powered by FKS

FX [f:ks]

Vzorové riešenia a výsledky 3. série 4. ročníka

FX7 Mesiac (Opravoval Jakub)

Koľkonásobne silnejšie žiari Mesiac v splne než v prvej štvrti?

Uvažujte Lambertovský model rozptylu svetla na mesačnom povrchu.

Pred samotným riešením úlohy si dohodneme vyjadrovací aparát. Budem používať fyzikálnu veličinu *hustota žiarivého toku*, ktorá vyjadruje výkon žiarivej energie prechádzajúcej cez jednotkovú plochu kolmú na smer toku. Budeme ju značiť I. Jej základnou jednotkou je $\mathrm{W.m^{-2}}$. Ďalej budem používať označenie $R_{\text{M-Z}}$ pre vzdialenosť Zem-Mesiac, R_{M} pre polomer Mesiaca.

Úlohu vyriešim s nasledovnými aproximáciami: mesačný povrch je sféra o polomere R_{M}, Mesiac obieha okolo Zeme po kružnici s polomerom $R_{\text{M-Z}}$ v rovine ekliptiky, hustota toku žiarenia zo Slnka pri Mesiaci je nezávislá od fázy[1]. Zanedbávam svit hviezd. Samotný odraz uvažujem lambertovský s rovnakým koeficientom odrazivosti na celom povrchu.[2] Zanedbám akékoľvek pohlcovanie žiarenia v priestore medzi Zemou a Mesiacom.

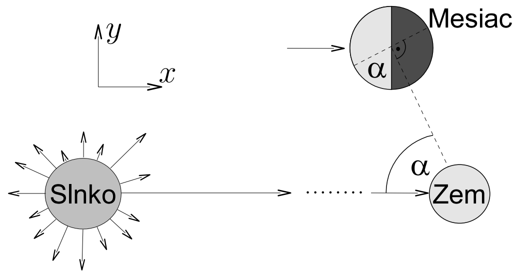
Stručne osvetlím ešte motiváciu lambertovského rozptylu. Ide o model, podľa ktorého je hustota žiarivého toku do vybraného smeru proporcionálna kosínusu uhla medzi normálou vyžarujúcej plochy a vybraným smerom. To zabezpečuje, že osvetlenú plôšku budem vnímať zo všetkých smerov rovnako jasnú, lebo hustota žiarivého toku dopadajúca do môjho optického senzora bude proporcionálna priestorovému uhlu, pod ktorým túto plôšku vidím. Je to dobrá aproximácia pre relatívne drsné povrchy, avšak veľmi nedobrá pre zrkadliace plochy.

Náčrt situácie: Chcem zistiť pomer hustôt žiarivého toku pre štvrťfázu ($\alpha = \frac{\pi}{2}$) a spln ($\alpha = \pi$). V tomto vzoráku spočítame hustotu Mesiacom odrazeného toku žiarenia v závislosti od uhla α.

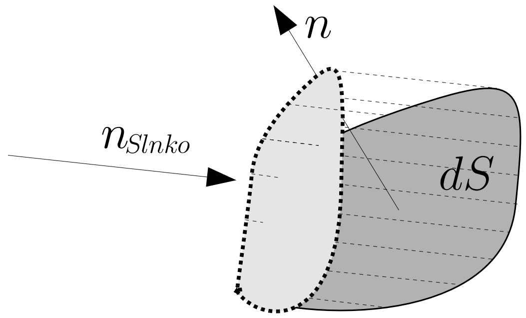
---

[1] Nakoľko relatívna zmena vzdialenosť Slnko-Mesiac je pri obehu Mesiaca okolo Zeme v ráde tisícin, tak ide o rozumné zjednodušenie.

[2] V reáli je odrazivosť funkcia závislá od konkrétneho miesta, od smeru, odkiaľ je toto miesto osvetlené, od frekvencie dopadajúceho žiarenia a taktiež od smeru, v ktorom uvažujem odraz.



Zoberme si malú plôšku povrchu Mesiaca s obsahom dS a jednotkovou normálou[3] $\mathbf{n}$. Ak je táto plocha osvietená Slnkom, tak výkon dopadajúci na ňu je rovný súčinu hustoty žiarivého toku Slnka I_{Slnko} vo vzdialenosti 1 AU a plochy priemetu našej plochy do smeru toku žiarenia.



Plocha priemetu plochy do smeru toku žiarenia je rovná súčinu plochy dS a kosínusu uhla β, ktorý zvierajú jednotkový vektor toku žiarenia $\mathbf{n}_{\mathrm{Slnko}} = (1, 0, 0)$ a normála plochy $\mathbf{n}$. Teda žiarivý výkon dopadajúci na plochu je

$$\mathrm{d}P_{\mathrm{incoming}} = I_{\mathrm{Slnko}} \cos\beta \, \mathrm{d}S.$$

Pre lambertovský povrch potom platí, že v smere odchýlenom o uhol γ od normály plochy vo vzdialenosti $R_{\mathrm{M\text{-}Z}}$ bude hustota Mesiacom odrazeného žiarivého toku

$$\mathrm{d}I_{\mathrm{mesačná}} = \frac{A \, \cos\gamma}{\pi R_{\mathrm{M\text{-}Z}}^2} \, \mathrm{d}P_{\mathrm{incoming}},$$

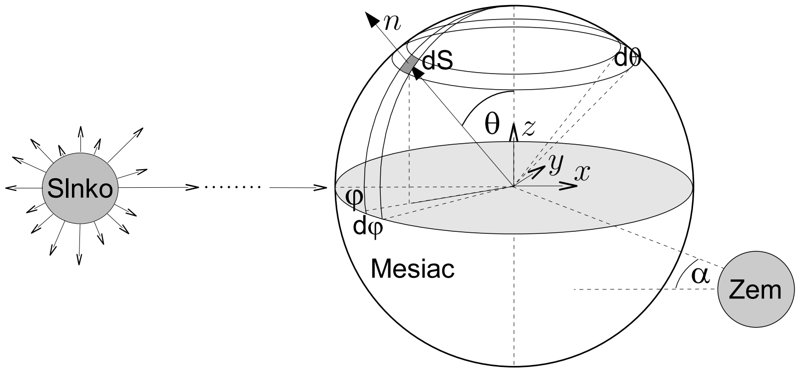
kde A je albedo – čiže konštanta vyjadrujúca podiel odrazeného žiarivého výkonu ku dopadajúcemu výkonu[4]. Kosínus uhla γ viem opäť šikovne vyjadriť pomocou skalárneho súčinu jednotkového vektora normály plochy s jednotkovým vektorom v smere k pozorovateľovi $\mathbf{n}_{\mathrm{Zem}} = (\cos\alpha, -\sin\alpha, 0)$.

Zoberme si plôšku na povrchu Mesiaca na mieste s polárnym uhlom[5] θ a zemepisnou dĺžkou φ o uhlových rozmeroch dθ, resp. dφ, viď obrázok.

[3] Normála plochy je vektor kolmý na danú plochu. Keď hovorím o jednotkovej normále, tak tým myslím, že jej dĺžka je jednotková. Každá dostatočne malá plocha je prakticky rovinná a teda **má** normálu.

[4] Pre Mesiac je hodnota albeda v priemere približne $7{,}2\,\%$.

[5] Polárny uhol je obdoba zemepisnej šírky, ale meria sa od severného pólu.



Táto plôška bude mať obsah $\mathrm{d}S = R_{\mathrm{M}}^2 \sin\theta \mathrm{d}\theta\, \mathrm{d}\varphi$. Jej jednotková normála bude $\mathbf{n} = (-\sin\theta\cos\varphi, -\sin\theta\sin\varphi, \cos\theta)$.

Vyjadrime si kosínusy uhla β, resp. γ. Platí

$$\cos\beta = |\mathbf{n}\cdot\mathbf{n}_{\text{Slnko}}| = \sin\theta\ \cos\varphi,$$
$$\cos\gamma = |\mathbf{n}\cdot\mathbf{n}_{\text{Zem}}| = -\sin\theta\ \cos(\alpha+\varphi).$$

Ostáva nám už iba posčitovať hustotu odrazeného žiarivého toku od všetkých osvetlených plôch Mesiaca. Osvetlené budú zjavne plochy, ktorých θ je z intervalu $\langle 0,\pi\rangle$ a φ z intervalu $\left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right\rangle$. Zo Zeme sú viditeľné plochy s θ z intervalu $\langle 0,\pi\rangle$ a φ z intervalu $\left\langle \frac{\pi}{2}-\alpha, \frac{3\pi}{2}-\alpha\right\rangle$.[6] Teraz už vieme, že viditeľné a osvetlené plochy majú θ z intervalu $\langle 0,\pi\rangle$ a φ z intervalu $\left\langle \frac{\pi}{2}-\alpha, \frac{\pi}{2}\right\rangle$, kde sa predpokladá, že $\alpha\in\langle 0,\pi\rangle$.

Nasleduje výpočet hustoty toku žiarenia odrazeného Mesiacom videného pozemským pozorovateľom:

$$I_{\text{mesačná}}(\alpha) = \int_{\text{osvetlené a viditeľné plochy}} \frac{A}{\pi R_{M-Z}^2} I_{Slnko}\cos\gamma\ \cos\beta\,\mathrm{d}S$$
$$= -\frac{A R_{\mathrm{M}}^2}{\pi R_{\text{M-Z}}^2} I_{\text{Slnko}} \int_{\theta\in\langle 0,\pi\rangle,\varphi\in\left\langle\frac{\pi}{2}-\alpha,\frac{\pi}{2}\right\rangle} \sin^3\theta\ \cos\varphi\ \cos(\alpha+\varphi)\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi$$

Takýto dvojný integrál môžeme počítať tak, že si integračný priestor $\theta\in\langle 0,\pi\rangle, \varphi\in\left\langle\frac{\pi}{2}-\alpha,\frac{\pi}{2}\right\rangle$ rozdelíme na pásiky rovnobežné s osou pre θ. Potom počítame vlastne 2 integrály v sebe. Dá sa však vidieť, že pre ľubovoľné φ potrebujem počítať rovnaký integrál ohľadom premennej θ. Preto sa dá tento dvojný integrál napísať ako súčin integrálov I_1 a I_2, pričom

$$I_1 = \int_0^\pi \sin^3\theta\,\mathrm{d}\theta,$$
$$I_2 = \int_{\frac{\pi}{2}-\alpha}^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi\ \cos(\alpha+\varphi)\,\mathrm{d}\varphi.$$

[6] Platí iba v priblížení $R_{\mathrm{M}} \ll R_{\text{M-Z}}$, v skutočnosti vidíme o málo menej.

Výpočet integrálu I_1 sa dá urobiť nasledovne. Vo vzniknutom integrály použijeme substitúciu $t = \cos\theta$.

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^\pi \sin^3\theta \,\mathrm{d}\theta \\ &= \int_0^\pi \sin\theta\,(1-\cos^2\theta)\,\mathrm{d}\theta \\ &= \int_0^\pi \sin\theta\,\mathrm{d}\theta - \int_0^\pi \sin\theta\ \cos^2\theta\,\mathrm{d}\theta \\ &= [-\cos\theta]_0^\pi - \int_{-1}^{1} t^2\,\mathrm{d}t \\ &= 2 - \left[\frac{t^3}{3}\right]_{-1}^{1} = 4/3. \end{aligned}$$

Výpočet druhého integrálu I_2 je prakticky priamočiary.

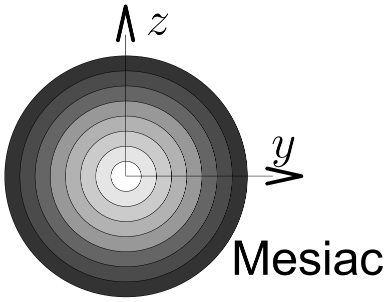
$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{\frac{\pi}{2}-\alpha}^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi\ \cos(\alpha+\varphi)\,\mathrm{d}\varphi \\ &= \int_{\frac{\pi}{2}-\alpha}^{\frac{\pi}{2}} \left[\cos^2\varphi\ \cos\alpha - \cos\varphi\ \sin\varphi\ \sin\alpha\right]\,\mathrm{d}\varphi \\ &= \cos\alpha \int_{\frac{\pi}{2}-\alpha}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2\varphi}{2}\,\mathrm{d}\varphi - \sin\alpha \int_{\frac{\pi}{2}-\alpha}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2\varphi}{2}\,\mathrm{d}\varphi \\ &= \cos\alpha \left[\frac{2\varphi + \sin 2\varphi}{4}\right]_{\frac{\pi}{2}-\alpha}^{\frac{\pi}{2}} - \sin\alpha \left[\frac{-\cos 2\varphi}{4}\right]_{\frac{\pi}{2}-\alpha}^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{2\alpha - \sin 2\alpha}{4}\cos\alpha - \frac{1-\cos 2\alpha}{4}\sin\alpha = \frac{\alpha\cos\alpha - \sin\alpha}{2}. \end{aligned}$$

Dostávame výsledok

$$I_{\text{mesačná}}(\alpha) = \frac{2AR_{\text{M}}^2}{3\pi R_{\text{M-Z}}^2}(\sin\alpha - \alpha\cos\alpha)\, I_{\text{Slnko}}.$$

Odtiaľ hneď vidíme, že lambertovský Mesiac by v splne odrážal π-násobne viac slnečného žiarenia ako vo štvrťfáze. Tiež vieme takto určiť, že osvit Mesiacom v splne by bol zhruba miliónkrát slabší ako slnečný osvit.

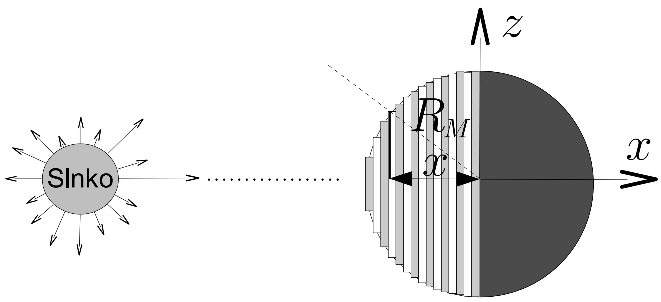
Ako sa to dalo riešiť jednoduchšie pre naše pekné fázové uhly $\alpha = \frac{\pi}{2}$, resp. $\alpha = \pi$? Nuž, treba si všimnúť, že hustota toku žiarenia prichádzajúceho od reflektujúceho lambertovského povrchu závisí od dopadajúcej hustoty toku a priemetu plochy, ktorú vidím odrážať. Ako druhé si treba všimnúť, ako vyzerá množina bodov na povrchu Mesiaca s rovnakou dopadajúcou hustotou toku slnečného žiarenia. Ako tretie treba nahliadnuť ako to vidíme v príslušnej fáze zo Zeme. V splne dostávame pekne rotačne symetrický obraz.



Zoberme si také sústredené medzikružie s vnútorným polomerom r a vonkajším $r + \mathrm{d}r$. Toto je osvetlené Slnkom rovnako, dopadá naň hustota slnečného žiarivého toku $I_{\text{dopadajúca}} = I_{\text{Slnko}} \frac{\sqrt{R_{\text{M}}^2 - r^2}}{R_{\text{M}}}$, kde výraz $\frac{\sqrt{R_{\text{M}}^2 - r^2}}{R_{\text{M}}}$ nie je nič iné ako kosínus uhla medzi normálou ľubovoľnej plôšky medzikružia a smerom ku Slnku. Teraz využijeme, že povrch Mesiaca je lambertovský, teda nech sa pozerám z ľubovoľného smeru, tak plochu vidím rovnako jasnú a hustota odrazeného žiarivého toku je priamo úmerná ploche, ktorú vidím. Plocha medzikružia, t.j. priemet rovnako osvetlených miest na povrch Mesiaca do smeru pozorovateľa na Zemi, je $\mathrm{d}S = 2\pi r \,\mathrm{d}r$. Teda hustota toku odrazeného touto plochou v miestach Zeme je $\mathrm{d}I_{\text{mesačná}} = \frac{A}{\pi R_{\text{M-Z}}^2} I_{\text{dopadajúca}} \mathrm{d}S$. Rozpísané na drobné a spočítané dokopy dostávame celkovú hustotu mesačného žiarivého toku pre spln

$$I_{\text{spln}} = \frac{2AI_{\text{Slnko}}}{R_{\text{M-Z}}^2 R_{\text{M}}} \int_0^{R_{\text{M}}} r\sqrt{R_{\text{M}}^2 - r^2}\,\mathrm{d}r.$$

Tento integrál sa dá vypočítať substitúciou, no ukáže sa, že počítať ho vôbec nie je potrebné. Totiž, v štvrťfáze dostávame tiež pekný obrázok, tentoraz však rovnako osvetlené vidíme zvislé „slížiky“ namiesto sústredených infinitenzimálnych medzikruží.



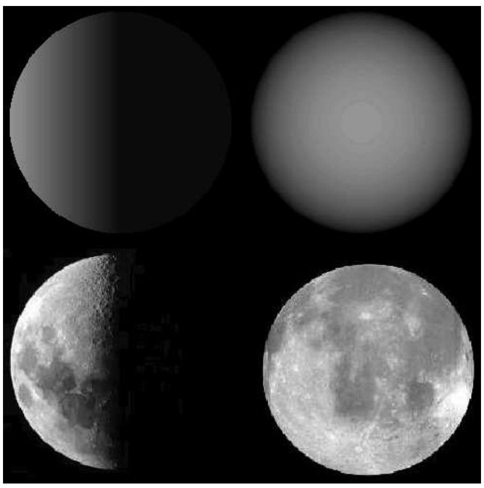
Dopadajúca intenzita je tentoraz $I_{\text{dopadajúca}} = I_{\text{Slnko}} \frac{|x|}{R_{\text{M}}}$, kde výraz $\frac{|x|}{R_{\text{M}}}$ je opäť kosínus uhla normály plochy a smeru ku Slnku – t.j. x-ového smeru. Plocha slížikov je $\mathrm{d}S = 2\sqrt{R_\mathrm{M}^2 - x^2}\,\mathrm{d}x$. Teda celková hustota odrazeného toku je

$$I_\text{štvrť} = \frac{2AI_\mathrm{Slnko}}{\pi R_\text{M-Z}^2 R_\mathrm{M}} \int_0^{R_\mathrm{M}} y\sqrt{R_\mathrm{M}^2 - x^2}\,\mathrm{d}x.$$

Hneď vidíme, že platí $I_\mathrm{spln} = \pi I_\text{štvrť}$.

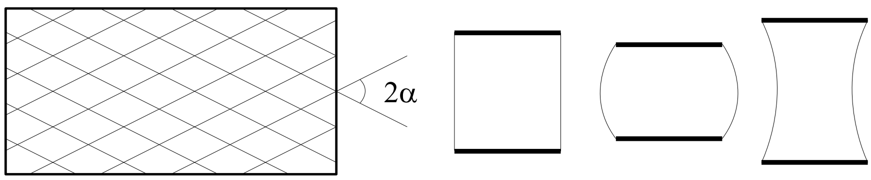
Dodatok: Mesiac však nie je dobrým príkladom telesa s lambertovským rozptylom. Prejavuje sa na ňom relatívne silný opozičný efekt, ktorý spôsobuje, že odrazené žiarenie bude preferovať smer, odkiaľ prichádza. Inými slovami povedané, ak je objekt nasvietený spoza pozorovateľa, tak bude výrazne jasnejší ako by sa dalo usudzovať z lambertovského modelu. Vysvetľuje sa to tým, že na povrchu Mesiaca (a Marsu…) sa nachádza porézny materiál, ktorý prakticky vždy vrhá tieň na časť viditeľného povrchu práve okrem prípadu, keď je zdroj žiarenia priamo za nami. V prípade Zeme je tu ešte tá komplikácia, že dokonalý spln nie je zo Zeme pozorovateľný, lebo v takom prípade nastáva zatmenie Mesiaca. Podľa pozorovaní posádok programu Apollo je osvit pri úplnom splne až o 30 % silnejší ako pri najlepšie pozorovateľnom splne zo Zeme. Treba poznamenať, že Mesiac vstupuje do polotieňa, ak uhol α nadobúda uhol zhruba $178,78^\circ$. Pri lambertovskom modeli by bol relatívny nárast osvitu pre $\alpha = 180^\circ$ iba necelé štvrť promile.

V skutočnosti sa pozoruje asi 10-násobný nárast osvitu v splne voči štvrťfáze. Pomer osvitu Mesiacom v splne ku osvitu Slnkom je približne 1/450000. Ešte spomeniem, prečo je Slnkom neosvetlená časť Mesiaca na hviezdnej oblohe relatívne svetlá. Hviezdy vo veci nebudú, ale môže za to práve Zem… Prikladám ešte vygenerované obrázky, ako by vyzeral Mesiac, keby bol lambertovský v porovnaní so skutočnosťou.



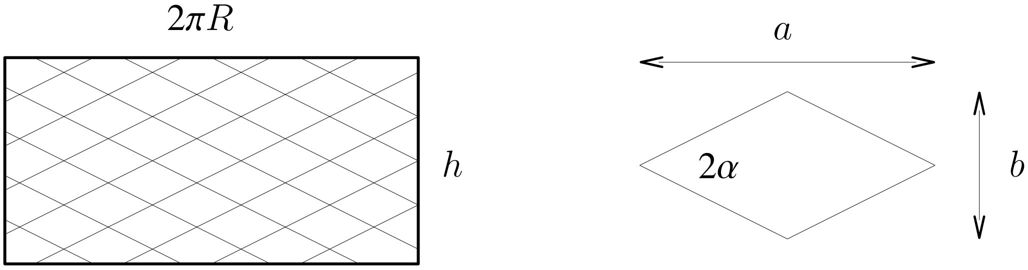
FX8 Ruský sud (Opravoval Kubus)

Fajo zháňal na trhu sud, do ktorého bude dávať jablká na pálenku. Jeden obchodník mu ponúkal veľmi zvláštny sud. Mal tvar valca, jeho podstavy boli z pevného kovu. Plášť je však vyrobený z pružnej gumovej látky, do ktorej sú votkané tenké ohybné a neroztiahnuteľné vlákna tak, ako na obrázku. Fajo sa hneď začal zaujímať, čo sa stane, ak do sudu natlakujeme vzduch. Ktorý z troch tvarov na obrázku zaujme sud v závislosti od uhla α?



Napriek tomu, že vyzerá hrôzostrašne, bol tento príklad celkom ľahký. Stačilo si poriadne premyslieť geometriu celej situácie a nakresliť si pôsobiace sily.

Predstavme si Fajov sud v počiatočnej polohe v tvare valca. Označme si jeho polomer ako R, jeho výšku ako h, a veľkosti uhlopriečok jednotlivých kosoštvorčekových očiek medzi vláknami v jeho plášti ako a a b, všetko tak, ako na obrázku.



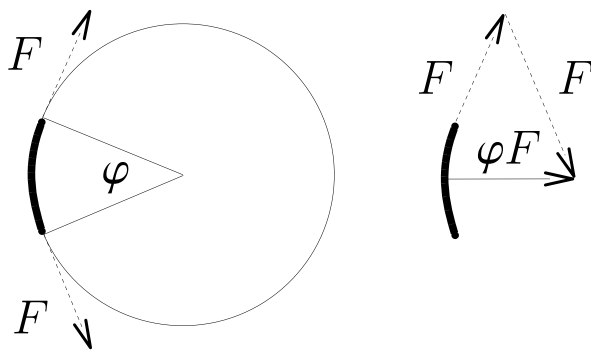
Ako je už naznačené aj na obrázku, plášť sudu bude mať rozmery $2\pi R$ krát h. Na šírku (pozdĺž obvodu podstavy) v ňom teda narátame $m = \frac{2\pi R}{a}$ očiek a na výšku $n = \frac{h}{b}$ očiek. Navyše, pre neskoršie použitie z obrázku vyčítame, že $\operatorname{tg}\alpha = \frac{b}{a}$.

Teraz do sudu natlakujeme vzduch, označíme si rozdiel tlakov vnútri a vonku sudu ako p, a pozrieme sa, aké sily budú pôsobiť na jeho plášť (ktorý je ešte stále v tvare valca).

Na každú podstavu valca pôsobí tlaková sila veľkosti $\pi R^2 p$. Takouto silou je teda rozťahovaný plášť v zvislom smere – inými slovami, ak by sme ho hocikde rozstrihli vodorovným rezom, potrebovali by sme obe časti držať silou $\pi R^2 p$. Keďže v každej výške valca nájdeme vedľa seba m kosoštvorčekových očiek, každé z nich musí niesť $\frac{1}{m}$-tinu tejto sily. Inými slovami, ak by sme spomínaný vodorovný rez viedli cez uzly, kde sa vlákna pretínajú, prerezali by sme m rovnocenných uzlov, preto je každý z týchto uzlov rozťahovaný vertikálnou silou veľkosti

$$F_v = \frac{\pi R^2 p}{m} = \frac{\pi R^2 p}{2\pi R/a} = \frac{paR}{2}.$$

Len o niečo zložitejšie je nájsť silu, ktorou je plášť napínaný vo vodorovnom smere. Označme si túto silu ako F a zhora sa pozrime na výsek plášťa zaberajúci obvodový uhol $\varphi \ll 1$. Na tento výsek pôsobí zvyšok plášťa dvoma silami veľkosti F, zvierajúcimi uhol φ. Ich súčet bude mať veľkosť približne φF (v prvom ráde od φ) a bude smerovať dovnútra sudu.



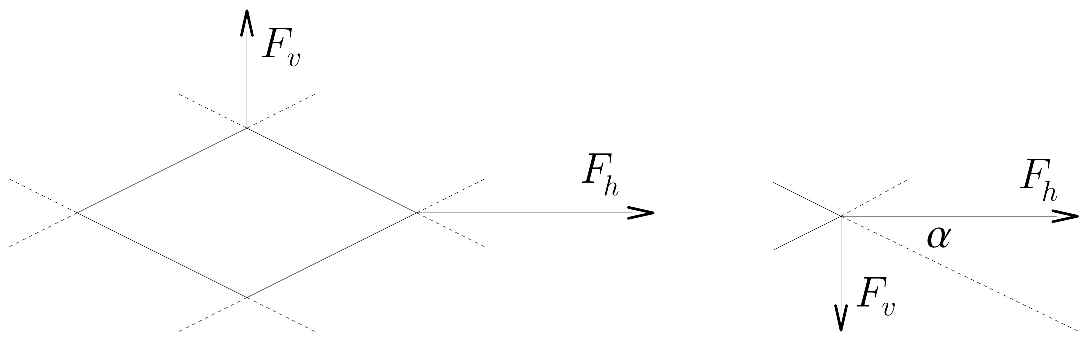
Keďže rozmery nášho výseku sú približne φR (na šírku) krát h (na výšku), presne v opačnom smere pôsobí tlaková sila veľkosti $p\varphi Rh$. Ak by bol sud v pokoji, tieto dve sily by museli byť v rovnováhe a platilo by teda

$$\varphi F = p\varphi Rh, \qquad \text{teda} \qquad F = pRh.$$

Teraz môžeme zopakovať úvahu s rezaním sudu. Ak by sme jeho plášť rozrezali vertikálne, potrebovali by sme ho pridŕžať silou F. Keďže by sme tak rozrezali n uzlov, každý z nich je rozťahovaný horizontálnou silou veľkosti

$$F_h = \frac{F}{n} = \frac{pRh}{h/b} = pbR.$$

Ak je teda sud v pokoji, každé kosoštvorčekové očko je vertikálne rozťahované silou F_v a horizontálne silou F_v. Lenže lanká, z ktorých sú tieto kosoštvorčeky poskladané, vedia prenášať silu iba vo svojom smere. Preto sa ľahko sa dopracujeme k tomu, že musí platiť $\operatorname{tg}\alpha = \frac{F_v}{F_h}$. (Buď „pozriem-vidím“ z obrázka, alebo z pár jednoduchých rovníc.)



My však vieme aj to, že $\frac{b}{a} = \operatorname{tg}\alpha$. Použijúc tieto dva poznatky a vyššie odvodené vzťahy pre F_v a F_h dostávame

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{F_v}{F_h} = \frac{paR/2}{pbR} = \frac{a}{2b} = \frac{1}{2\operatorname{tg}\alpha},$$

z čoho

$$\operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{2}, \qquad \text{teda} \qquad \alpha = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \approx 35^\circ.$$

Pre takýto uhol α bude valcový sud v rovnovážnom stave.

Pre väčšie uhly α bude platiť

$$\operatorname{tg}\alpha > \frac{1}{2\operatorname{tg}\alpha} = \frac{F_v}{F_h},$$

inými slovami, sila F_h bude priveľká (resp. sila F_v primalá) na to, aby boli lanká v rovnováhe, očká v plášti sa teda budú naťahovať do šírky a sud bude tučnejší. Naopak, pre menšie α bude rovnováhu porušovať priveľká sila F_v, očká sa budú naťahovať do šírky a sud bude štíhlejší. Koňec.

FX9 Enterprise (Opravoval Bzdušo)

Cez vianočné prázdniny sa Marcel každoročne vracia z internátu domov. Keďže doma nemá internet, väčšinu času trávi hraním počítačových hier a pozeraním seriálov. Naposledy napríklad dal za jeden deň toľko dielov Star Trek-u, že mal sen, v ktorom bol na palube vesmírnej lode Enterprise. Tá sa práve nachádzala v časti vesmíru, odkiaľ bolo vidno hviezdy na oblohe rozmiestnené rovnomerne, t.j. tak, že počet hviezd na priestorový uhol $\mathrm{d}N/\mathrm{d}\Omega = \rho$ *bol približne konštantný.*

(a) *Aké rozdelenie hviezd by na lodi pozoroval, keby sa vzhľadom na predošlú sústavu pohyboval dopredu rýchlosťou v?*

Predstavte si, že by sme namiesto hviezd mali na oblohe monochromatické zdroje svetla s frekvenciou f s celkovým výkonom P.

(b) Ako sa zmení frekvencia svetla v pohybujúcej sa sústave v závislosti od smeru, ktorým sa Marcel pozerá?

(c) Čo vieme na základe častí (a) a (b) povedať o zmene hustoty žiarivého výkonu $\Pi = \mathrm{d}P/\mathrm{d}\Omega$ hviezdneho pozadia?

Každodenná skúsenosť z komerčných sfér v oblasti science-ficton nás presviedča, že bez plazmovej televízie a akého-takého poznania vybraných kapitol zo špeciálnej teórie relativity sme v modernej spoločnosti úplne stratení. Cieľom tejto úlohy je rozšíriť si obzory a dostať sa tak o krok bližšie k tomuto poznaniu.[7] Na úvod si vezmime jednoduché pozorovanie zo seriálu Star Trek. Loď Enterprise musí pred prechodom do hyperpriestoru zrýchľovať na rýchlosť blízku rýchlosti svetla. Autori seriálu nás presviedčajú, že z paluby lode pri tom uvidíme asi toto:

`http://www.youtube.com/watch?v=1xkYtWXqSfI`

(Komentár: Polohy všetkých hviezd sa vzdialia od bodu, ku ktorému sa pohybujeme.)

Bádanie však odhaľuje zdrvujúcu skutočnosť – rapídne odlišnú od masovej produkcie filmového neba! To, čo by sme videli *naozaj*, je krásne zobrazené na tomto videu:

`http://www.youtube.com/watch?v=JQnHTKZBTI4`[8]

(Komentár: Polohy všetkých predmetov sa posunú *do* bodu, ku ktorému sa pohybujeme. Okrem toho sa v úzkom priestore pred nami prejaví modrý Dopplerov posun a výrazne sa zvýši intenzita dopadajúceho svetla. Pri rýchlostiach blízkych rýchlosti svetla sa celý náš obraz sveta zrúti do malej a veľmi žiarivej oblasti pred nami. V ostatných smeroch svet upadne do tmy.)

Ak vás táto skutočnosť prekvapila, znamená to, že ste lacní konzumenti filmovej produkcie. Ukážeme si, že prihliadajuc na fakt, že rýchlosť svetla c je rovnaká vo všetkých vzťažných sústavách, sú deje na druhom video úplne intuitívne. Tak čo? Dostatočná motivácia čítať ďalej?

[7] Záujemcovia sa môžu o krok priblížiť aj k plazmovej televízii, čo *tiež rozširuje* obzory. :-)
[8] Toto video mi poslal Lukáš Tomek, za čo som mu vďačný.

Časť (a)

Na mechanike nás naučili, ako vyzerá pohyb telies z pohľadu rôznych vzťažných sústav. Ak sa sústava S' vzďaľuje rýchlosťou $\mathbf{v}$ od sústavy S a v sústave S' sa pohybuje teleso T rýchlosťou $\mathbf{u}$, tak v sústave S sa pohybuje teleso T rýchlosťou $\mathbf{v}+\mathbf{u}$. Vektory si predstavíme ako šípky a novú rýchlosť získame ako súčet dvoch šípok.

Ak uvážime relativistické efekty, myšlienka skladania rýchlosti *zostáva*. Pravidlo, ako sa to robí, tu však vyzerá *inak*. Musí to byť inak. Predstavte si, že teleso T je fotón, teda $|\mathbf{u}| = c$. Ak prejdeme do inej sústavy a *pripočítame* nejakú rýchlosť $\mathbf{v}$,[9] tak výsledná rýchlosť musí mať *opäť* veľkosť c. Fotón sa predsa pohybuje rýchlosťou *c vo všetkých* vzťažných sústavách a práve pohyb fotónov je to, čo nás v tejto úlohe zaujíma.

Bežné skladanie šípok tu evidentne nefunguje.[10] Aby sme odhalili správne pravidlo, zrekapitulujme si pár dôležitých znalostí zo špeciálnej teórie relativity.

Celá relativita sa zjednoduší, ak prijmeme dve bizarné myšlienky:

1. Existuje akýsi štvorrozmerný priestor (tzv. priestoročas[11]). Jeho body sú udalosti, tj. štvorice čísel (ct, x, y, z) popisujúce *kedy* a *kde* sa niečo udialo.

2. Štyri rozmery okrem iného znamenajú aj štvorkomponentné vektory (tzv. štvorvektory). Pri prechode z jednej vzťažnej sústavy sa transformujú rovnako ako polohový štvorvektor (ct, x, y, z).[12] Skalárny súčin dvoch štvorvektorov A_μ a B_μ je tu definovaný(!) ako
$$A_\mu B^\mu = A^\mu B_\mu = A_0 B_0 - A_1 B_1 - A_2 B_2 - A_3 B_3.$$

Ak prechádzam zo vzťažnej sústavy S' do sústavy S, tak nejako mením „smer“ priestorových a časových osí[13] a polohu počiatku, bodu

[9] Samozrejme, pre fyzikálne prípustné situácie musí byť $|\mathbf{v}| < c$.

[10] Možno ste si niekedy predstavovali, že dosiahnuť nadsvetelnú rýchlosť nie je vôbec ťažké. Stačí vyslať zo Zeme raketu rýchlosťou $c/2$ a vnútri rakety vrhnúť v smere jej pohybu nejaké teleso opäť rýchlostou $c/2$. Čo by sme však pozorovali zo Zeme *nie je* pohyb telesa rýchlosťou svetla, ale len rýchlosťou $4c/5 < c$. V relativite teda „$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{4}{5}$“. Kľúčový pojem: Dilatácia času. (Čo? Aké skracovanie času? Pozorujem deje v rakete *spomalene?*)

[11] V literatúre nájdete aj názov časopriestor. Ide samozrejme o tú istú vec a správne názvy sú oba. Vznikli však prekladom z dvoch rôznych slov: Z anglického `spacetime`, resp. z nemeckého `die Raumzeit`.

[12] A to z toho istého dôvodu, prečo sa v našom trojrozmernom priestore všetky vektory transformujú ako polohový vektor.

[13] Pokiaľ sa S a S' voči sebe nepohybujú, ide môže ísť o bežné rotácie priestorových osí, ktoré ponechávajú rovnakú časovú os. Pokiaľ sa voči sebe sústavy pohybujú, ide o tzv. hyperbolické rotácie (anglicky `boost`) pri ktorých sa nejako mení aj smer časovej osi.

$(0,0,0,0)$. Všetky súradnice sa pritom menia na nové jednotným vzťahom

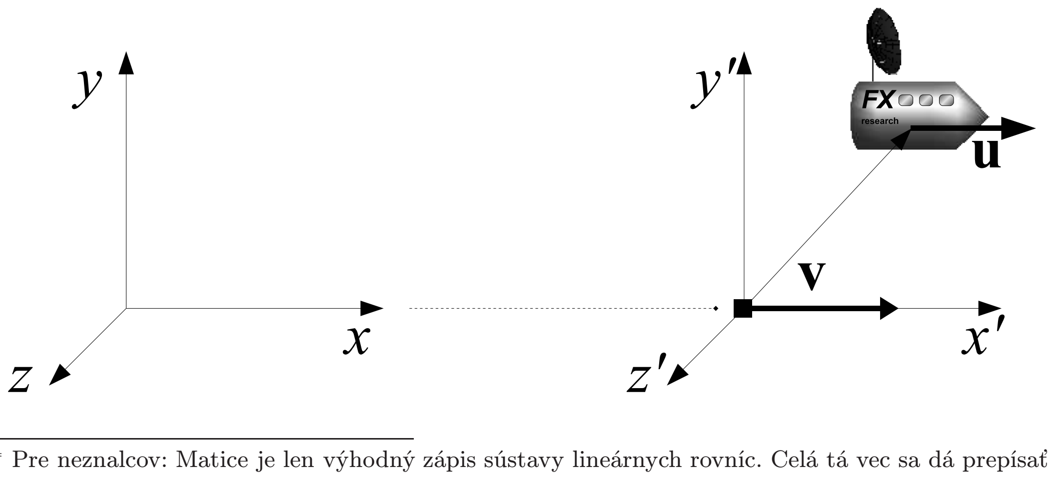
$$\begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Lambda_{00} & \Lambda_{01} & \Lambda_{02} & \Lambda_{03} \\ \Lambda_{10} & \Lambda_{11} & \Lambda_{12} & \Lambda_{13} \\ \Lambda_{20} & \Lambda_{21} & \Lambda_{22} & \Lambda_{23} \\ \Lambda_{30} & \Lambda_{31} & \Lambda_{32} & \Lambda_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix},$$

kde stĺpček vpravo vyjadruje posunutie počiatku a prvky matice[14] $\Lambda_{\mu\nu}$ sú konštanty.[15]

My budeme skúmať najjednoduchší prípad, keď majú sústavy S a S' spoločný počiatok, rovnako natočené osi a keď sa sústava S' pohybuje voči sústave S rýchlosťou **v** v kladnom smere osi x. Vtedy je stĺpček vpravo nulový a matica Λ má jednoduchý tvar[16]

$$\begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\frac{v}{c} & 0 & 0 \\ \gamma\frac{v}{c} & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}, \text{ kde } \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}.$$

Aby sme objavili zákon skladania rýchlostí, uvažujme raketu FX (pozri obrázok), ktorá sa v S' pohybuje rýchlosťou **u** v kladnom smere osi x'.



[14] Pre neznalcov: Matice je len výhodný zápis sústavy lineárnych rovníc. Celá tá vec sa dá prepísať ako

$$\begin{aligned} ct &= \Lambda_{00}ct' + \Lambda_{01}x' + \Lambda_{02}y' + \Lambda_{03}z' + a_0 \\ x &= \Lambda_{10}ct' + \Lambda_{11}x' + \Lambda_{12}y' + \Lambda_{13}z' + a_1 \\ y &= \Lambda_{20}ct' + \Lambda_{21}x' + \Lambda_{22}y' + \Lambda_{23}z' + a_2 \\ z &= \Lambda_{30}ct' + \Lambda_{31}x' + \Lambda_{32}y' + \Lambda_{33}z' + a_3. \end{aligned}$$

Koeficienty v rovniciach musia spĺňať isté požiadavky, ktoré sa lepšie formulujú v reči matíc.

[15] Pre znalcov: Matica Λ môže byť takmer ľubovoľná. Musí spĺňať len podmienky $\det\Lambda = 1$, $\Lambda_{00} \geq 1$ a $\Lambda^T\eta\Lambda = \eta$, kde η je matica 4×4, ktorá má na diagonále čísla $(1,-1,-1,-1)$ a úzko súvisí s tvarom skalárneho súčinu.

[16] Tu si treba dať pozor na to, že v je záporné, ak sa sústava S' pohybuje proti smeru osi x. To docielime aj zámenou S$\leftrightarrow$S'. To znamená, že pri prechode od čiarkovaných súradníc k nečiarkovaným vyzerá matica Λ rovnako, akurát v zmení znamieno na opačné.

Rýchlosť rakety v sústave S' *je definovaná* ako

$$\mathbf{u} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}'}{\mathrm{d}t'},$$

čo sa v tomto prípade redukuje na $u = \frac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}t'}$.

Je dôležité si uvedomiť, že čas v menovateli je čas v sústave S'. Keď chceme poznať rýchlosť $\mathbf{w}$ v sústave S, musíme derivovať nečiarkované súradnice podľa nečiarkovaného času, teda

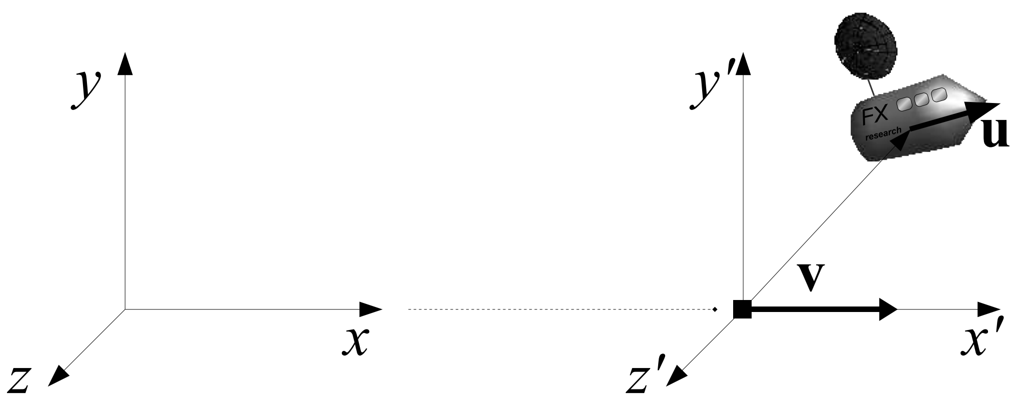
$$\mathbf{w} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t},$$

čo sa v tomto prípade zjednoduší na $w = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$.[17] Ale veď toto nie je vôbec ťažké spočítať. Stačí sa pozrieť na transformačný zákon (áno, tá matica) a môžeme písať

$$\begin{aligned} w = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} &= \frac{\gamma\frac{v}{c}(c\mathrm{d}t') + \gamma\mathrm{d}x'}{\frac{1}{c}\left(\gamma(c\mathrm{d}t') + \gamma\frac{v}{c}\mathrm{d}x'\right)} \\ &= \frac{v\mathrm{d}t' + \mathrm{d}x'}{\mathrm{d}t' + \frac{v}{c^2}\mathrm{d}x'} \\ &= \frac{v+u}{1+\frac{vu}{c^2}}. \end{aligned}$$

To je zložená rýchlosť. Všimnite si, že pre malé rýchlosti dáva naozaj $w = u + v$. Tiež si všimnite, že ak jedna z rýchlostí je rovná c, zložená rýchlosť je tiež rovná c. Presne, ako sme chceli!

Keď sme už prišli až sem, je jednoduché nájsť zovšeobecnený vzťah pre transformáciu všeobecného vektora rýchlosti $\mathbf{u} = (u_x, u_y, u_z)$.



[17] Rozmyslite si, *prečo* vznikne zložením dvoch rovnobežných pohybov výsledný pohyb v rovnakom smere. Nie, tu nejde o relativitu, ale o skutočnosť, že vo vesmíre neexistuje žiadny preferovaný smer.

Po aplikovaní transformačného zákona dostávame

$$\begin{aligned} w_x &= \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{v+u_x}{1+\frac{vu_x}{c^2}} \\ w_y &= \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \frac{u_y}{\gamma\left(1+\frac{vu_x}{c^2}\right)} \\ w_y &= \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = \frac{u_z}{\gamma\left(1+\frac{vu_x}{c^2}\right)}. \end{aligned}$$

Položme si ešte opačnú otázku: Ako sa transformujú rýchlosti pri prechode z S do S'? Ak si uvedomíme, že v transformačnej matici stačí spraviť zámenu $v \to -v$, tak tú istú zámenu treba spraviť aj vo výsledku. Opačné transfomrácie teda vyzerajú

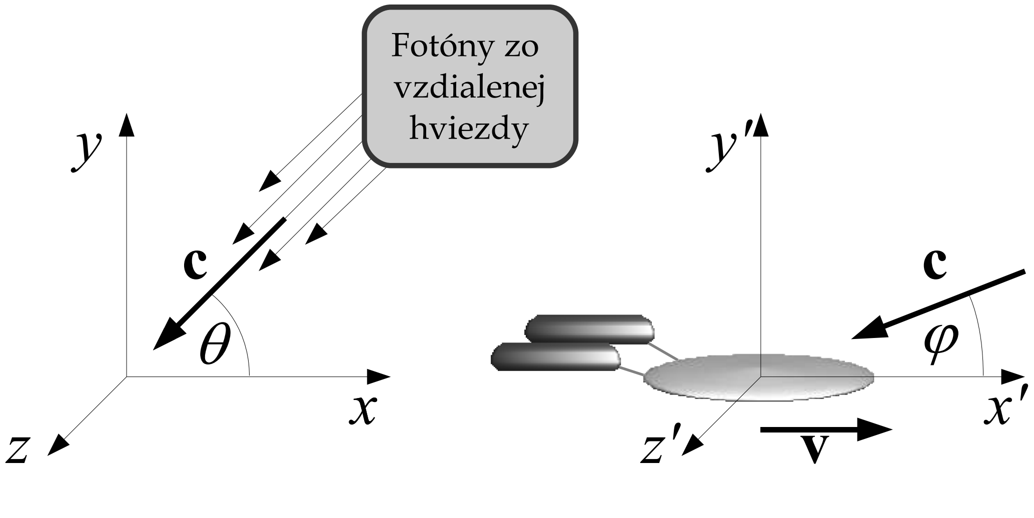
$$\begin{aligned} u_x &= \frac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}t'} = \frac{w_x-v}{1-\frac{vw_x}{c^2}} \\ u_y &= \frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}t'} = \frac{w_y}{\gamma\left(1-\frac{vw_x}{c^2}\right)} \\ u_y &= \frac{\mathrm{d}z'}{\mathrm{d}t'} = \frac{w_z}{\gamma\left(1-\frac{vw_x}{c^2}\right)}. \end{aligned}$$

Vráťme sa konečne k vesmírnej lodi Enterprise. Umiestnime ju do vzťažnej sústavy S'. Vieme, že v sústave S prichádzajú fotóny z nejakej vzdialenej hviezdy pod uhlom θ. Ich rýchlosť je teda po zložkách

$$w_x = -c\cos\theta \qquad w_y = -c\sin\theta \qquad w_z = 0$$

Uhol, pod ktorým uvidíme tú istú hviezdu v sústave lode Enterprise, môžeme určiť ako

$$\cos\varphi = \frac{-u_x}{c} = \frac{v-w_x}{c-\frac{vw_x}{c}} = \frac{v+c\cos\theta}{c+v\cos\theta}.$$



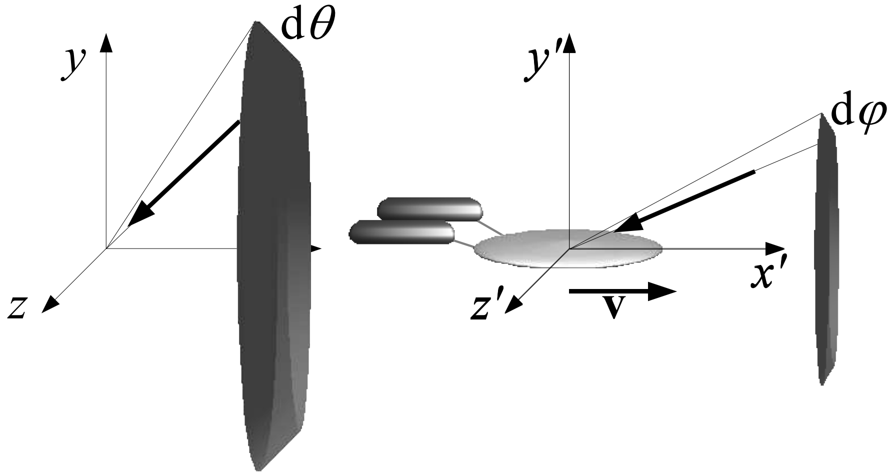
Nám sa, ako časom uvidíme, hodí inverzný vzťah. Po pár úpravách dostaneme

$$\cos\theta = \frac{c\cos\varphi - v}{c - v\cos\varphi}.$$

Už vieme, ako sa posunú polohy všetkých hviezd na oblohe. Ako sa zmení hustota hviezd? Všetky hviezdy nachádzajúce sa v rozmedzí uhlov $(\theta; \theta + \mathrm{d}\theta)$ sa posunú do $(\varphi; \varphi + \mathrm{d}\varphi)$. Ak si zrátame príslušné priestorové uhly a prenásobíme príslušnými hustotami hviezd na oblohe, dostávame rovnicu

$$2\pi\rho\sin\theta\mathrm{d}\theta = 2\pi\rho(\varphi)\sin\varphi\mathrm{d}\varphi,$$

kde sme zaviedli označenie $\rho(\varphi)$ pre hľadanú závislosť novej hustoty hviezd od uhlu ku smeru pohybu.



Úpravou ostatnej rovnice dostávame

$$\rho(\varphi) = \rho\frac{\sin\theta\mathrm{d}\theta}{\sin\varphi\mathrm{d}\varphi} = \rho\frac{\mathrm{d}(\cos\theta)}{\mathrm{d}(\cos\varphi)},$$

kde zapísanú deriváciu vieme zrátať vďaka vyjadreniu $\cos\theta$ od $\cos\varphi$ vyššie. Platí

$$\begin{aligned}\rho(\varphi) = \rho\frac{\mathrm{d}(\cos\theta)}{\mathrm{d}(\cos\varphi)} &= \rho\frac{c\,(c - v\cos\varphi) + v\,(c\cos\varphi - v)}{(c - v\cos\varphi)^2} \\ &= \rho\frac{c^2 - v^2}{(c - v\cos\varphi)^2} \\ &= \rho\frac{1}{\gamma^2\left(1 - \frac{v}{c}\cos\varphi\right)^2}.\end{aligned}$$

Výsledok. Môžete si sami vyskúšať, čo to robí pre $\varphi = 0$ a uvidíte, že vpredu sa hustota hviezd skutočne zhusťuje. Tak ako ukazovalo úvodné video. Integráciou cez celý priestorový uhol si tiež môžete overiť, že celkový počet hviezd ostal nezmenený.

Časť (b)

Ako sa zmení frekvencia pozorovaného svetla v závislosti od smeru? Odpoveď pre $\varphi = 0$ a $\varphi = \pi$ poznáme. V tých prípadoch je to dobre známy Dopplerov jav. My ho máme nájsť pre všeobecný uhol. Napriek tomu sa dá úloha poriešiť priam prekvapivo jednoducho, ak využijeme druhú zo spomínaných bizarných myšlienok, z ktorých vyplývajú všetky zákony relativity: Štvorvektory.

So štvorvektormi sme mali možnosť sa bližšie zoznámiť vo vzoráku úlohy FX 4.6 Zábavné fotóny. Tam sme predstavili štvorvektor polohy, štvorvektor rýchlosti a štvorvektor energie a hybnosti. Rovnako ako tam, aj tu sa ukáže veľmi užitočný práve posledne spomínaný. Hľadaná frekvencia svetla totiž úzko súvisí s energiou jeho fotónov, a tú vieme spočítať Lorentzovou transformáciou! Tzv. štvorhybnosť budeme označovať P_μ. Jej zložky sú[18]

$$P_\mu = (E/c, p_x, p_y, p_z)\,.$$

Ak si ešte spomenieme, že pre fotón $E = hf$ a $|\mathbf{p}| = hf/c$, tak môžeme napísať rovnosť medzi štvorhybnosťou fotónu v sústave S a štvorhybnosťou fotónu v S'. Platí Lorentzova transformácia

$$\begin{pmatrix} \frac{hf}{c} \\ -\frac{hf}{c}\cos\theta \\ -\frac{hf}{c}\sin\theta \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\frac{v}{c} & 0 & 0 \\ \gamma\frac{v}{c} & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{hf'}{c} \\ -\frac{hf'}{c}\cos\varphi \\ -\frac{hf'}{c}\sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Špeciálne si všimnime rovnosť

$$\frac{hf}{c} = \gamma\frac{hf'}{c} - \gamma\frac{v}{c}\frac{hf'}{c}\cos\varphi,$$

odkiaľ jednoduchou úpravou dostaneme hľadanú závislosť

$$f'(\varphi) = f\frac{1}{\gamma\left(1 - \frac{v}{c}\cos\varphi\right)}.$$

Časť (c)

[18] Ak ste pri čítaní tohoto odstavca pocítili závrate a neistotu, skúste si znova prelistovať spomínaný vzorák úlohy FX 4.6.

Ako sa zmení hustota žiarivého výkonu Π? Vieme, ako sa vo vybranom smere zmení počet zdrojov svetla (označme tento násobok ako $a(\varphi)$) a frekvencia, a teda i energia prichádzajúcich fotónov (označme ako $b(\varphi)$). Ľahko by nás mohlo napadnúť, že žiarivý výkon v tomto smere sa zmení $(a(\varphi)b(\varphi))$-násobne. To je však omyl! Zabudli sme na skutočnosť, že sa zmení aj *počet* dopadajúcich fotónov.

Aby sme do problému lepšie nahliadli, predstavme si, že istý zdroj svetla vyžaruje fotóny v rovinných vlnách vzdialených od seba jednu vlnovú dĺžku λ.[19] V inej vzťažnej sústave sú tieto roviny vzdialené o λ'. Fotóny sa však stále pohybujú rýchlosťou svetla, a preto ich budeme registrovať toľkokrát viac, koľkokrát sa zmenšila ich vlnová dĺžka. To je to však opäť $b(\varphi)$, pretože vlnová dĺžka závisí len od prevrátenej hodnoty frekvencie.

Takto sa úvahou dostávame k správnemu výsledku

$$\Pi(\varphi) = \Pi a(\varphi) b^2(\varphi) = \frac{\Pi}{\left[\gamma\left(1 - \frac{v}{c}\cos\varphi\right)\right]^4}.$$

Dosadením napr. pre $v = c/2$ môžeme zistiť, že priamo pred nami sa žiarivý výkon zväčší na 9-násobok, za nami sa zmenší na jednu devätinu. Na kapitánskom mostíku lode Enterprise je teda poriadne horúco a určite by sme si naň nemali zabudnúť vziať slnečné okuliare. S týmto nerátali ani tvorcovia Hviezdnych vojen!

[19] Druhá sada fotónov je vyslaná tak, aby sa nachádzala napr. v minime vlny predchádzajúcich fotónov. To je znova rovina a jej body majú skvelú vlastnosť – nulovosť **B** a **E**. Ak je EM pole v istom bode a čase jednej vzťažnej sústavy nulové, tak v tomto bode a čase je EM pole nulové aj vo všetkých iných vzťažných sústavách. Takéto body sú v dráhe fotónu vzdialené práve o vlnovú dĺžku fotónu v danej vzťažnej sústave. A to sú vzdialenosti rovín, ktoré uvažujeme. Týmto sme vzájomné polohy fotónov definovali *objektívne*.

Výsledková listina FX po tretej sérii.

#	Riešiteľ	FX1-6	FX7	FX8	FX9	$\sum$
1.	Eugen Hruška	21	5	5	3	34
2.	Mária Kieferová	16.5	-	0	1	17.5
3.	Ján Bogár	15	0.5	1	0	16.5
4.	Kateřina Honzáková	7	-	-	-	7
5.	Martin Polačko	6	-	-	-	6
6.	Peter Vanya	5.5	-	-	-	5.5
7.	Jakub Kováč	2	0.5	0	0	2.5
8.	Prabhat Pinnaka	2	-	-	-	2
9.	Adam Mohammad	0	-	-	-	0
	Michal Zajaček	0	-	-	-	0