powered by FKS

FX [f:ks]

Vzorové riešenia a výsledky 4. série 4. ročníka

FX10 Plochá zem (Opravoval Bzdušo)

Je všeobecne známe, že Zem je guľa s polomerom R. Kedysi si však ľudia mysleli, že Zem je nekonečná homogénna platňa s hrúbkou h. Zistite, aká by musela byť táto hrúbka h, aby bolo na „plochej Zemi“ rovnaké gravitačné zrýchlenie, ako je teraz. Predpokladajte, že hustota „plochej Zeme“ by bola rovnaká, ako je priemerná hustota Zeme teraz.

Kým sa dáme do práce, zopakujmesi dva známe fakty o gravitačnom poli.

- Hmotný bod s hmotnosťou dm vytvára v každom bode gravitačné pole dané Newtonovým vzťahom

$$\mathrm{d}\mathbf{g} = G\frac{\mathrm{d}m}{r^2}\hat{\mathbf{e}}_r,$$

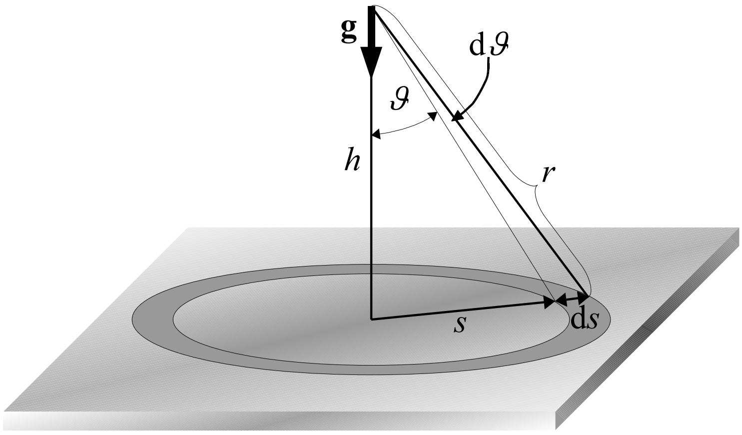
  kde $\hat{\mathbf{e}}_r$ je jednotkový vektor smerujúci od hmotného bodu do miesta, v ktorom hľadáme gravitačné pole.

- Gravitačné pole od viacerých hmotných bodov získame jednoducho ako súčet gravitačných polí od jednotlivých hmotných bodov.

Ak sa zmierime so známym vzťahom pre gravitačné pole gule a potom integrovaním získame vzťah pre gravitačné pole rovnej dosky, úloha je vyriešená. To naozaj urobíme, ale vzápätí si ukážeme, ako sa dala úloha vyriešiť *úplne bez integrovania.*[1] Avšak dočkaj času, ako hus hlasu! Aby sme docenili krásu spomínaného triku, najprv si ukážeme pracné riešenie s použitím integrálov.

Predstavme si nekonečnú dosku s hrúbkou dh a s hustotou ρ. Poďme zistiť, aké je gravitačné pole vo výške h nad ňou. Zaveďme si označenia vzdialeností a uhlov, ako na nasledovnom obrázku:

[1] Aby som nezavádzal, jeden integrál v riešení zapíšeme, ale v skutočnosti integrovať nebudeme. Postačí nám znalosť, že *integrál* vyjadruje akýsi *súčet.*



Zo symetrie je jasné, že hľadané **g** bude smerovať kolmo na rovinu. Rovnako vzdialené časti roviny pritom prispievajú rovnako veľmi. Preto si ju rozdelíme na prstence s polomerom s a šírkou ds. Z geometrie vidno, že ak si ako súradnicu zvolíme uhol ϑ, tak

$$r = \frac{h}{\cos\vartheta}$$

a

$$\begin{aligned} s &= h \operatorname{tg}\vartheta \\ &\Downarrow \\ \mathrm{d}s &= \frac{h}{\cos^2\vartheta}\,\mathrm{d}\vartheta. \end{aligned}$$

Hmotnosť sústredená v jednom prostenci je

$$\mathrm{d}^2 m = 2\pi\rho s \ \mathrm{d}s \ \mathrm{d}h$$

a ku gravitačnému zrýchleniu vo zvolenom bode prispieva

$$\begin{aligned} \mathrm{d}^2 g_{\mathrm{rovina}} &= G\frac{\mathrm{d}^2 m}{r^2}\cos\vartheta \\ &= 2\pi G\rho \ \mathrm{d}h\frac{s \ \mathrm{d}s}{r^2}\cos\vartheta \\ &= 2\pi G\rho \ \mathrm{d}h\frac{\frac{H^2}{\cos^2\vartheta}\operatorname{tg}\vartheta \ \mathrm{d}\vartheta}{\frac{H^2}{\cos^2\vartheta}}\cos\vartheta \\ &= 2\pi G\rho \ \mathrm{d}h\sin\vartheta \ \mathrm{d}\vartheta. \end{aligned}$$

Integráciou cez ϑ od 0 po $\pi/2$ dostaneme celkové pole od nekonečnej tenkej roviny

$$\begin{aligned} \mathrm{d}g_{\mathrm{rovina}} &= 2\pi G\rho \ \mathrm{d}h\int_0^{\pi/2}\sin\vartheta \ \mathrm{d}\vartheta \\ &= 2\pi G\rho \ \mathrm{d}h. \end{aligned}$$

Vidíme, že pole od nekonečnej roviny *nezávisí od vzdialenosti h.* Je rovnaké v celej polrovine. Preto ak vezmeme množstvo takýchto tenkých rovín a poukladáme ich do jednej vrstvy s veľkou hrúbkou H, výsledné pole bude jednoducho

$$g_{\text{rovina}} = 2\pi G\rho H.$$

Tento výsledok stačí porovnať s gravitačným poľom gule, o ktorom *je známe*,[2] že

$$\begin{aligned} g_{\text{guľa}} &= G\frac{M}{R^2} \\ &= \frac{4\pi G\rho R}{3}. \end{aligned}$$

Porovnaním získaných výsledkov dostaneme, že gravitačné zrýchlenia budú rovnaké, ak

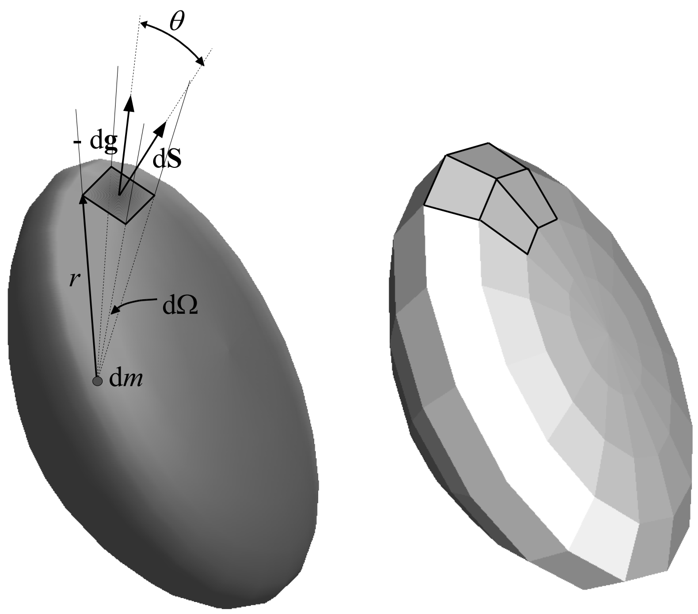
$$h = \frac{2}{3}R.$$

Trik – Gaussov zákon

Teraz si ukážeme, ako možno zapísať gravitačný zákon v inom tvare, ktorý je užitočný v niektorých špecifických situáciách.[3] Uvažujme ľubovoľnú uzavretú plochu v trojrozmerom priestore (napríklad plocha ohraničujúca zemiak, ale v našom prípade ide o nehmotnú, myslenú plochu). Nech sa niekde v jej vnútri nachádza hmotný bod s hmotnosťou dm. Poďme skúmať ním vytvorené gravitačné pole na našej myslenej *úplne hocijakej* uzavretej ploche.

[2] Keď sa nad tým zamyslíte, vôbec *nie je* jasné, prečo by pole od homogénnej gule malo byť rovnaké, ako od hmotného bodu rovnakej hmotnosti umiestneného v strede tejto gule. Vezmime si napríklad bod v blízkosti povrchu gule: Vidno, že niektoré časti gule sú výrazne bližšie, než stred gule. Iné zas príliš ďaleko. Ďalšie dokonca pôsobia gravitačnou silou úplne zlým smerom! Napriek všetkému, *ono to tak naozaj je!* Ide však o netriviálny matematický výsledok.

[3] Najmä v takých, ktoré sú nejakým spôsobom symetrické.



Ak sa budeme pozerať z hmotného bodu smermi vnútri malého priestorového uhla s veľkosťou $d\Omega$, vymedzíme na povrchu plôšku s veľkosťou dS. Z ľahkej geometrie[4] nahliadneme, že

$$dS = r^2 d\Omega / \cos\theta,$$

kde θ je uhol, ktorý zviera spojnica plôšky s hmotným bodom a kolmica na plôšku. Malej plôške ešte priradíme normálový vektor, označme ho $d\mathbf{S}$. Ten je kolmý na našu plôšku a jeho veľkosť sa rovná veľkosti plôšky.

Ak si ešte spomenieme na vzťah pre gravitačné pole, môžeme sa pustiť do boja. Všimnime si záporne vzatý skalárny súčin

$$\begin{aligned} -\,d\mathbf{g}\cdot d\mathbf{S} &= dg\ dS\cos\theta \\ &= \frac{G\ dm}{r^2}\frac{r^2\ d\Omega}{\cos\theta}\cos\theta \\ &= G\ dm\ d\Omega. \end{aligned}$$

Tento teraz zintegrujeme cez celý povrch (všetky plôšky $d\mathbf{S}$), tzn. cez celý priestorový uhol. Pre každý kúsok povrch je však G aj dm konštantné, preto môžeme upravovať

$$\begin{aligned} -\oint d\mathbf{g}\cdot d\mathbf{S} &= \int_S G\ dm\ d\Omega \\ &= G\ dm\int_S d\Omega \\ &= 4\pi G\ dm, \end{aligned}$$

[4]Priestorový uhol je definovaný ako plocha, ktorú vybranými smermi vymedzíme na povrchu jednotkovej gule.

kde sme využili fakt, že celý priestorový uhol[5] je 4π.

Ešte nekončíme! Predstavte si vnútri našej plochy viacej (n) hmotných bodov a sami si rozmyslite nasledovné tvrdenia:

- Gravitačné pole na povrchu možno vyjadriť ako vektorový súčet jednotlivých polí, tj.

$$\mathbf{g} = \mathrm{d}\mathbf{g}_1 + \ldots + \mathrm{d}\mathbf{g}_n.$$

- Skalárny súčin závisí od zložiek vektorov lineárne, preto

$$\mathbf{g} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = \mathrm{d}\mathbf{g}_1 \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} + \ldots + \mathrm{d}\mathbf{g}_n \cdot \mathrm{d}\mathbf{S}.$$

- Integrál cez celý povrch možno rozdeliť na súčet n integrálov, v ktorých už vystupuje len jedna hmotnosť a ktoré sú identické s integrálom o pár riadkov vyššie. Preto platí

$$-\oint \mathbf{g} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = 4\pi G M,$$

  kde M je súčet hmotností všetkých hmotných bodov vnútri myslenej plochy.

Tiež si sami premyslite, prečo hmotné body *mimo* myslenej plochy do integrálu neprispievajú.[6]

Späť k riešeniu

Dokážeme si, že gravitačné pole gule je identické s gravitačným poľom hmotného bodu. Zo symetrie je jasné, že hľadané gravitačné pole smeruje do stredu gule a závisí len od vzdialenosti (nie od smeru). Obklopme teda našu guľu myslenou guľovou plochou s polomerom $r > R_{\text{guľa}}$. Vidíme, že všade na tejto ploche je $\mathbf{g}$ rovnako veľký a navyše rovnobežný s d$\mathbf{S}$ (tj. kolmý na povrch). Preto možno písať

$$\begin{aligned} -\oint \mathbf{g} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = g_{\text{guľa}} S &= 4\pi G M \\ g_{\text{guľa}}\, 4\pi r^2 &= 4\pi G M \\ g_{\text{guľa}} &= \frac{GM}{r^2}. \end{aligned}$$

Vidíme, že polomer gule R do výsledku nevstupuje.[7]

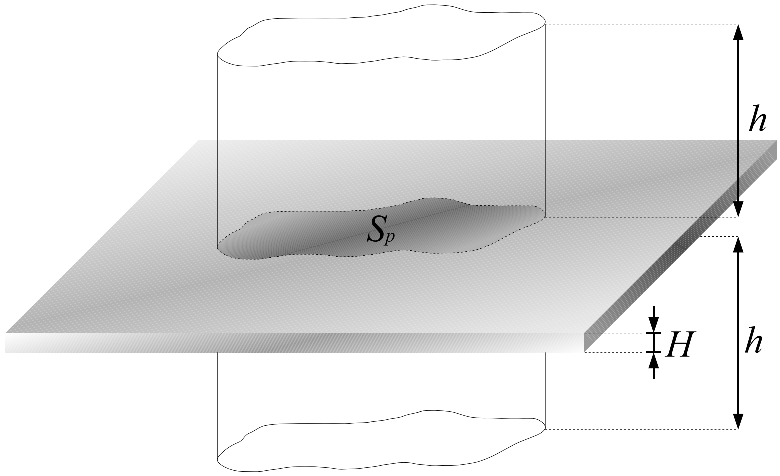
Teraz gravitačné pole nekonečnej roviny (dosky). Zo symetrie je jasné, že $\mathbf{g}$ smeruje kolmo do roviny. Závislosť od vzdialenosti jasná

[5] Tj. povrch jednotkovej gule.

[6] Hint: Nulový priestorový uhol. Teleso síce vidíme v istých smeroch, ale v každom jednom smere vidíme dva povrchy *opačne orientované!* Ich príspevky do integrálu sa navzájom vyrušia.

[7] Znova pripomínam, že tento výsledok *nie je* samozrejmosťou, a že zaň vďačíme závilosti gravitačnej interakcie od $1/r^2$.

nie je. Preto si šikovne zvolíme takú „gaussovskú“ plochu, aby sa nám integrál dobre počítal.



Táto uzavretá plocha pozostáva z dvoch podstáv toho istého, no inak ľubovoľného tvaru, ktoré sa nachádzajú v rovnakej vzdialenosti h na opačných stranách dosky. Plochu každej z nich označme S_p. Plocha sa uzatvára cez plášť spustený kolmo na rovinu.

Čomu je rovný integrál v tomto prípade? Všimnime si, že na každom kúsku plášťa je skalárny súčin $\mathbf{g} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S}$ rovný nule, teda plášť do hodnoty integrálu vôbec neprispieva. Stačí teda zrátať integrál cez podstavy. Tam je však $\mathbf{g}$ konštantné a navyše kolmé na povrch. A my už vieme, že to predsa nie je žiadne integrovanie! Môžeme hneď písať

$$
\begin{aligned}
-\oint \mathbf{g} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = 2g_{\text{rovina}} S_p &= 4\pi G M \\
2g_{\text{rovina}} S_p &= 4\pi G \,\rho H S_p \\
g_{\text{rovina}} &= 2\pi G \,\rho H.
\end{aligned}
$$

Opäť raz dostávame, že takéto pole nezávisí na vzdialenosti h od roviny. Aké jednoduché! Takto rýchlo sa dajú pomocou Gaussovho zákona odvodiť vzťahy pre $g_{\text{guľa}}$ a g_{rovina}. Dopracovať sa k výsledku je teraz už triviálna záležitosť.

Poznámka 1: Skúste si ako cvičenie pomocou Gaussovho zákona dokázať, že gravitačné pole vnútri homogénnej škrupiny je nulové (iný dôkaz nájdete v poznámke pod čiarou vo vzorom riešení úlohy FX D3 Polgule). Tiež si môžete dokázať, že vnútri homogénnej gule klesá gravitačné pole lineárne z hodnoty na povrchu na nulovú hodnotu v jej strede.

Poznámka 2: Bohužiaľ, žiadnu *praktickú* úlohu na využitie Gaussovho zákona pre gravitačné pole nenájdeme. Gauss ho však v skutočnosti vôbec neformuloval pre gravitačné, ale pre *elektrické pole.*

Naozaj, veď stačí spraviť zámeny $M \to Q$, $\mathbf{g} \to \mathbf{E}$ a $G \to 1/4\pi\varepsilon_0$ a dostávame

$$\oint \mathbf{E} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = \frac{Q}{\varepsilon_0}.$$

Ľaľa, konečne vidíme, prečo je v Coulombovom zákone hlúpy faktor $1/4\pi$. Aby žiadny hlúpy faktor nevystupoval v rovniciach vyššej fyziky.

Aplikácie tohto tzv. *Gaussovho zákona* sú ďalekosiahle. Ide o jednu zo štyroch Maxwellových rovníc, ktoré podávajú úplny popis elektromagnetických polí a ktoré v sebe kódujú aj špeciálnu teóriu relativity!

FX11 Ladenie gitary (Opravoval Bzdušo)

Tina sa učí hrať na gitare. Okrem jej podmanivého zvuku ju však zaujala aj skutočnosť, že keď si gitaru naladí v teple domova a potom s ňou vyjde von do chladnej zasneženej noci, gitara už neladí. Aby ste Tine vysvetlili, ako je to možné, tak

(a) *odvoďte vlnovú rovnicu pre strunu;*

(b) *nájdite závislosť základnej frekvencie struny v závislosti od jej predĺženia ΔL;*

(c) *zistie, ako sa zmení základná frekvencia struny, ak s gitarou zájdeme do treskúcej zimy s teplotou o ΔT menšou.*

Struna má dĺžku $L = 0,8\,\mathrm{m}$ (jej časť na kobylke zanedbávame), priemer $d = 0,6\,\mathrm{mm}$, je zhotovená z ocele s hustotou $\rho = 8000\,kg/\mathrm{m}^3$, modulom pružnosti $E = 220\,\mathrm{GPa}$ a tepelnou rozťažnosťou $\alpha = 11.10^-6\,\mathrm{K}^{-1}$ a na začiatku hrá s frekvenciou f_0.

Časť (a)

Odvodenie vlnovej rovnice struny urobíme formálne, aby sa dalo ľahko zopakovať pri odvodení vlnovej rovnice v mnohých iných situáciách. Budem pritom zdôrazňovať všetky zanedbania, ktorých sa dopúšťame.

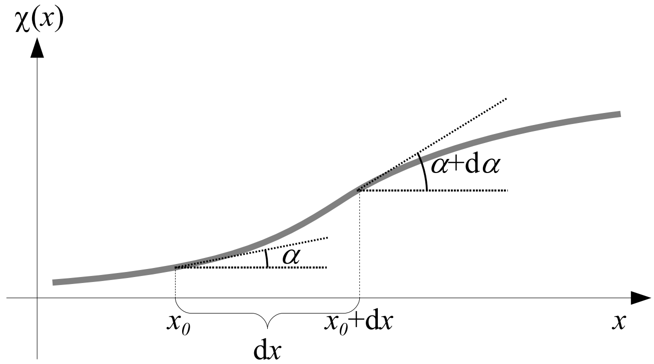
Označme výchylku struny v jednotlivých miestach ako χ.[8] To bude bude závisieť od polohy x i času t, teda je správne písať $\chi(x,t)$. Z praktických dôvodov budem väčšinou časový argument, či dokonca oba argumenty, vynechávať. V súvislosti s týmto si pripomeňme skrátané označenia pre časové a súradnicové derivácie

$$\frac{\partial \chi}{\partial x} = \chi' \qquad \text{a} \qquad \frac{\partial \chi}{\partial t} = \dot{\chi},$$

[8] V prípade pozdĺžnych vĺn by x malo význam súradnice daného bodu na nedeformovanom telese a χ jeho posunutie z tejto polohy do okamžitej polohy.

v prípade druhých derivácií napíšeme dve čiarky, resp. dve bodky.

Nakreslime si prehľadný obrázok, aby sme sa mali od čoho odraziť.



Budeme uvažovať len malé uhly α, aby sme mohli používať aproximáciu $\sin\alpha \approx \alpha \approx \operatorname{tg}\alpha$. V tom prípade zrejme môžeme písať $\chi'(x) = \alpha(x)$.

Teraz poďme riešiť dynamiku úlohy. Aké sily pôsobia na vybraný infinitezimálny kúsok struny? Struna je napínaná nejakou silou T. Tá je určite konštantná pozdĺž struny, ak struna nie je deformovaná. Pri veľmi malých deformáciach bude zrejme aj zmena T pozdĺž struny malá a preto ju zanedbáme. Sily ťahajúce konce vybraného kúsku sú teda rovnako veľké a odlišujú sa len smerom, akým pôsobia. Výslednica síl vo vertikálnom smere je preto

$$\begin{aligned} \mathrm{d}F_y &= T\sin(\alpha + \mathrm{d}\alpha) - T\sin\alpha \\ &= T\chi'(x + \mathrm{d}x) - T\chi'(x) \\ &= T\chi''(x)\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Z Newtonovho pohybového zákona máme $\mathrm{d}F_y = \mathrm{d}ma_y$, kde $\mathrm{d}m$ je hmotnosť kúsku struny $\mathrm{d}m = \rho S\mathrm{d}x$ a kde $a_y = \ddot{\chi}$ je jeho zrýchlenie vo zvislom smere. Dosadením za F_y dostávame

$$\begin{aligned} S\rho\ddot{\chi}(x,t)\mathrm{d}x &= T\chi''(x,t)\mathrm{d}x \\ \frac{\partial^2\chi(x,t)}{\partial t^2} &= \frac{T}{S\rho}\frac{\partial^2\chi(x,t)}{\partial x^2}. \end{aligned}$$

To je hľadaná vlnová rovnica. Ale prečo sa tak nazýva? *Vlnová* rovnica má popisovať *vlnu*, tj. profil pohybujúci sa určitou rýchlosťou v. V tomto prípade má teda výchylka χ závisieť od času a súradnice cez argument $(x \pm vt)$.[9] Derivovaním $\chi(x \pm vt)$ ľahko odvodíme[10]

$$\begin{aligned}\frac{\partial\chi}{\partial t} &= \pm v\frac{\partial\chi}{\partial x}\\ \frac{\partial^2\chi}{\partial t^2} &= v^2\frac{\partial^2\chi}{\partial x^2}.\end{aligned}$$

To znamená, že rovnica, ktorej riešením *je* pohybujúci sa profil (vlna), musí spĺňať práve odvodený vzťah. Preto sa uvedená rovnica volá vlnová,[11] hoci má aj množstvo iných riešení.[12]

Porovnaním dostávame

$$v = \sqrt{\frac{T}{S\rho}} = \sqrt{\frac{\sigma}{\rho}},$$

kde $\sigma = T/S$ štandardne označuje mechanické napätie v pascaloch.

Časť (b)

Na to, aby sa na strune mohla šíriť vlna, musí byť struna napnutá. Pnutie súvisí s predĺžením podľa Hookovho zákona

$$\sigma = \varepsilon E = \frac{\Delta L}{L}E,$$

kde E je zadaný Youngov modul pružnosti v ťahu.

Teraz prejdime k samotnej vlne. Pri základnej frekvencii platí $\lambda = 2L$. V prípade každej vlny sú (fázová) rýchlosť, frekvencia a vlnová dĺžka viazané vzťahom $v = \lambda f$.[13] Dosadením dostávame

$$f_0 = \frac{v}{2L} = \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{\varepsilon E}{\rho}}.$$

Aby sme boli v obraze, nájdime predĺženie potrebné k vylúdeniu komorného a, ktoré má frekvenciu $f_0 = 440\,\mathrm{Hz}$. Dostávame

$$\varepsilon = \frac{\rho}{E}\left(2f_0L\right)^2 \approx 0,018.$$

[9] Znamienko určuje smer pohybu vlny. Premyslite si, prečo voľba *mínus* znamená pohyb v kladnom smere osi x!

[10] Možno to derivovať napríklad ako zloženú funkciu, tj.

$$\begin{aligned}\frac{\partial\chi(x \pm vt)}{\partial x} &= \frac{\mathrm{d}\chi(x \pm vt)}{\mathrm{d}(x \pm vt)}\cdot\frac{\partial(x \pm vt)}{\partial x}\\ \frac{\partial\chi(x \pm vt)}{\partial t} &= \frac{\mathrm{d}\chi(x \pm vt)}{\mathrm{d}(x \pm vt)}\cdot\frac{\partial(x \pm vt)}{\partial t}.\end{aligned}$$

[11] Takéto pekné vysvetlenie ma naučil docent Martin Mojžiš, za čo som mu vďačný.

[12] Ľahko si môžete overiť princíp superpozície, tj. že ak $\chi_1(x \pm vt)$ a $\chi_2(c \pm vt)$ sú riešením istej vlnovej rovnice, tak aj $c_1\chi_1(x \pm vt) + c_2\chi_2(x \pm vt)$ je riešením tej istej vlnovej rovnice pre hocijaké $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

[13] Predstavme si sínusovú vlnu. Nech v istom bode struny sa v istý okamih nachádza vrch kopčeka. Vrch ďalšieho kopčeka sa sem dostane za čas $1/f$. Za ten istý čas sa prvý kopček stihol posunúť práve o vlnovú dĺžku λ. Jeho rýchlosť je teda $v = s/t = \lambda f$.

To znamená, že nami vybratá konkrétna struna je na naladenej gitare natiahnutá o 1,8% oproti svojej pôvodnej dĺžke.

Časť (c)

Zanedbávame rozťažnosť gitary, takže vlnová dĺžka základnej frekvencie ostáva rovnaká. Rýchlosť vlny sa zmení, pretože sa zmení napätie σ. Ochladením sa zrejme zväčší, preto nové napätie označíme ako $\sigma + \Delta\sigma$. Ako sa tým zmení základná frekvencia? Postupne upravujeme

$$\begin{aligned} f_0 + \Delta f &= \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{\sigma + \Delta\sigma}{\rho}} \\ &= \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{\sigma}{\rho}}\sqrt{1 + \frac{\Delta\sigma}{\sigma}} \\ &\approx \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{\sigma}{\rho}}\left(1 + \frac{\Delta\sigma}{2\sigma}\right) \\ \Delta f &= f_0 \frac{\Delta\sigma}{2\sigma}, \end{aligned}$$

kde sme v jednom kroku využili, že pre malé x platí $(1+x)^n \approx 1+nx$.[14]

V získanom vzťahu by sme radi videli hmatateľnejšie veličiny, než akési mechanické napätie a jeho zmenu. Mechanické napätie si vyjadrím pomocou f_0. Platí

$$\sigma = \rho\left(2f_0L\right)^2.$$

A ako sa vlastne pri ochladení zmení mechanické napätie? Aby sme určili $\Delta\sigma$, treba si uvedomiť, ako to s tými predĺženiami funguje.

Majme strunu, ktorá ma pri istej teplote a pri nulovom mechanickom napätí dĺžku L_0. Ak ju schladíme[15] o ΔT, skráti sa na $(1 - \alpha\Delta T)L_0$. Ak ju naťahujeme napätím σ, predlži sa na $(1 + \frac{\sigma}{E})L_0$. Ak predpokladáme, že koeficienty α a E sú pre malé natiahnutia a malé zmeny teploty konštantné, tak môžeme písať

$$\begin{aligned} L &= (1 - \alpha\Delta T)\left(1 + \tfrac{\sigma}{E}\right)L_0 \\ &\approx (1 - \alpha\Delta T + \tfrac{\sigma}{E})L_0, \end{aligned}$$

teda pri oboch efektoch súčasne platí pre predĺženie

$$\varepsilon = \tfrac{\sigma}{E} - \alpha\Delta T.$$

[14] Priamočiarejší postup cez derivácie je

$$\Delta f = \left.\frac{\partial f}{\partial\sigma}\right|_{f_0}\Delta\sigma = \frac{f_0}{2\sigma}\Delta\sigma.$$

[15] Schladíme.

Gitara, ktorá predstavuje akési neroztiahnuteľné médium, ponechá celkovú dĺžku struny po ochladení rovnakú, ako pred ochladením. Predĺženie ε sa teda ochladením nezmení. Ak ma zaujíma zmena mechanického napätia, dostávam rovnosť

$$\begin{aligned}\frac{\sigma}{E} &= \frac{\sigma + \Delta\sigma}{E} - \alpha\Delta T \\ \Delta\sigma &= E\alpha\Delta T.\end{aligned}$$

Po dosadení σ a $\Delta\sigma$ do vzťahu pre Δf dostávame po úprave

$$\frac{\Delta f}{\Delta T} = \frac{E\alpha}{8\rho f_0 L^2}.$$

V súlade so skúsenosťou gitaristov dostávame výsledok, že najviac sa zmení frekvencia pri malých hodnotách f_0, tzn. pri hlbokých tónoch.

POZNÁMKA 1: Rýchlosť šírenia vlny možno vždy vyjadriť v závislosti od lokálnych parametrov (v prípade priečnych vĺn struny to bolo mechanické napätie a hustota). Lokálnych parametrov väčšinou nie je veľa, preto možno rýchlosť šírenia vlny až na číselnú konsštantu veľmi rýchlo odvodiť z rozmerovej analýzy. Číselná konštanta je v drvivej väčšine prípadov rovná 1. Výnimkou je šírenie zvuku v plynoch, kde sa rovná odmocnine z Poissonovej konštanty κ.

POZNÁMKA 2: Je veľmi zaujímavé, že dva súčasne znejúce tóny znejú čisto, ak pomer ich frekvencií je zlomok malých celých čísel. Ladenie nástrojov v našich končinách je založené na tom, že pomer frekvencií poltónu, tj. dvoch najbližších kláves, je $1 : \sqrt[12]{2}$. Rozdiel n poltónov zodpovedá pomeru frekvencií $1 : \left(\sqrt[12]{2}\right)^n$. Jedna oktáva (12 poltónov) zodpovedá pomeru frekvencií $1 : 2$. Kvarte (5 poltónov) a kvitne (7 poltónov) zodpovedajú približne pomery frekvencií $3 : 4$, resp. $3 : 2$. To možno brať ako vysvetlenie, prečo znejú čistejšie než ostatné intervaly.

Zostaňme však pri čísle $\sqrt[12]{2}$. S jeho pomocou vieme zistiť, o aký počet N poltónov sa vlastne gitare pri ochladení rozladila. Ak predpokladáme malú zmenu frekvencie, tak máme

$$
\begin{aligned}
N &= \log_{\sqrt[12]{2}}\left(\frac{f_0+\Delta f}{f_0}\right) \\
&= \frac{\ln\left(1+\frac{\Delta f}{f_0}\right)}{\ln \sqrt[12]{2}} \\
&\approx \frac{12\Delta f}{f_0 \ln 2} \\
&= \frac{3E\alpha}{2\rho f_0^2 L^2 \ln 2}\Delta T.
\end{aligned}
$$

Ak si vezmeme frekvenciu najnižšej (82 Hz) a najvyššej (330 Hz) struny na gitare, ľahko dopočítame príslušné rozladenie $0,15$, resp. $0,0094$ poltónu na °C. V literatúre možno nájsť, že citlivosť ľudského ucha je asi $0,05$ poltónu. Chce to ale dobre nastražené uši. Najhrubšia struna sa rozladí o celý poltón pri ochladení o 7°C.

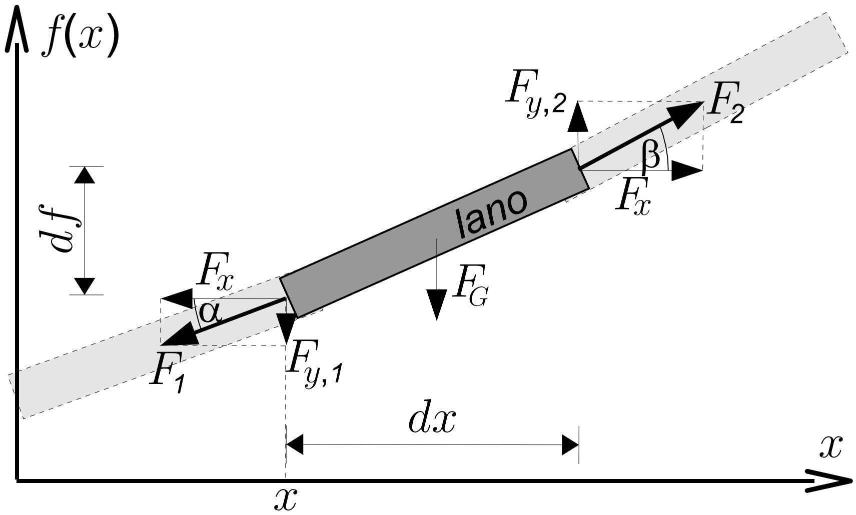
FX12 Inžinierina na via ferrate (Opravoval Jakub)

Máme oceľové lano dĺžky $L = 20\,m$, prierezu $S = 1\,cm^2$, s medzou pevnosti $\sigma_t = 1\,GPa$, hustotou $\varrho = 8000\,kg.m^{-3}$ a modulom pružnosti $E = 220\,GPa$. Má slúžiť na zaistenej ceste v horách (t.j. na via ferrate*) pre odvážneho feratistu na prelez ponad roklinu. Aby mohol byť takýto most uznaný bezpečným, tak napätie v lanách nesmie prekročiť 10-tinu medze pevnosti lana, ak je feratista s hmotnosťou $m = 80\,kg$ v strede lana. Určte, akú najširšiu roklinu vieme pomocou tohoto lana prekonať za dodržania predpisov! Straty hmotnosti feratistu v dôsledku fyziologických prejavov strachu môžete zanedbať.*

Nasledovný text obsahuje 2 prístupy k riešeniu tejto úlohy. Prvý sa dá nazvať analytický a druhý má pre FX nezvyčajnú experimentálnu povahu. V oboch prípadoch využijem označenie pre dĺžkovú hustotu lana $\lambda = S\varrho = 0,8\,\mathrm{kg.m^{-1}}$, pre hmotnosť lana samotného $M = L\lambda = 16\,\mathrm{kg}$ a označenie $F_{\max} = \frac{\sigma_t S}{10} = 10\,\mathrm{kN}$ pre maximálne prípustné napätie v lane. Taktiež v oboch prístupoch budem v prvom priblížení považovať lano za nenaťahovateľné, keďže relatívne natiahnutie pri maximálnej prípustnej záťaži je iba $\frac{\sigma_t}{10E} \approx 0,05\,\%$.

1. Analytické riešenie

Začnem odvodením rovnice pre ideálne nenaťahovateľné, dokonale ohybné lano umiestnené v homogénnom tiažovom poli v statickom prípade. Zavediem si do problému súradnice x a y, pričom x bude vo vodorovnom smere a y bude vo zvislom smere. Výška lano nad konkrétnym miestom bude daná funkciou $f(x)$. Vyberiem si kúsok lana, ktorého priemet do vodorovného smeru je $\mathrm{d}x$, viď obrázok.



Na tento kúsok pôsobia dokopy 3 sily, ktoré majú byť v statickej situácii v rovnováhe:

- tiažová sila o veľkosti $\mathrm{d}F_G = \lambda g\sqrt{(\mathrm{d}x)^2 + (\mathrm{d}f)^2} = \lambda g\sqrt{1 + f'^2(x)}\ \mathrm{d}x$ pôsobí v zvislom smere nadol[16],
- ťahová sila lana zľava pôsobí na lano zvislou zložkou $F_{y,1}$ nadol a vodorovnou zložkou F_x doľava,
- ťahová sila lana sprava pôsobí na lano zvislou zložkou $F_{y,2}$ nahor a vodorovnou zložkou F_x doprava[17].

Keďže naše lano je dokonale ohybné, tak smer napätia v lane musí byť v každom mieste dotyčnicou k lanu samotnému. Vďaka tomu dostávame vzťahy

$$\frac{F_{y,1}}{F_x} = \tan\alpha = f'(x),$$
$$\frac{F_{y,2}}{F_x} = \tan\beta = f'(x + \mathrm{d}x) = f'(x) + [f'(x)]'\ \mathrm{d}x = f'(x) + f''(x)\ \mathrm{d}x.$$

Keď teraz zapíšeme podmienku pre rovnováhu nášho vybraného kúsku ohľadom zvislých zložiek pôsobiacich síl, tak dostaneme hľadanú rovnicu

$$\lambda g\sqrt{1 + f'^2(x)}\ \mathrm{d}x = F_{y,2} - F_{y,1},$$

[16] Používame označenie pre deriváciu čiarkou, teda $f'(x) = \frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}$.

[17] Sledovaný kúsok lana má byť v rovnováhe, preto musia byť v rovnováhe aj vodorovné zložky pôsobiacich síl, preto sú obe vodorovné zložky napätia v lane rovnaké. To je aj dôvod, prečo je vodorovná zložka napätia rovnaká pozdĺž celého lana.

$$\frac{\lambda g}{F_x}\sqrt{1+f'^2(x)} = f''(x). \tag{1}$$

Táto rovnica je nelineárna diferenciálna rovnica prvého rádu pre neznámu funkciu $f'(x) \overset{\text{ozn.}}{=} \varphi(x)$. Môžeme ju riešiť separáciou, čiže oddelením členov závislých od x a od φ,

$$\frac{\lambda g}{F_x}\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\sqrt{1+\varphi^2}}$$

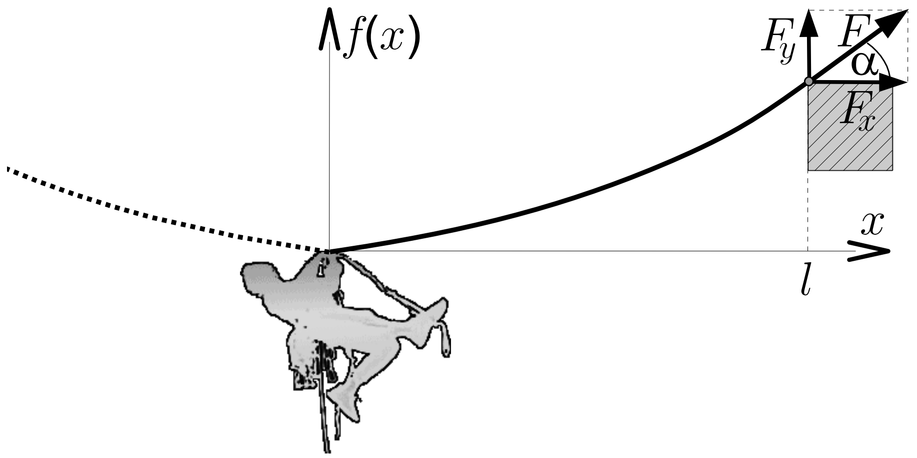
a následovnou integráciou. Ide o technikalitu. Ľahko sa však overí[18], že rovnicu spĺňa riešenie $f(x) = A\cosh\frac{x-x_0}{B} + h_0$, ak platí $A = B = \frac{F_x}{\lambda g}$.[19] Máme teda riešenie

$$f(x) = \frac{F_x}{\lambda g}\cosh\left[\frac{\lambda g}{F_x}(x-x_0)\right] + h_0,$$

$$f'(x) = \sinh\left[\frac{\lambda g}{F_x}(x-x_0)\right] \qquad \Rightarrow \qquad \sqrt{1+f'^2(x)} = \cosh\left[\frac{\lambda g}{F_x}(x-x_0)\right],$$

$$f''(x) = \frac{\lambda g}{F_x}\cosh\left[\frac{\lambda g}{F_x}(x-x_0)\right].$$

Je na čase urobiť si náčrt situácie, aby sme mohli určiť okrajové podmienky pre naše všeobecné riešenie. Zrejme bude situácia symetrická ohľadom bodu v strede lana. Stačí nám preto nájsť riešenie pre vybranú polovicu lana[20]. Zo symetrie je zrejmé, že aj zaťaženie bude symetrické a teda každá polovica lana „nesie“ polovicu feratistu.



[18]Napodiv, po jednom doriešení tejto úlohy sa ten výsledok ľahko aj zapamätá – tak to bolo aj v mojom prípade. Čiže, homogénne ideálne laná visia vždy ako nejako posunutý a ponaťahovaný cosh.

[19]Malá exkurzia do sveta hyperbolických a k nim inverzným funkciám

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \qquad \frac{\mathrm{d}\cosh x}{\mathrm{d}x} = \sinh x, \qquad \cosh^{-1} x \overset{\text{ozn.}}{=} \operatorname{arccosh} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right),$$

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \qquad \frac{\mathrm{d}\sinh x}{\mathrm{d}x} = \cosh x, \qquad \sinh^{-1} x \overset{\text{ozn.}}{=} \operatorname{arcsinh} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right),$$

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}, \qquad \frac{\mathrm{d}\tanh x}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{\cosh^2 x}, \qquad \tanh^{-1} x \overset{\text{ozn.}}{=} \operatorname{arctanh} x = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$$

a pridám ešte univerzálnu identitu pre hyperbolické funkcie $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$.

[20]Zvolili sme si pravú časť, viď obrázok.

Prvá podmienka na lano bude, aby v strede – v mieste zavesenia odvážlivca – bola zvislá zložka napätia vo vybranej časti rovná polovici tiaže visiaceho, čo zapíšeme

$$f'(0) = -\sinh\frac{\lambda g x_0}{F_x} = \frac{mg}{2F_x}. \tag{2}$$

Druhá podmienka na lano bude, aby zvislá zložka napätia v bode uchytenia bola rovná polovici celkovej zavesenej tiaže, teda

$$f'(l) = \sinh\frac{\lambda g(l - x_0)}{F_x} = \frac{(m+M)g}{2F_x}. \tag{3}$$

Ďalšiu podmienku nám diktuje zadanie, totiž, že maximálne napätie v lane nesmie prekročiť hodnotu $\frac{F_{\max}}{10}$. Keďže vodorovná zložka napätia v lane je vo všetkých miestach rovnaká a zvislá je v mieste x rovná polovici tiaži lana visiaceho v intervale $(-x, x)$ a feratistu[21], tak je očividné, že najvyššie zaťaženie bude v lane pri úchytoch do stien rokliny. Taktiež je intuitívne jasné, že vyššia hodnota F_x znamená väčšie našponovanie lana a tým menší previs lana voči úchytom a s tým aj väčšiu možnú šírku roklinu, ktorú preklenie. V zmysle určenia maximálnej prípustnej šírky rokliny teda budeme žiadať

$$F_x\sqrt{1 + f'^2(l)} = \frac{F_{\max}}{10}. \tag{4}$$

Využitím podmienky (3) vieme z (4) získať vzťah

$$F_x = \sqrt{\frac{F_{\max}^2}{10^2} - \frac{(m+M)^2g^2}{4}}.$$

Použitím v (2) vieme vypočítať[22]

$$x_0 = -\frac{F_x}{\lambda g}\operatorname{arcsinh}\frac{mg}{2F_x}.$$

Nakoniec potom už vieme aj vyjadriť aj l

$$l = \frac{F_x}{\lambda g}\operatorname{arcsinh}\frac{(m+M)g}{2F_x} + x_0.$$

Pre hodnoty zo zadania dostávame $F_x \approx 9{,}9889\,\mathrm{kN}$; $x_0 \approx -49{,}987\,\mathrm{m}$; $l \approx 9{,}991\,\mathrm{m}$. Teraz si môžeme všimnúť, že napätie v lane je prakticky po celej dĺžke zhruba $\frac{F_{\max}}{10} = 10\,\mathrm{kN}$ a teda v druhom priblížení je lano dĺžky $L' = L(1 + \frac{\sigma_t}{10E}) \approx 20{,}009\,\mathrm{m}$, potom má dĺžkovú hustotu

[21] To sa dá vidieť z toho, keď človek zoberie lano v intervale $(-x, x)$ aj s feratistom, požaduje symetriu voči $x = 0$ a žiada statickú situáciu.

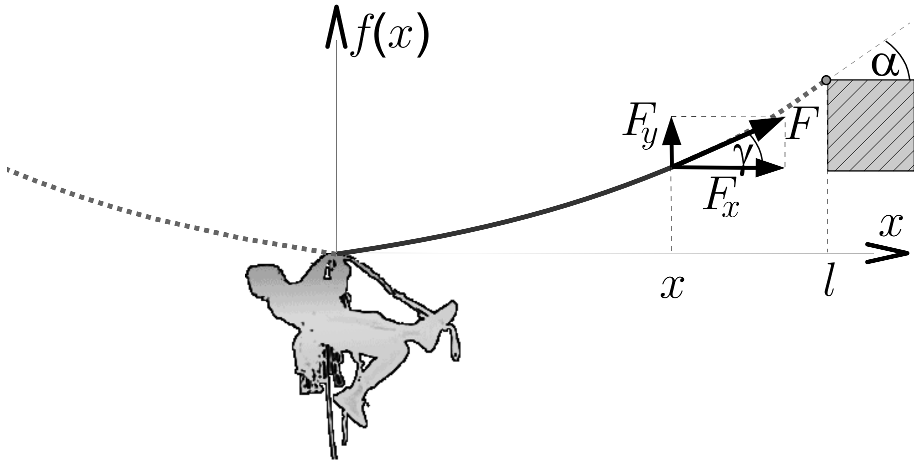
[22] Vyjadrenie pomocou zadaných veličín nechám na D.Ú.

$\lambda' = \frac{M}{L'} \approx 0,7996\,\mathrm{kg.m^{-1}}$ a po dopočítaní vyjde maximálna šírka rokliny, ktorú to môže preklenúť $2l' \approx 19,990\,\mathrm{m}$.

2. experimentálne riešenie

Hneď na úvod by som napísal, že toto riešenie nebude priamo experimentálne merať výsledok, lež pôjdeme na to trochu okľukou. Najmä by sme boli radi, keby sme celý experiment mohli nejako zmenšiť a urobiť pohodlne doma, a pokiaľ možno nie s oceľovým lanom požadovaného prierezu, lebo také sa bežne v domácnosti nevyskytujú. Riešenie bude založené na postupe zvanom *škálovanie.*

Začneme s priblížením nenaťahovateľného lana. Premyslite si, že vodorovná zložka napätia v lane musí byť pozdĺž celého lana rovnaká!



Analyzujme sily pôsobiace na kus lana s visiacim ujom v intervale $(-x, x)$. Využijeme symetriu úlohy voči stredu lana a zapíšeme rovnicu, ktorá popisuje lano v statickej situácii a je veľmi intuitívna. Využijeme, že zvislé zložky síl pôsobiacich na lezca a vybraný kus lana musia byť v rovnováhe

$$f'(x) = \tan\gamma = \frac{F_y}{F_x} = \frac{\frac{m}{2} + \lambda\, d(x)}{F_x}\, g,$$

$$f'(x) = \frac{\frac{m}{2} + \lambda\, d(x)}{F_x}\, g \qquad \text{pre } \forall x \in [0, l], \tag{5}$$

kde $d(x) = \displaystyle\int_0^x \sqrt{1 + f'^2(y)}\, \mathrm{d}y$ je dĺžka lana v intervale (0, x).

Táto rovnica je integrálna, lebo do nej vstupuje cez $d(x)$ integrál obsahujúci neznámu funkciu $f'(x)$. Rovnica (5) je ekvivalentná rovnici (1) s okrajovými podmienkami (2) a (3). Rozdiel je len v tom, že táto rovnica má jasnú interpretáciu, lebo je zapísaná pre predstaviteľne veľké teleso, kdežto rovnica (1) popisuje infinitenzimálny kúsok lana. Hrajme sa však, že sme časť 1 nečítali[23] a riešenie nepoznáme.

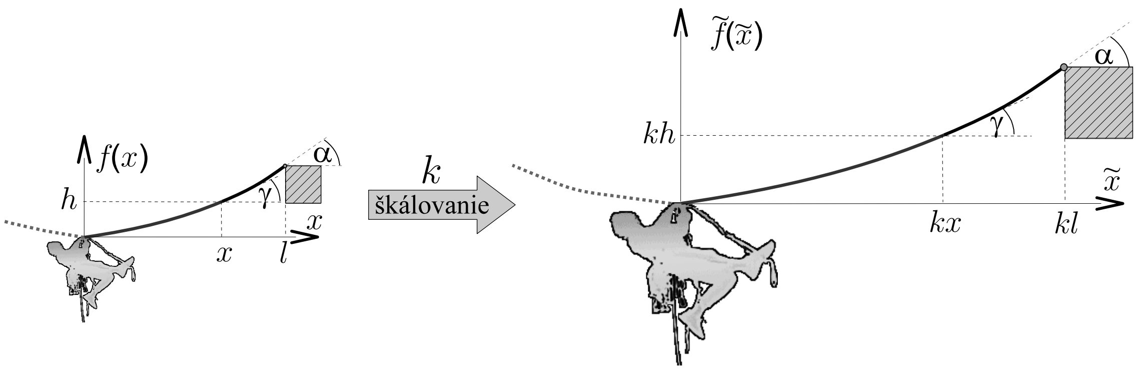
Túto rovnicu musí nutne spĺňať aj oceľové lano s feratistom preklenujúce roklinu pri maximálnom povolenom zaťažení. Maximálne zaťaženie je jednoznačne určené podmienkou pre uhol α pri úchyte

$$\sin\alpha = \frac{F_y(l)}{\sqrt{F_x^2(l)+F_y^2(l)}} = \frac{\frac{m+M}{2}\,g}{\frac{F_{\max}}{10}} = 5\,\frac{m+M}{F_{\max}}\,g. \tag{6}$$

Označme riešenie rovnice (5) s podmienkou pre maximálne zaťaženie (6) ako $f(x)$.

Teraz využijeme ideu škálovania. Poďme zistiť, či nám samotná existencia riešenia $f(x)$ rovnice (5) s podmienkou (6) nezabezpečuje existenciu iných podobných riešení. Skúsme hľadať skutočne geometricky podobné riešenia – konkrétne k-krát zväčšené, t.j. riešenie v tvare

$$\begin{aligned}
\tilde{f}(x) &= kf\left(\frac{x}{k}\right),\\
\tilde{f}'(x) &= f'\left(\frac{x}{k}\right),\\
\tilde{L} &= kL,\ \tilde{l} = kl,\\
\tilde{d}(x) &= k\,d\left(\frac{x}{k}\right)
\end{aligned}$$



pre nejako preškálované parametre

$$\begin{aligned}
\tilde{m} &= Am,\\
\tilde{\lambda} &= B\lambda,\\
\tilde{M} &= \lambda' L' = BkM,\\
\tilde{g} &= g,\\
\tilde{F}_x &= CF_x.
\end{aligned}$$

[23]A ak sme ju náhodou čítali, tak sa tvárme, že sme ju buď nepochopili alebo sme ju razom stihli zabudnúť.

Pri výbere $A = C$ a $C = Bk$ bude funkcia $\tilde{f}(x)$ spĺňať rovnicu (5), lebo platí

$$\begin{aligned}\tilde{f}'(x) = f'\left(\frac{x}{k}\right) &\overset{(5)}{=} \frac{mg}{2F_x} + \frac{\lambda g\, d\left(\frac{x}{k}\right)}{F_x}\\ &= \frac{\tilde{m}\tilde{g}}{2\tilde{F}_x} + \frac{\tilde{\lambda}\tilde{g}\, \tilde{d}(x)}{\tilde{F}_x} \qquad \text{pre } \forall x \in [0, \tilde{l}].\end{aligned}$$

Preškálované riešenie isteže spĺňa podmienku (6), keďže ide o geometricky podobné riešenie. Škálovacia podmienka $C = Bk$ nám fixuje pomer medzi hmotnosťou visiaceho a hmotnosťou lana, je ekvivalentná podmienke $\frac{m}{M} = \frac{\tilde{m}}{\tilde{M}}$. Druhá škálovacia podmienka $A = C$ vypovedá o tom, že sily sa musia škálovať rovnako ako zavesené hmotnosti, čo je pri geometricky podobnom riešení evidentné.

Zoberme lanko nejakej dĺžky, povedzme nech to je $\tilde{L} = kL$.[24] Hmotnosť lanka označím $\tilde{M} = BkM$.[25] Ďalej si zoberiem závažie o hmotnosti $\tilde{m} = Bkm$ a dám ho do stredu lanka. Ďalej natiahnem lanko tak, aby úchyty boli v rovnakej výške a aby uhol, ktorý zviera dotyčnica lanka s horizontálnym smerom, bol rovný α podľa podmienky (6). Potom určite existuje riešenie nášho problému zo zadaniu, len príslušne (k-násobne) zmenšené.[26] Potom mi stačí zmerať vzdialenosť úchytov a predeliť ho k-čkom a mám odpoveď.

Tu by sa patrilo ešte overiť, že riešenie je jediné a teda sme našli to správne. Skúsim to aspoň fyzikálne odargumentovať. Pokúsme sa urobiť nasledovný myšlienkový experiment: budeme hľadať riešenie tvaru lana vychádzajúc od závažia v strede. Vieme, že situácia bude symetrická. Zvoľme si nejakú veľkosť horizontálneho napätia F_x v lane. Potom pridávajme na obe strany od závažia postupne maličké kúsky lana. Ich smer už je veľkosťou F_x daný, lebo sila pôsobiaca na už uložené časti musí byť v smere pridaného kúsku a veľkosť zvislej zložky napätia je fixovaná už uloženými objektami. Takto viem skonštruovať virtuálne celé riešenie tvaru lana. Je jasné, že pre väčšie F_x bude uhol, ktorý zviera lano s horizontálou, v každom mieste vo vzdialenosti $d(x)$ pozdĺž lana od závažia menší ako pre menšie F_x. Preto bude dĺžka, ktorú lano preklenuje dlhšia ako pre menšie F_x. Toto nám jasne ukazuje, že šírka rokliny, ktorú lano preklenie rastie s rastúcim F_x, čo je aj intuitívne. Teda existuje práve jedno riešenie našej úlohy pre fixovaný uhol α, cez ktorý je fixované napätie F_x a teda aj šírka rokliny $2l$.

[24] Tým sme vybrali a zafixovali koeficient podobnosti k.
[25] Týmto sme dourčili všetky voľné parametre škálovania.
[26] Naše k bude číslo menšie ako 1, nenechajte sa zmiasť.

Realizácia: Zoberiem si špagát vhodnej dĺžky $\tilde{L}$ pre domáce meranie. Aby som nemusel vážiť ľahký špagát nepresnými kuchynskými váhami, tak si závažie urobím zo špagátu, ktorého dĺžka je $\frac{m}{M}\tilde{L}$ a tento prevesím cez stred. Potom si urobím 2 úchyty v rovnakej výške tak, aby sa aspoň s jedným dalo hýbať k/od druhého. Ešte si zhotovím nejaký slušne veľký trojuholník s požadovaním uhlom $\alpha = \arcsin\left(5\frac{m+M}{F_{\max}}\,g\right)$ a snažím sa nastaviť vzdialenosť úchytov tak, aby dotyčnica pri jednom z úchytov bola práve α. Keď sa mi to podarí, tak si odmeriam vzdialenosť $\tilde{l}$ medzi úchytmi a dĺžku lanka $\tilde{L}$ a mám odpoveď na otázku zo zadania: $l = \frac{L}{\tilde{L}}\,\tilde{l}$. Teda, aspoň teoreticky. Toto meranie bude zaťažené chybou a tú by bolo vhodné odhadnúť. Pokus som nerealizoval.