita  $\vec{E}$  na jej povrchu prakticky nemenila. Ak si elektrickú intenzitu v tomto mieste rozložíme do smeru kolmého na povrch  $E_{\perp}$  a do smeru rovnobežného s povrchom  $E_{\parallel}$ , je jasné, že ku skalárnemu súčinu  $d\vec{S} \cdot \vec{E}$  prispieva práve  $\vec{E}_{\perp}$ .

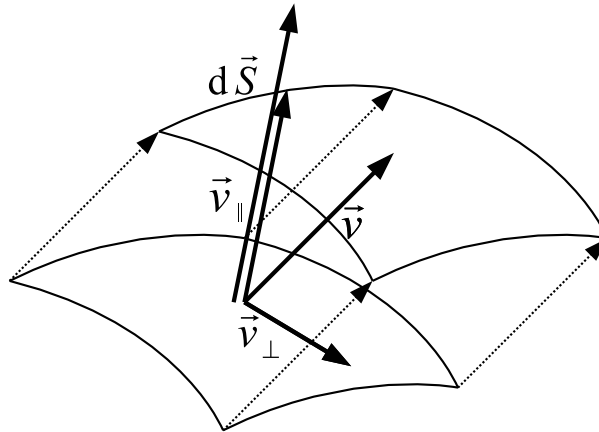
Aby sme sa s pochopením dostali o kúsok ďalej, zmeníme na krátky čas terč našej pozornosti. Skúsime si predstaviť inú, nasledovnú situáciu. Celý priestor je vyplnený vodou, ktorá vo svojom objeme nejakou prúdi. Znova si predstavíme v priestore nejakú fixovanú oblasť  $D$  ohraničenú uzavretou plochou  $\partial D$ . Ide len o myslenú oblasť priestoru, čo znamená, že prúdiaca voda o nej v princípe nevie a všelijako ňou môže prechádzať.

Takejto kvapaline možno priradiť rýchlostné pole  $\vec{v}(x, y, z, t)$ , ktoré hovorí, aký je vektor rýchlosti v jednotlivých bodoch kvapaliny v da-

nom mieste a čase. Vezmime si nejaký konkrétny čas  $t$  a poďme skúmať, ako by sa dal interpretovať integrál

$$\oint_{\partial D} \vec{v} \cdot d\vec{S}.$$

Analogickým postupom sa dostaneme k riešeniu otázky na diferenciálnej plôške  $dS$ . Uvažujme, o koľko sa na takejto plôške posunie voda za veľmi malý čas  $dt$ . Voda sa posunie v smere vektora rýchlosti, ako to ukazuje nasledujúci obrázok:



Vieme si predstaviť, že v prípade veľmi malej oblasti  $dS$  by bol objem kvapaliny, ktorá vytekla cez túto plôšku, akýsi rovnobežosten so základňou  $dS$  a s výškou  $dh = |\vec{v}_{\parallel}|dt$ . Objem vytečenej kvapaliny by bol  $dV = dh dS$  a objemový prietok vody touto plôškou by bol

$$dQ = \frac{dV}{dt} = |\vec{v}_{\parallel}|dS,$$

pričom v prípade, že by voda prúdila dnu, bolo by tam ešte záporné znamienko. To sa dá formálne dá zapísať presne ako

$$dQ = \vec{v} \cdot d\vec{S}.$$

Teraz porozmýšľajme nad tým, čomu sa bude rovnať integrál cez celú hranicu oblasti  $\partial D$ . Zrejme dostaneme

$$\oint_{\partial D} \vec{v} \cdot d\vec{S} = Q,$$

kde  $Q$  je celkový výtok vody zvnútra tejto oblasti. Ak predpokladáme, že voda je nestlačiteľná a vo vnútri sa nám nevytvárajú nijaké záhadné bublinky, tak hustota vody je všade v priestore konštantná a zrejme rovnaké množstvo vody, aké z našej oblasti  $D$  niekde vytečie, do nej

musí v nejakej inej časti aj vtekať. To znamená, že celkové  $Q$  je rovné nule a platí

$$\oint_{\partial D} \vec{v} \cdot d\vec{S} = 0.$$

Táto rovnica sa dosť podobá na Gaussov zákon s nulovou hustotou náboja. Aby sme pochopili, že súvislosť tečenia vody s Gaussovým zákonom je omnoho silnejšia, rozmýšľajme ďalej. Predstavme si, že máme vnútri oblasti  $D$  zdroje vody. Nejaké rozprávkové vodovodné kohútiky, v ktorých sa voda z ničoho nič vytvára. Každý takýto kohútik bude mať nejaký objemový prietok  $Q_i$ ,<sup>17</sup> ktorý môže byť kladný alebo záporný podľa toho, či vodu do systému dodáva, alebo ju vy-ciciava. V takom prípade by sa náš Gaussov zákon pre tečúcu vodu zmenil na

$$\oint_{\partial D} \vec{v} \cdot d\vec{S} = \sum_i Q_i.$$

No ale počkať, táto rovnica má presne rovnaký tvar ako Gaussov zákon! Veď suma je tiež len „akoby integrál“. A takejto rovnici už celkom jednoducho rozumieme. Hovorí len o tom, koľko vody vyteká z nejakej uzavretej plochy, keď sú v nej nejaké zdroje a nejaké odberače vody. Skúsme nájsť nejaké analogické pochopenie elektrických veličín v Gaussovom zákone. Napíšme si ho ešte raz:

$$\oint_{\partial D} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_D \rho \, dV.$$

Čo takto predstaviť si, že aj elektrické pole *tečie*?<sup>18</sup> Smer a akási rýchlosť tečenia je vyjadrená elektrickou intenzitou  $\vec{E}$ . Náboje uzavreté oblasťou sa správajú ako vodovodné kohútiky s prietokom  $Q/\epsilon_0$ . Integrál na ľavej strane rovnice teda hovorí o tom, koľko elektrického poľa vyteká cez hranicu  $\partial D$ , a pravá strana hovorí o zdrojoch tohoto tečenia, ktorými sú elektrické náboje.

Predstava, že elektrické pole tečie, sa zdá na prvý pohľad dosť úchylná. Avšak tento pojem sa naozaj zaužíval. Keď si vezmem hocijakú (nie nutne uzavretú) plochu  $S$ , tak integrál

$$\Phi = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

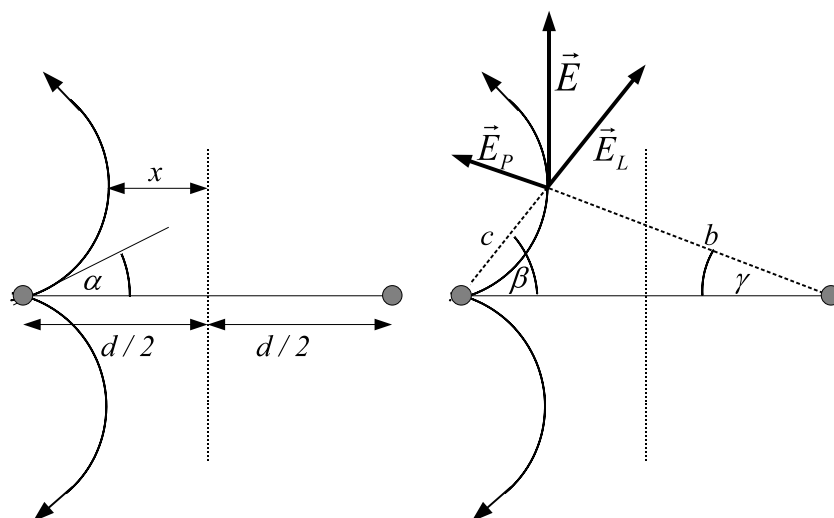
<sup>17</sup>Je priam rozprávkový zázrak, že aj prietok vody, aj elektrický náboj sa zvyknú značiť rovnakým písmenom. V našich gaussovských úvahách majú až nápadne podobnú reprezentáciu.

<sup>18</sup>Dokonca tečie ako nestlačiteľná kvapalina! Pri ďalšom štúdiu navyše zistíte, že elektromagnetické pole sa šíri priestorom rýchlosťou svetla, má vlastnú energiu, hybnosť a dokonca aj vlastný moment hybnosti. Myslite si stále, že pole je len matematická predstava, alebo ho už považujete za akúsi formu hmoty?

sa nazýva *tok elektrického poľa* (resp. tok intenzity elektrického poľa  $\vec{E}$ ) plochou  $S$ . No a podobné toky zohrajú jednu z kľúčových úloh pri riešení problému s našou siločiarou.

### Po dlhšej odbočke samotné riešenie

Čo vieme povedať o mieste, kde sa siločiara najviac priblíži k rovine symetrie? Napríklad to, že elektrická intenzita v tom mieste bude rovnobežná s touto rovinou, ako to zobrazuje pravý z nasledujúcej dvojice obrázkov.



Ak si zavedieme parametre  $b$ ,  $c$ ,  $\beta$  a  $\gamma$  tak ako na obrázku, túto podmienku si vieme napísať ako

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{c^2} \cos \beta = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{b^2} \cos \gamma,$$

odkiaľ dostávame

$$b^2 \cos \beta = c^2 \cos \gamma.$$

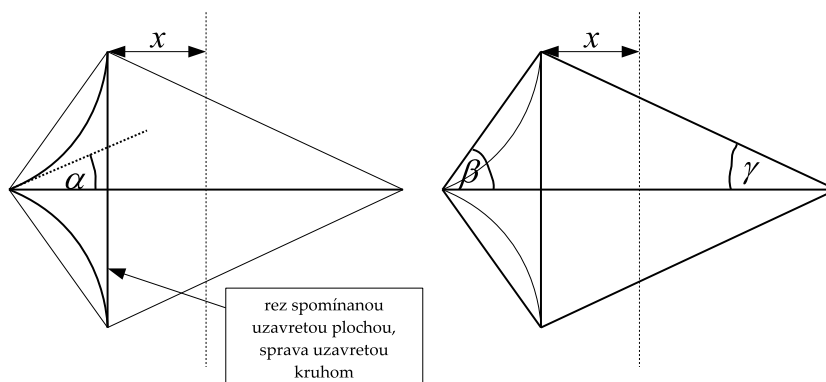
Z geometrie trojuholníka, konkrétne zo sínusovej vety, dostávame ďalšie rovnice:

$$\frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = \frac{d}{\sin (\beta + \gamma)}.$$

Tieto tri rovnice nevyzerajú nijako zle, ale treba si uvedomiť, že je to práve vďaka dobre zvoleným parametrom.

Všimnite si, že zatiaľ máme tri rovnice o štyroch neznámych. Vidíme, že nám do systému zatiaľ nijako nevošiel uhol  $\alpha$ . Zrejme množina riešení takejto sústavy rovníc vedie k nájdeniu množiny všetkých bodov, v ktorých sa *nejaká* siločiara najviac priblíži k rovine symetrie. Otázka teraz znie: aká dodatočná podmienka platí pre špeciálnu siločiaru, ktorá vychádza z náboja pod uhlom  $\alpha$ ?

Teraz nadchádza ten kľúčový okamih, kedy po dobrom marketin-  
govom ťahu konečne použijeme Gaussov zákon. Vezmime si povrch,  
ktorý vznikne rotáciou našej siločiar okolo spojnice nábojov,<sup>19</sup> a k  
tomuto povrchu sprava nalepíme rovinnú plochu. Napravo od náboja  
nám takto vznikne uzavretá oblasť tvaru akéhosi stlačeného kužela,  
ktorého plášť tvorí povrch sledujúci siločiar a ktorého podstavu tvorí  
kruh prechádzajúci aj hľadaným bodom – bodom najbližšieho pri-  
blíženia našej siločiar ku rovine symetrie nábojov. Celá situácia je  
znázornená v reze na nasledujúcom obrázku naľavo.



Podme si pre túto oblasť (a plochu danú jej povrchom) zapísať  
Gaussov zákon. Úplne najprv musíme určiť, koľko náboja je uzavre-  
tého vo vnútri. Aby sa nám to podarilo, nemôžeme si náboj pred-  
stavovať ako bodový, ale ako miniatúrnu guľôčku, ktorá je usídlená v  
ostrom rohu našej plochy. Aká časť tohto náboja je v jej vnútri?

Ak by bol napríklad náboj guľôčky rovnomerne rozložený po jej  
povrchu, s povrchovou hustotou  $\sigma = \frac{Q}{4\pi r^2}$ , dostaneme pre náboj  $Q^*$   
uzavretý vnútri našej plochy

$$\begin{aligned} Q^* &= \int \sigma \, dS = \int_{r \sin \alpha}^r \underbrace{\sigma (2\pi r \sin \theta)}_O \underbrace{\frac{dx}{\sin \theta}}_{ds} = \\ &= \int_{r \cos \alpha}^r 2\pi r \sigma \, dx = 2\pi r^2 \sigma (1 - \cos \alpha) = \frac{Q}{2} (1 - \cos \alpha). \end{aligned}$$

Povrch guľôčky sme si pri integrovaní rozložili na množstvo prstencov  
s vrcholovým uhlom  $\theta$ , ktoré vytínali na osi  $x$  interval šírky  $dx$  a pre  
ktorých povrch sme využili vzťah  $dS = O \cdot ds$ , kde  $O$  je obvod prstenca  
a  $s$  je jeho skutočná šírka. Nakreslite si k tomu obrázok!

Môžete si rozmyslieť, že rovnaký výsledok by sme dostali aj pre  
homogénne nabitú guľôčku, alebo vlastne hocijaké rozloženie náboja,

<sup>19</sup>Ide zrejme o body všetkých siločiar, ktoré vychádzajú pod uhlom  $\alpha$  v rôzne natočených rovinách.

ktoré by spôsobovalo rovnaké (vonkajšie) elektrické pole ako bodový náboj.<sup>20</sup>

Ak sme teda našli celkový náboj  $Q^*$  vnútri našej gaussovskej plochy, vieme, že tok elektrického poľa touto plochou musí byť rovný  $Q^*/\epsilon_0$ . Navyše, a presne pre toto sme si zvolili plochu práve takto, **všetko pole vyteká len kruhovou podstavou**. V ostatných miestach je totiž gaussovská plocha tvorená siločiarami a preto tadiaľ žiadne pole nevyteká.<sup>21</sup> Tok kruhom budeme označovať  $\Phi$ , a teda platí

$$\Phi = \frac{Q}{2\epsilon_0} (1 - \cos \alpha).$$

Avšak, pre elektrické pole platí princíp superpozície, preto musí byť tento tok rovný súčtu tokov spôsobených jednotlivými bodovými nábojmi. Na určenie toku cez náš kruh v prítomnosti iba jedného z nábojov môžeme použiť podobný postup ako doteraz, keď sme tam mali náboje dva. Tentoraz budú dokonca siločiarly rovné, takže použité gaussovské plochy budú pekné kužeľovité – ale to nás vlastne vôbec netrápi, v konečnom dôsledku závisí len na uhle, pod ktorým vychádzajú z náboja. Ak sa zapozeralme do druhého z ostatnej dvojice obrázkov, prídeme takto k rovnosti

$$\begin{aligned} \frac{Q}{2\epsilon_0} (1 - \cos \alpha) &= \frac{Q}{2\epsilon_0} (1 - \cos \beta) - \frac{Q}{2\epsilon_0} (1 - \cos \gamma) \\ 1 - \cos \alpha &= 1 - \cos \beta - 1 + \cos \gamma \\ 1 - \cos \alpha &= \cos \gamma - \cos \beta. \end{aligned}$$

Ďalšia rovnica a opäť vyzerá pekne, ak sa zapíše pomocou uhlov  $\beta$  a  $\gamma$ . Určite preto už nejdeme filozofovať a v takto zvolených súradniciach<sup>22</sup> privedieme problém ku šťastnému koncu.

Zostáva problém, ako z týchto rovníc riešenie nejako vybúšiť. Vezmime si napríklad našu rovnicu z Coulombovho zákona a rovnicu zo sínusovej vety

$$b^2 \cos \beta = c^2 \cos \gamma \quad \text{a} \quad \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}.$$

Ich vhodným ponásobením sa zbavíme dĺžok  $b$  a  $c$ , a dostaneme

$$\sin^2 \beta \cos \beta = \sin^2 \gamma \cos \gamma.$$

<sup>20</sup> Alebo, ak vám takýto postup nevoní, môžete si náboj nechať bodový, ale gaussovskej ploche odstrihnúť rožtek. Potom by bol celkový náboj vnútri plochy nulový, ale museli by sme vypočítať tok elektrického poľa cez plôšku, ktorá vznikla odstrihnutím. Ak si túto strihaciu plôšku zvolíme správne, vôbec to nie je zložité, a dopracujeme sa k rovnakému výsledku.

<sup>21</sup> Skalárny súčin  $\vec{E} \cdot d\vec{S}$  je tam rovný nule.

<sup>22</sup> Hľadaný bod ležiaci na našej siločiare v rovine je týmito dvoma uhlami jednoznačne určený, preto si môžem dovoliť termín *súradnice*

Odtiaľ postupnými úpravami

$$\begin{aligned}(1 - \cos^2 \beta) \cos \beta &= (1 - \cos^2 \gamma) \cos \gamma \\ \cos^3 \gamma - \cos^3 \beta &= \cos \gamma - \cos \beta \\ (\cos \gamma - \cos \beta) (\cos^2 \gamma + \cos \gamma \cos \beta + \cos^2 \beta) &= \cos \gamma - \cos \beta \\ \cos^2 \beta + \cos \beta \cos \gamma + \cos^2 \gamma &= 1.\end{aligned}$$

V poslednej úprave sme využili fakt, že  $\cos \beta \neq \cos \gamma$ . To by totiž znamenalo, že siločiar sa dostane až k rovine symetrie, čo zrejme platí iba pre špeciálny prípad  $\alpha = 0$ .

Podarilo sa nám znížiť stupeň rovnice na 2, takže je už pre nás výrazne jednoduchšia. Ak si za niektorý z uhlov dosadím z rovnice získanej pre tok  $\Phi$ , dostanem po úprave kvadratické rovnice

$$\begin{aligned}\cos^2 \beta + \cos \beta(1 - \cos \alpha) + (\cos^2 \alpha - 2 \cos \alpha)/3 &= 0 \quad \text{resp.} \\ \cos^2 \gamma + \cos \gamma(\cos \alpha - 1) + (\cos^2 \alpha - 2 \cos \alpha)/3 &= 0.\end{aligned}$$

Ich riešením<sup>23</sup> dostávame

$$\begin{aligned}\cos \beta &= \frac{\cos \alpha - 1 + \sqrt{(3 - \cos \alpha)(1 + \cos \alpha)}/3}{2} \quad \text{resp.} \\ \cos \gamma &= \frac{1 - \cos \alpha + \sqrt{(3 - \cos \alpha)(1 + \cos \alpha)}/3}{2}.\end{aligned}$$

Tým je kus škaredej roboty vyriešený. Keď poznáme kosínusy uhlov  $\beta$  a  $\gamma$ , vieme si vyjadriť aj sínusy. Vo výsledku ich teda využijem ako vhodnú substitúciu. Pre hľadanú dĺžku  $x$  platí jednoducho

$$\begin{aligned}x &= \frac{d}{2} - c \cos \beta \\ &= \frac{d}{2} - \frac{c}{\sin \gamma} \sin \gamma \cos \beta \\ &= \frac{d}{2} - \frac{d}{\sin(\beta + \gamma)} \sin \gamma \cos \beta \\ &= \frac{d}{2} \left( 1 - \frac{2 \sin \gamma \cos \beta}{\sin(\gamma + \beta)} \right).\end{aligned}$$

To je už výsledok v asi najkomprimovanejšom tvare. Za uhly dosádať už nebudeme. Ozaj by to nevyzeralo pekne.

---

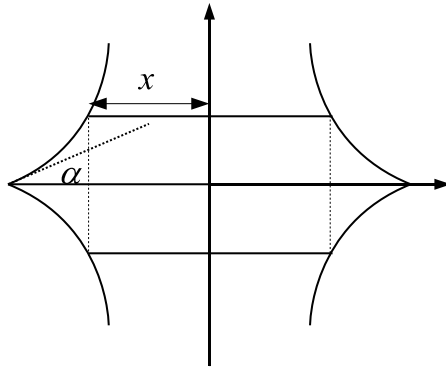
<sup>23</sup>Vylúčime pri tom menšie z riešení, pretože vedú na záporné hodnoty kosínusov.

### Riešenie podľa Dalimila Mazáča,

ktorý napriek tomu, ako som uvádzal tento vzorák, úlohu v kartézskych súradniciach vyriešil. Pri ukazovaní jeho postupu budem používať niektoré v predošlom texte nadobudnuté poznatky.

Zavedme si súradnicovú sústavu s osou  $x$  zhodnou so spojnicou nábojov a s osou  $y$  v rovine ich symetrie. Vezmime si všetky siločiar, ktoré vychádzajú z jedného z nábojov pod uhlom  $\alpha$ . Tvorí rotačne symetrické priestorové teleso, ktoré najprv vyzerá ako kužeľ, no potom sa rovnako ako siločiar stočí späť. Vezmime si takú istú plochu vychádzajúcu aj z druhého z nábojov.

Priestor medzi týmito dvoma plochami obsahuje na základe už popísaných úvah a výpočtov náboj  $Q^* = 2\frac{Q}{2}(1 - \cos \alpha) = Q(1 - \cos \alpha)$ . Napokon uzavrieme tento priestor valcom s rotačnou osou na spojnici nábojov. Polomer valca nech je  $y$ , a v rovine  $xy$  nech siločiar z nábojov pretnú valec v bodoch  $[\pm x, \pm y]$ . Polomer valca nevolíme nutne tak, aby jeho plášť prechádzal hľadaným bodom, ale úplne všeobecne.



Takto sme si vytvorili uzavretú plochu, ktorá na oboch koncoch sleduje smer siločiar (a teda tok poľa cez ňu je nulový) a uprostred, na intervale od  $-x$  po  $x$ , má tvar valca s polomerom  $y$ . Plášťom valca musí podľa Gaussovho zákona pretekať tok  $\Phi = \frac{Q}{\varepsilon_0}(1 - \cos \alpha)$ .

My však vieme, že na povrchu plášťa je kolmá zložka intenzity elektrického poľa rovná

$$E_{\perp}(\hat{x}, y) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \left[ \frac{y}{\left(y^2 + (\hat{x} + d/2)^2\right)^{3/2}} + \frac{y}{\left(y^2 + (\hat{x} - d/2)^2\right)^{3/2}} \right],$$

rovnosť pre jej tok  $\Phi$  cez plášť valca nám teda udáva podmienku, ktorú musia spĺňať súradnice  $x$  a  $y$ :

$$\int_{-x}^x E_{\perp} dS = \frac{Q}{\varepsilon_0}(1 - \cos \alpha).$$



Ak si napíšeme  $dS = 2\pi y d\hat{x}$  a pri integrovaní zvolíme substitúciu  $\hat{x} \pm \frac{d}{2} = y \sinh t$ ,<sup>24</sup> dostaneme po spočítaní integrálu rovnicu

$$1 - \cos \alpha = \frac{x + d/2}{\sqrt{y^2 + (x + d/2)^2}} + \frac{x - d/2}{\sqrt{y^2 + (x - d/2)^2}}.$$

Takto sme šikovnou fintou dostali rovnicu siločiar. Všetky dvojice bodov  $[x, y]$ , ktoré spĺňajú túto rovnicu, ležia na siločiare vychádzajúcej pod konkrétnym uhlom  $\alpha$ . Teraz skúsime nájsť na tejto konkrétnej siločiare bod, ktorý je najbližšie k rovine symetrie.

Spravme si diferenciál obidvoch strán už získanej rovnice. Na pravej strane síce získame škaredý výraz,<sup>25</sup> ale na ľavej strane bude nula, a v najbližšom bode siločiare k rovine symetrie navyše  $dx = 0$ .<sup>26</sup> Ak získaný vzťah ešte vydelím  $dy$ , zjednoduší sa na

$$0 = \frac{x + d/2}{(y^2 + (x + d/2)^2)^{3/2}} + \frac{x - d/2}{(y^2 + (x - d/2)^2)^{3/2}}.$$

Hľa, rovnica pre množinu bodov v rovine, ktoré sú na svojej siločiare jej najbližším bodom k rovine symetrie. Mám teda dve rovnice o dvoch neznámych, nás zaujíma hodnota  $x$ . Väčší problém je, ako odtiaľto vyjadriť  $x$ , to by chcelo už nejaký mazaný softvér alebo mazané substitúcie a veľa trpezlivosti. Napokon teda predsa len dochádzame k problematickej riešiteľnosti v kartézskej súradnicovej sústave...

---

<sup>24</sup>Hyperbolické funkcie sú definované ako

$$\begin{aligned} \cosh t &= \frac{1}{2}(e^t + e^{-t}) & \text{a} \\ \sinh t &= \frac{1}{2}(e^t - e^{-t}), \end{aligned}$$

pričom si môžete overiť rovnosť  $\cosh^2 t - \sinh^2 t = 1$  a že navzájom je jedna derivácia druhej. V našom integráli potom dostaneme

$$\int \frac{dt}{\cosh^2 t} = \tanh t + C = \frac{\sinh t}{\cosh t} + C = \frac{\sinh t}{\sqrt{\sinh^2 t + 1}} + C.$$

<sup>25</sup>Nejdem ho tu vypisovať, skúste si to spočítať na papieri. Nezabudnite, že diferenciál treba robiť zo všetkých premenných, takže napríklad  $d(x^2 + y^2) = 2xdx + 2ydy$ .

<sup>26</sup>Ak celkový diferenciál nie je váš kamarát, skúste sa na to pozrieť alternatívne. Výraz na pravej strane rovnice pozdĺž siločiare konštantný (lebo ten na ľavej strane je), a v najbližšom bode ide siločiaru v smere  $y$ . Takže zderivovaním toho výrazu v najbližšom bode podľa  $y$  musíme dostať nulu.

Výsledková listina FX po piatej sérii.

#	Riešiteľ	FX1-12	FX13	FX14	FX15	$\Sigma$
1.	Filip Kubina	43.2	3	2	-	48.2
2.	Jan Hermann	34.5	4.5	5	1	45
3.	Peter Vanya	20.4	2	2.5	-	24.9
4.	Lukáš Konečný	16.2	4.5	-	-	20.7
5.	Michal Spišiak	19	-	-	-	19
6.	Lucia Simanová	11.5	-	-	-	11.5
7.	Dalimil Mazáč	-	-	5	4	9
8.	Samuel Hapák	8.5	-	-	-	8.5
9.	Mária Kieferová	3.4	3	-	-	6.4
10.	Dávid Vendel	5	-	-	-	5
11.	Ivan Burmister	1	-	-	-	1
	Michal Hojčka	1	-	-	-	1
	Peter Ondáč	1	-	-	-	1
14.	Zuzana Horváthová	0	-	-	-	0
	Eugen Hruška	0	-	-	-	0
	Barbora Sedláčková	0	-	-	-	0
	Alena Černá	0	-	-	-	0