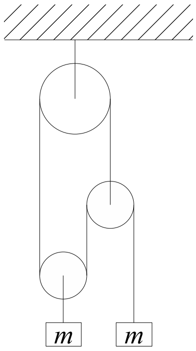
powered by FKS

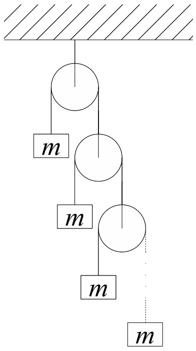
FX [f:ks]

Vzorové riešenia a výsledky 5. série 4. ročníka

FX13 Kladky (Opravoval Bzdušo)

Tinka našla v pivnici obrovskú kopu lana a kladiek, preto sa rozhodla postaviť si kladkostroj. Ba dokonca dva! Jeden krajší ako druhý, ako to vidno na obrázkoch. Aké budú zrýchlenia jednotlivých telies po uvoľnení kladiek? Hmotnosti všetkých kladiek i lana sú zanedbateľné, počet kladiek na pravom obrázku považujte za nekonečne veľký.





Ľaľa. Kladky. A aby ich nebolo málo, tak hneď nekonečne veľa. Pre začiatok si však dajme prízemnejšie ciele – Zhrnieme si, ako tá fyzika *naozaj* vyzerá, keď je kladiek málo (napríklad jedna):

- Lano voľne natiahnuté medzi kladkami, resp. medzi kladkou a závažím je po celej svojej dĺžke napínané rovnakou ťahovou silou.

  Prečo? Uvažujme kúsok lana malej dĺžky. Na hornom konci je ťahané ťahovou silou T nahor, na dolnom silou $T + \mathrm{d}T$ nadol. Rozdiel týchto síl spolu s tiažovou silou udelia kúsku špagátu s hmotnosťou $\mathrm{d}m$ zrýchlenie $a \approx g$.[1] Z Newtonovho zákona máme $\mathrm{d}T = \mathrm{d}m(g \pm a) \approx \mathrm{d}mg$. Vrámci lana sa teda *síce* ťahová sila mení, *ale* rádovo len o tiaž lana. Kladkostroje dvíhajú ťažké bremená, takže pôsobia rádovo väčšími silami, než je tiaž lana. Malé zmeny možno zanedbať.

- Súčet síl pôsobiacich na *nehmotnú* kladku je 0 (nula) a to aj v prípade visiacej (nie pevne uchytenej) kladky.

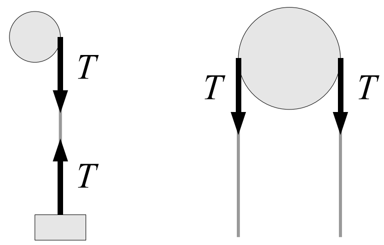
  Dôvod je podobný a platnosť rovnako (ne)presná: Za bežných okolností je tiaž kladky veľmi malá v porovnaní s pôsobiacimi

[1] *Rádovo!* V reálnych kladkostrojoch dosahujú lana a závažia zrýchlenia od 0 po niekoľko málo g.

silami. Nerovnováha týchto síl by podľa $a = \Delta F/m_0$ viedla k obrovským zrýchleniam. Tie by však mali byť „rozumne malé“.[2] V limite $m_0 \to 0$ musí nutne $\Delta F \to 0$.

- Lano prehodené cez *nehmotnú* kladku je napínané rovnakou silou na oboch stranách kladky.

Rozdiel vo veľkosti týchto síl ΔT by viedol k uhlovému zrýchleniu kladky $\varepsilon = R\Delta T/I_0$ (tu R je polomer kladky). Musí však nadobúdať „rozumne malé hodnoty“ ($\approx g/R$) a preto pre $I_0 \to 0$ musí aj $\Delta T \to 0$. V praxi väčšinou, naozaj, $\Delta T \ll T$.[3]



Zbrane nabité, vojská rozostavené. Ideme bojovať!

Časť (a)

Označme si jednu z ťahových síl ako T. Nech je to napr. tá, ktorá pôsobí na pravé teleso *nahor*. Keďže sú kladky nehmotné, tak ťah v lane musí byť rovnaký na oboch stranách každej jednej. Tak dostávame nasledujúci obrázok (všetky šípky sú rovnako veľké):

---

[2] Špeciálne pre upevnenú kladku nulové! Vtedy rovnosť platí tvrdenie platí automaticky.

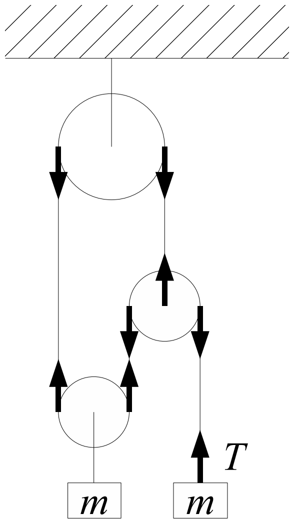
[3] Samozrejme, je to len také mávanie rukami vo vetre. Môj kamarát Bus raz povedal Kubusovi toto: „*Kubík, všimol si si niekedy že každý fyzikálny dôkaz je taký nedôveryhodný, že sa vždy uvádza aspoň s jedným konkrétnym príkladom pre nejaký úplne triviálny špeciálny prípad? Dokonca v prípade, že dokazované tvrdenie neplatí sa pre istotu uvedú dva úplne rozličné dôkazy.*“ Preto si skúste zrátať tento úplne triviálny špeciálny prípad:

Cez otáčavú kladku je prehodené lano, na ktorého koncoch sú zavesené závažia s hmotnosťami m_1, m_2. Moment zotrvačnosti kladky je I_0, jej polomer R. Vypočítajte, čo sa len dá. – Z troch rovníc (Newtonov zákon pre obe telesá + momentová veta pre kladku) s troma neznámymi (ťahové sily $T_{1,2}$ v lanách + zrýchlenie sústavy a) určíme všetko možné, špeciálne aj

$$T_1 - T_2 = g\frac{(m_1 - m_2)\, I_0}{(m_1 + m_2)\, R^2 + I_0},$$

čo ide naozaj do nuly v limite $I_0 \to 0$ a čo dáva nenulovú hodnotu jej uhlového zrýchlenia

$$\varepsilon = \frac{(T_1 - T_2)\, R}{I_0} = g\frac{(m_1 - m_2)\, R}{(m_1 + m_2)\, R^2 + I_0}.$$



Skôr, než začneme zapisovať pohybové rovnice, si však všimnime sily pôsobiace na pravú kladku. Nahor ju ťahá sila T, nadol $2T$. Avšak, ako sme si povedali vyššie, súčet síl pôsobiacich na kladku je rovný nule. Preto nutne $T = 0$. Nič netreba riešiť, obe závažia budú padať voľným pádom.

Vážne? Neupadli sme slepo do nesprávnych dadaistických úvah? *Nie, neupadli!* Ak uvažujeme, že telesá sú rádovo ťažšie ako kladky, tak je to naozaj tak. Finta je v tom, že telesá „vlastne“ vôbec nie sú uchytené. Ak si predstavíme hmotnosť ľavého telesa sústredenú v kladke nad ním, tak táto kladka a druhé teleso sa snažia padať voľným pádom. *Bráni im v tom niečo?* Nebráni! Všimnite si, že posunutím pravej kladky nadol o x sa uvoľní x špagátu (dole odbudne $2x$ a hore pribudne x), ktorý sa môže využiť na klesnutie závaží. Hmotnosť kladky je zanedbateľná, takže pohybu telies sa poddá. Takto to bude, až kým sa dolné dve kladky nezrazia a pravá kladka už nebude môcť dalej klesať. Nie je v tom žiadny spor – To len zdravému sedliackemu rozumu sa niečo nepozdáva. Zrejme je to tým, že „kolabujúce“ kladkostroje sa *zámerne* nestavajú.[4]

Časť (b)

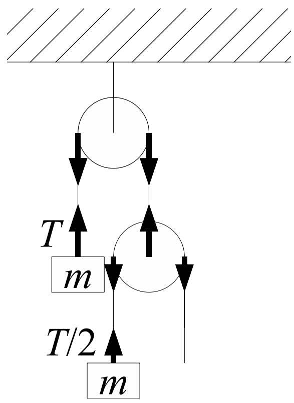
Než sa pustíme do samotného riešenia, urobíme jednu astrálnu úvahu: Predstavte si, že máte doma na povale (tj. v gravitačnom poli g) kladkostroj (hocijako komplikovaný). Teoreticky alebo experimentálne určíte zrýchlenia všetkých telies a ťahové sily vo všetkých lanách. Vzápätí sa presuniete na inú planétu[5] s gravitačným poľom ηg a postavíte tam rovnaký kladkostroj s rovnakými závažiami. *Aké budú nové zrýchlenia a nové ťahové sily?*

[4] A ako ukazuje tento príklad, postaviť sa *dajú*.
[5] Preto hovoríme o astrálnej úvahe.

Skúsenosť ukazuje, že všetky sily a zrýchlenia na kladkách sú priamoúmerné tiažovému zrýchleniu. [6] Nové ťahové sily a zrýchlenia teda stačí prenásobiť bezrozmerným η a *to* sa bude diať. Predsalen som však trochu zavádzal, keď som povedal že úvaha je astrálna. V skutočnosti je celkom prízemná a to opäť doslovne, pretože ju možno realizovať aj v zrýchľujúcom výťahu. Tu zrejme stačí spraviť zámenu $g \to g \pm a$.

Vráťme sa ku kladkostroju v zadaní. Na ľavej strane najhornejšej kladky je závažie m. Na pravej strane je... ale veď to je ten istý kladkostroj! Áno, má o jednu kladku menej, ale to je nekonečne malá (= nijaká) zmena.[7] Ak všetky kladky okrem prvej zavriem do jednej veľkej krabice, vyrobil som si spomínaný výťah, v ktorom namiesto g pociťujem $g + a$, kde a je zrýchlenie prvého telesa *nadol*.

Dva rovnaké kladkostroje. Jeden zavesený v gravitačnom poli – cíti g, druhý padá v gravitačnom poli, cíti $g+a$. Vieme, že podiel ťahových síl v príslušných lanách kladkostrojov bude $g/g+a$. *Ale ten vieme určiť!* Vezmime si napríklad ťahové sily v lanách pôsobiace na prvé a druhé závažie. Ľahko prídeme k nasledujúcemu obrázku:



Tadááá. Musí platiť:

$$\begin{aligned} \frac{T}{T/2} &= \frac{g}{g+a} \qquad (1) \\ a &= -g/2 \end{aligned}$$

Prvé teleso sa teda pohybuje nahor so zrýchlením $g/2$. Zrýchlenia ostatných telies dopočítame analogicky. Ak sa pohráme s geometrickými radmi, zrýchlenie n-tého závažia v smere nadol dostaneme ako

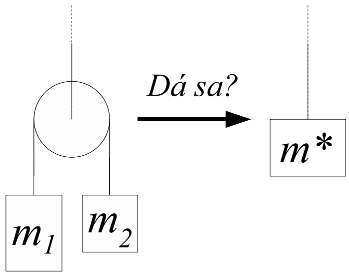
$$a_n = \frac{2^n - 3}{2^n} g.$$

[6] Argumentov je viacero, uvediem jeden rozmerový: Ak máme na počítanie k dispozícii veľa hmotností a jedno g, zrýchlenie možno vyrátať *len* ako g krát bezrozmerný faktor (tj. nejaký podiel hmotností). Pre sily zasa $\mathbf{F}_i = m_i \mathbf{a}_i$, čo je lineárne závislé na g ako dôsledok lineárnej závislosti pre všetky zrýchlenia.

[7] Matematici by ma po prečítaní tejto vety mohli zavesiť na hák. Pri použití slova nekonečno vo fyzike si v skutočnosti treba predstaviť reálnu situáciu so všeobecnými hodnotami a potom spraviť limitu.

Alternatívne riešenie časti (b)

Ukážeme si trik, vďaka ktorému pre nás už väčšina príkladov s veľa kladkami nikdy nebude problém. Už sme spomenuli, že všetky ťahové sily v lanách sú priamo úmerné „pociťovanému zrýchleniu“ g. Položme si básnickú otázku: „*Možno hocikde v kladkostorji kladku so závažiami nahradiť jedným závažím?*“ Aby bolo jasné, čo tým chcel básnik povedať, chcel tým povedať toto:



Keďže som zlý básnik, odpoveď vám prezradím hneď: *Dá.* Uvažujme najprv situáciu, kde je kladka upevnená k stropu (tj. pociťuje g). Lano, ktoré ju na strope drží, bude pri tom napínane nejakou silu T^*, ktorá sa musí dať zapísať ako m^*g. Poďme nájsť, čomu je rovné m^*.

Ak označíme zrýchlenie závaží a a napätie v dolnom lane ako T, dostávame sústavu rovníc

$$\begin{aligned} m_1 a &= m_1 g - T \\ -m_2 a &= m_2 g - T \end{aligned}$$

s riešením

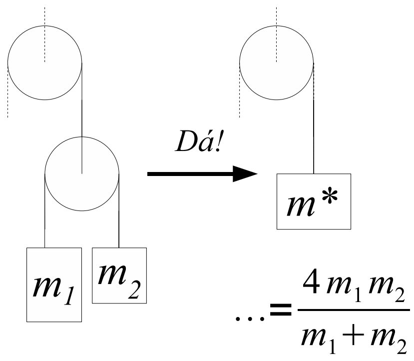
$$\begin{aligned} a &= \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} g \\ T &= \frac{2 m_1 m_2}{m_1 + m_2} g. \end{aligned} \tag{2}$$

Z rovnováhy síl ďalej $T^* = 2T$, takže dostávame

$$m* = \frac{4 m_1 m_2}{m_1 + m_2}.$$

To však ešte nie je úžasné. *Úžasná* je až skutočnosť, že keby táto kladka bola zavesená vo výťahu alebo by padala na nejakej inej kladke, takže celá sústava by pociťovala nejaké iné g, zámenu možno *znova* urobiť, pretože sila T^* nám vyšla priamo úmerná g.[8] Môžeme teda zakresliť našu spokojnosť!

[8] Inak to ani nemohlo vyjsť!



Vráťme sa k nekonečne veľa kladkám v zadaní. Každej z nich možno prisúdiť nejakú hmotnosť $m*$. Všetky kladky sú však identické, musí teda platiť

$$m^* = \frac{4mm^*}{m + m^*},$$

čo je po roznásobení kvadratická rovnica s dvoma riešeniami

$$m^* = 3m \qquad \text{alebo} \qquad m^* = 0.$$

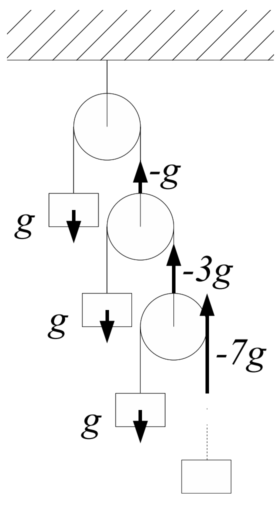
Nekonečne veľa kladiek si možno predstaviť ako jednu kladku, ktorá má naľavo závažie m a napravo závažie m^*. Z rovnice (2) dostávame pre zrýchlenie najvyššieho závažia

$$a = -\frac{g}{2}, \qquad \text{resp.} \qquad a = g.$$

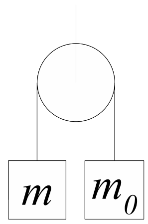
Radosť však strieda zmätenie. Máme dva výsleky. Mimochodom, ak sa dobre zahladíme na rovnicu (1) z predošlého postupu, tak aj ona má skutočne riešenie $a = -g$, pokiaľ $T = 0$. Aby to bolo vidno, stačí roznásobiť na

$$T(g - a) = \frac{T}{2}g.$$

Toto riešenie je celkom zmysluplné. Zrýchlenia jednotlivých telies v ňom vyzerajú nasledovne:



Dve riešenia. V *skutočnosti* sa môže diať *len jedno* z nich. Problém je v našom nedôslednom používaní slova *nekonečno*. Každý fyzikálny problém, treba zadefinovať pre konečné veličiny a až vzápätí spravíme limitu s nekonečnom. Pod konečnou situáciou si predstavíme takú, ktorá obsahuje N kladiek, pričom posledná je zakončená nejako takto:



Podľa zadania $m_0 = m$, ale budeme pracovať so všeobecným m_0, aby sme pochopili, *kde* je problém. Ak použijeme našu fintu s m^*, môžeme kladky zospodu postupne nahradzovať závažiami. Dolnú kladku ľahko nahradíme hmotnosťou

$$m_1^* = \frac{4mm_0}{m + m_0}$$

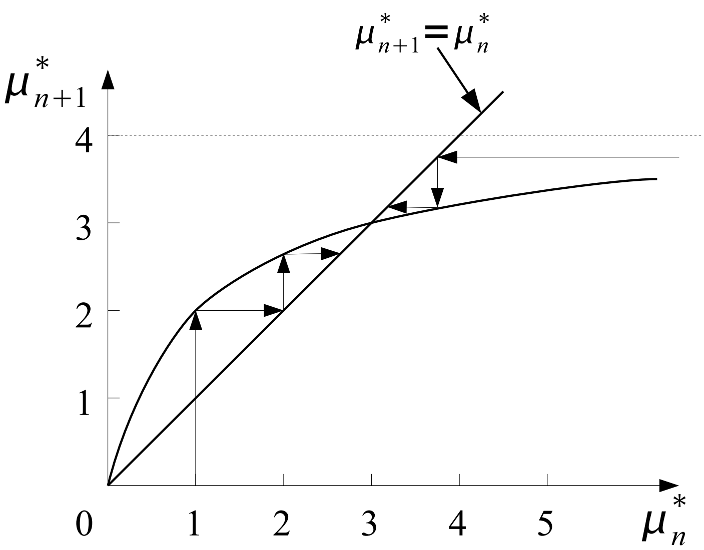
a pre vyššie kladky platí

$$m_{n+1}^* = \frac{4mm_n^*}{m + m_n^*},$$

kde n označuje poradie kladky počítajúc zdola. Pekný rekurentný vzťah. Nás zaujímajú jeho konvergentné vlastnosti. Pre lepšiu prehľadnosť zaveďme $\mu_n^* = m_n^*/m$, teda hmotnosť m_n^* počítaná v jednotkách m. Rekurentný vzťah ľahko upravíme na

$$\mu_{n+1}^* = 4 - \frac{4}{1 + \mu_n^*},$$

čiže ide o hyperbolu. Zakreslíme si jej časť v kladných číslach graficky:

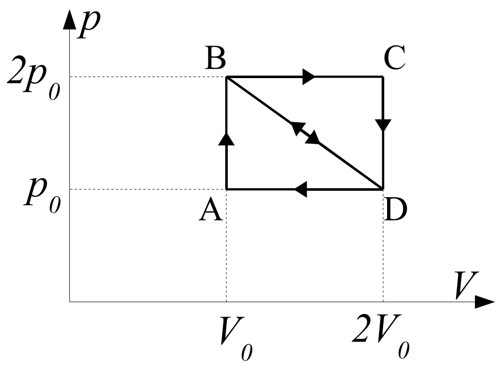


Vidíme, že pre všetky $m_0 > 0$ konverguje $m^* \to 3m$. Jediný prípad, kedy rad konverguje k nule je pre $m_0 = 0$, tj pre voľný špagát. Aj ten však má v skutočnosti nepatrnú kladnú hmotnosť,[9] takže správnym riešením je skutočne

$$a = -\frac{g}{2}.$$

FX14 Kompost (Opravoval Jakub)

Judita sa rozhodla využiť teplo kompostoviska vo svojej záhradke na dobročinné účely. S tým zámerom si postavila dva vratné stroje periodicky pracujúce podľa dejov ABD a BCD. Pracovnou látkou je vzduch, pretože je lacný. Aký je pomer účinností týchto dejov?



Zdravím pekne všetkých náhodných čitateľov. Účinnosť cyklického deja s plynom je definová ako podiel vykonanej mechanickej práce a dodaného teplo. Táto definícia má hlavu a pätu, ale je dobré mať na zreteli, že je to len otázka dohody. V našom prípade je to zrejme to najrozumnejšie, čo sa dá vymyslieť.

Vzduch budem pre naše počtárske účely považovať za ideálny plyn s počtom stupňov voľnosti $s = 5$, lebo je dominantne zložený z 2-atómových molekúl N_2, resp. O_2.[10] Teda pri ohriatí o ΔT vnútorná energia plynu stúpne o $\frac{s}{2}Nk\Delta T$, kde k je Boltzmannova konštanta a N je počet molekúl. Pre ideálny plyn platí stavová rovnica $pV = NkT$. Deje budem považovať za vratné, resp. kvázistacionárne, t.j. také, pre ktoré platí, že intenzívne veličiny (tlak, teplota) sú vo všetkých miestach plynu a v každom čase rovnaké ako v stacionárnom prípade.[11]

Očividne, práca, ktorú oba stroje vykonajú pri 1 cykle, je pre oba stroje rovnaká, konkrétne $\frac{p_0 V_0}{2}$. Na určenie pomeru účinností nám ostáva už iba zistiť množstvo dodaného tepla pri jednom a druhom cykle.

[9] o hmotnosti nekonečne veľa nehmotných kladiek ani nehovoriac…
[10] Toto skutočne nie je reklama na mobilného operátora.
[11] Inak ani nemá zmysel uvažovať stavovú rovnicu.

Stroj s cyklom ABD: Pri deji $A \to B$ plyn jednoznačne teplo prijíma, jeho termodynamická teplota stúpa podľa stavovej rovnice na dvojnásobok. Ak označíme jeho teplotu v bode A ako $T_{1,A}$ a počet jeho molekúl ako N_1, tak vieme povedať, že vnútorná energia plynu stúpla o $\frac{s}{2}N_1kT_{1,A}$, čo pomocou stavovej rovnice môžem vyjadriť ako $\frac{s}{2}p_0\,V_0$. Pri deji $B \to D$ teplota po stred uhlopriečky najprv stúpa, potom klesá. Pritom plyn stále koná prácu. Nedá sa jednoznačne prostým nahliadnutím určiť, či plyn pozdĺž celej čiary $B \to D$ prijíma teplo.

Parametrizujme si teda dej $B \to D$ napr. pomocou premennej x, ktorá sa bude meniť od hodnoty 0 v bode B po 1 v bode D, pričom tlak pre konkrétne x bude $(2-x)\,p_0$ a objem $(1+x)\,V_0$. Skúmajme, či plyn pre nejaké konkrétne x pri infinitenzimálnom náraste parametra x o $\mathrm{d}x$ teplo prijíma alebo odovzdáva. Prijaté teplo δQ vypočítame ako súčet prírastku vnútornej energie $\mathrm{d}E$ a plynom vykonanej mechanickej práce $\mathrm{d}W$. Vnútorná energia pri náraste parametra x o $\mathrm{d}x$ narastie o (použijeme stavovú rovnicu)[12]

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}E &= \frac{s}{2}\left[N_1k\left(T+\mathrm{d}T\right)-N_1kT\right], \\
&= \frac{s}{2}\left[(p+\mathrm{d}p)(V+\mathrm{d}V)-pV\right], \\
&= \frac{s}{2}p_0\,V_0\left[(2-x)\mathrm{d}x-(1+x)\mathrm{d}x+(\mathrm{d}x)^2\right], \\
&= \frac{s}{2}p_0\,V_0(1-2x)\;\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Mechanická práca je jednoducho

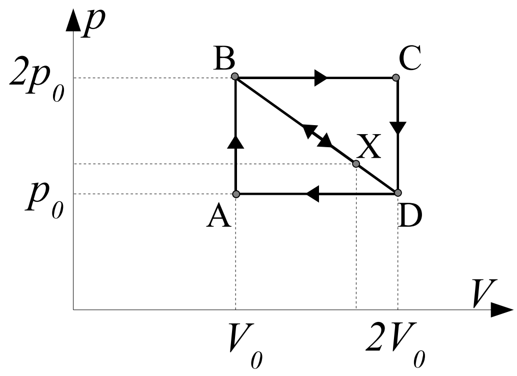
$$\mathrm{d}W = p\;\mathrm{d}V = (2-x)p_0\,V_0\;\mathrm{d}x.$$

Teda teplo δQ je rovné

$$\delta Q = p_0\,V_0\left[\frac{s+4}{2}-(s+1)x\right]\;\mathrm{d}x,$$

odkiaľ poľahky vidíme, že plyn teplo prijíma pre $x < \frac{s+4}{2(s+1)} = \frac{3}{4}$. Označme teda ako bod X bod prislúchajúci hodnote parametra $x_1 = \frac{3}{4}$.

[12]Pri úpravách využijeme, že pre infinitezimálne $\mathrm{d}x$ je $(\mathrm{d}x)^2$ exaktná nula.



Môžeme povedať, že plyn prijíma teplo na úseku $B \to X$. Konkrétne prijme na tomto úseku

$$W_{B\to X}+E_X-E_B = p_0V_0\frac{2+(2-x_1)}{2}x_1+\frac{s}{2}\left[(1+x_1)(2-x_1)-2\right]p_0V_0,$$

kde som prácu vyjadril ako plochu lichobežníka v pV-diagrame. Pri deji $X \to D$ plyn teplo odovzdáva.

Pri deji $D \to A$ plyn stráca vnútornú energiu a zároveň je na ňom konaná práca, teda nutne teplo pri tomto deji odovzdáva. Preto celkové dodané teplo pri deji ABD našim strojom je rovné

$$Q_1 = \frac{p_0\,V_0}{2}\left[(4-x_1)x_1 + s(1+x_1-x_1^2)\right].$$

Stroj s cyklom BCD: Pri deji $B \to C$ plyn jednoznačne prijíma, konkrétne prijme teplo $\frac{s+2}{2}p_0\,V_0$. Pri deji $C \to D$ zasa pre zmenu jednoznačne teplo odovzdáva. Dej $D \to B$ si opäť parametrizujem pomocou x, rovnako ako pri analýze predošlého stroja. Musíme si však uvedomiť, že dej prebieha v opačnom smere. Teda parameter x od 1 klesá ku 0 a „prírastok“ $\mathrm{d}x$ je záporný. Využitím predošlých výpočtov teda vieme, že na úseku $D \to X$ plyn teplo prijíma. Konkrétne prijme

$$W_{D\to X}+E_X-E_D = -p_0V_0\frac{1+(2-x_1)}{2}(1-x_1)+\frac{s}{2}\left[(1+x_1)(2-x_1)-2\right]p_0V_0.$$

Dokopy teda stroj prijme teplo

$$Q_2 = \frac{p_0\,V_0}{2}\left[(-1+4x_1-x_1^2)+s(1+x_1-x_1^2)\right].$$

Pomer účinností strojov teda je

$$\frac{\eta_1}{\eta_2} = \frac{Q_2}{Q_1} = \frac{(-1+4x_1-x_1^2)+s(1+x_1-x_1^2)}{(4-x_1)x_1+s(1+x_1-x_1^2)} = \frac{59}{67}.$$

FX15 Guľky (Opravoval Bzdušo)

Peťo rozostavil do medzihviezdneho priestoru 2009 *všakovakých kovových guliek. Guľky nabil nábojmi q, $-2q$, $3q$, $\ldots$, $-2008q$ a $2009q$, pričom q je kladné. Dokážte, že aspoň jedna z guliek má na celom svojom povrchu kladnú hustotu náboja!*

Úloha nie je ťažká, len sa jej treba chopiť zo správnej strany. A práve to *chopenie sa* tu môže byť problematické. Samotné riešenie bude ľahko pochopiteľné a vystačíme si s úplne elementárnymi vedomosťami o elektrickom poli.

V riešení sa budeme opierať o niekoľko tvrdení o vodičoch. Keďže tie nemusia byť každému známe, venujem ich odôvodneniu pár odstavcov. Skúsení borci sa nemusia nechať zdržiavať a môžu ich preskočiť. Jedinou náročnejšou vecou v riešení bude Gaussov zákon[13] o ktorý sa oprieme pri dokazovaní posledného z tvrdení. Ako sa však ukáže, v riešení si vystačíme aj bez tohoto takto získaného silného tvrdenia.

Niekoľko tvrdení o vodičoch[14]

I. Vnútri vodiča je nulové elektrické pole E – Vo vodiči sú prítomné voľné elektróny. Ak by vo vodiči existovalo makroskopické elektrické pole, na elektróny by pôsobila elektrická sila $\mathbf{F} = q\mathbf{E}$ a tá by ich prinútila prúdiť na iné miesto. Tento pohyb však nebude existovať navždy, bude utlmený kvôli elektrickému odporu prostredia. Po vložení vodiča do elektrického poľa sa preto elektróny prakticky okamžite preskupia tak, aby na ne nepôsobila žiadna elektrická sila. Vnútri vodiča je preto $\mathbf{E} = \mathbf{0}$.

II. Elektrické pole na povrchu vodiča je kolmé na tento povrch – Argumentácia je podobná ako v predošlom prípade. Aj na povrchu vodiča sú totiž voľné elektróny. Keby elektrické pole nebolo kolmé, elektrická sila $\mathbf{F} = q\mathbf{E}$ pôsobiaca na elektróny by mala zložku rovnobežnú s povrchom. Elektróny by teda mohli voľne prúdiť a preskupovať sa. Tento pohyb však musí po čase ustať. To znamená, že elektróny sa preskupili tak, aby na povrchu vodiča bolo $\mathbf{E}$ kolmé na povrch.

III. Povrch vodiča je ekvipotenciálová plocha – Ide o priamy dôsledok II. tvrdenia. Ak by sme vzali malý pomocný náboj δq a pohybovali s ním po povrchu vodiča, nevykonáme žiadnu prácu, pretože $\mathbf{F} = \delta q\mathbf{E}$ je kolmé na $\mathbf{s}$. Žiadna práca znamená žiadny potenciálový rozdiel.

[13] Ako sa dá odvodiť z Coulombovho zákona nájdete vo vzoráku úlohy FX D1 Plochá zem, pozri poznámku 2 na jeho konci.

[14] Samozrejme, myslia sa vodiče, ktoré nie sú napojené na zdroj napätia a neprechádza nimi elektrický prúd.

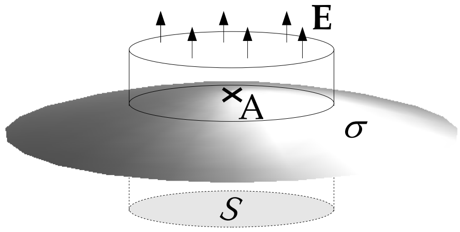
Podobne z I. tvrdenia vyplýva, že dokonca *vnútri celého vodiča* je rovnaký elektrický potenciál.

IV. Vnútri vodiča je nulová hustota ρ elektrického náboja – Z I. tvrdenia vyplýva, že ak si vnútri vodiča zvolím *úplne hocijakú* uzavretú plochu, tak tok elektrického poľa cez ňu bude nulový. Podľa Gaussovho zákona platí $\oint \mathbf{E} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = \rho/\varepsilon$. Ak má byť splnený pre úplne všetky uzavreté plochy, tak potom nutne $\rho = 0$ v celom objeme vodiča. Z toho vyplýva, že náboj sa pri vložení vodiča do elektrického poľa bude sústreďovať len na povrchu vodiča.[15] Dôležitým pojmom sa teda stáva *plošná hustota náboja σ.*

V. Elektrické pole bezprostredne nad povrchom vodiča má veľkosť $\mathbf{E} = \sigma/\varepsilon_0$ – Skúmajme pole nad bodom A na povrchu vodiča. Obkolesme ho malou gaussovskou plochou tvaru valca, ako na obrázku pod odstavcom. Keďže vnútri vodiča je pole nulové a nad vodičom kolmé na povrch, jediné miesto, kde pole tečia zakreslenou plochou je horná podstava. Tam možno navyše $\mathbf{E}$ považovať za konštantné, pretože zakreslená plocha je rádovo menšia než rozmery vodiča. Z Gaussovho zákona máme

$$\oint \mathbf{E} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = ES = \frac{\sigma S}{\varepsilon_0},$$

odkiaľ vidno hľadaný vzťah. To samozrejme platí len pre veľmi malé vzdialenosti!



Samotné riešenie

V tvrdení V. sme dokázali, že pre elektrické pole tesne nad povrchom vodiča platí $E = \sigma/\varepsilon_0$. Ak $\sigma > 0$, tak siločiary z kovu vychádzajú, ak $\sigma < 0$, siločiary smerujú dovnútra.[16] Ak sa snažíme dokázať, že na povrchu aspoň jednej guľky je všade $\sigma > 0$, je to ekvivalentné dokazovaniu tvrdenia, že *aspoň do jednej guľky nevchádza žiadna siločiara.* Budeme teda skúmať siločiary elektrického poľa. Siločiary smerujú z

[15] Elektróny nemôžu vodič opustiť, na to im treba dodať istú energiu. To sa dá realizovať viacerými spôsobmi, napríklad osvetlením vodiča (tzv. *fotoelektrický jav*) alebo teplom (tzv. *termoemisia*).

[16] Naša analýza je dokonca zbytočne presná. Úplne si tu vystačíme zo základoškolským *elektrické siločiary smerujú z + do −*.

miesta s vyšším potenciálom na miesta s nižším potenciálom a môžu byť zakončené len na nejakom náboji[17] alebo pokračujú až do nekonečna.

Keďže celkový náboj guliek je $q - 2q + 3q - \ldots + 2009q = 1005q > 0$, na veľmi veľkých vzdialenostiach[18] možno pozorovať elektrické siločiary smerujúce od guliek do nekonečna, *ale nie opačným smerom!* To znamená, že každá siločiara, ktorá smeruje do nejakej guľky, musí začínať na nejakej inej guľke. Iné začiatky tu totiž neexistujú.

Podľa III. tvrdenia každej guľke zodpovedá nejaký potenciál. Skúmajme náhodne vybranú guľku. Pravdepodobne netrafím na takú, do ktorej vstupuje nejaká siločiara. Táto siločiara musí podľa predošlého odstavca nutne začínať na nejakej inej guľke. Aby to bolo možné, táto iná guľka musí mať nutne väčší potenciál, než *skúmaná* guľka.

Túto úvahu môžem spraviť pre každú náhodne vybranú guľku okrem jednej. Musí totiž existovať guľka s najvyšším potenciálom. Aby do *nej* mohla vstupovať nejaká siločiara, musela by táto odniekiaľ prichádzať. Z inej guľky to však byť nemôže (žiadna guľka nemá ešte vyšší potenciál a iné náboje, než sú tie na guľkách, v úlohe nevystupujú) a z nekonečna prichádzať tiež nemôže (pretože celkový náboj na guľkách je kladný). To je všetko. Dokázali sme, že existuje guľka, ktorá má na celom svojom povrchu kladnú hustotu náboja σ. Ide o guľku, ktorá ma najvyšší potenciál.

Na záver dodajme, že potenciál nezávisí len od náboja na guľke, ale aj od jej umiestnenia v priestore medzi ostatnými guľkami. Hľadaná guľka teda nemusí byť tá s najväčším kladným nábojom. To nám však neprekáža. Úlohou bolo dokázať existenciu takej guľky, nie zistiť, ktorá guľka to bude. A to sme splnili.

[17] Ak sa pýtate prečo, odpoveďou je (zase raz) Gaussov zákon. Podľa neho si môžeme predstaviť, že elektrické pole tečie. Prameňom tohoto tečenia sú kladné elektrické náboje, v záporných nábojoch sa tento tok končí. V oblastiach bez nábojov môže elektrické pole *len pretekať*, čomu zodpovedá pokračujúca siločiara.

[18] Tak veľkých, že sa nám všetky guľky zlejú do jedného bodu.