

6. ročník  
1. séria  
súťaž beží do  
16.1.2011

**FX [f:ks]**

[www.fks.sk/fx](http://www.fks.sk/fx)  
[fx@fks.sk](mailto:fx@fks.sk)

powered by FKS  
KTFDF FMFI UK  
Mlynská Dolina  
842 48 Bratislava

---

V rukách držíš zadania prvej série šiesteho ročníka seminára FX (čítaj f:ks).

Súťaž je určená pre tých, ktorí sa chcú vo svete fyziky pohnúť míľovými krokmi dopredu. Za predošlých päť rokov priniesli naši riešitelia cenné kovy z medzinárodných súťaží po celom svete. Každá vyriešená úloha vo FX je vecou prestíže a určite nie je hanbou zapojiť sa do súťaže len jedinou.

Riešenia úloh môžeš zasielať e-mailom na [fx@fks.sk](mailto:fx@fks.sk) (prípadne poštou na horeuvedenú adresu) *kedykoľvek* až do 16.1., tj. asi týždeň pred zimným sústredením FKS. Tvoje riešenia budú v priebehu niekoľkých dní okomentované, ohodnotené a zaslané späť. Za každú úlohu môžeš získať 0 až 9 bodov. *Ak si nezískal plný počet bodov, nevadí.* Komentáre od vedúceho si môžeš vziať k srdcu, na úlohe popracovať a úlohu zaslať znovu. Znova ju okomentujeme a body prehodnotíme. Takto môžeš iterovať naďalej, až kým úlohu dotiahneš do správneho riešenia.

Zasielať môžeš riešenia každej aktuálnej série. Do konca kalendárneho roka by sa na stránke mali v nepravidelných intervaloch objaviť tri série. Pri riešení Ti môžu prísť vhodné vzorové riešenia úloh z predošlých ročníkov, ktoré nájdeš na stránke <http://www.fks.sk/fx/zbierka.php>. Veríme, že sa s príkladmi poriadne potrápiš a že si vďaka nim začneš vykračovať do diaľav sveta fyziky.

Veľa šťastia s riešením!

## FX1 Kornútok

Miška bola na prechádzke okolo jazera, keď jej zrazu doňho spadla zmrzlina. Pomôžte Miške zistiť, či zmrzlinu stihne zachrániť, alebo jej ju zjedia ryby! Zmrzlina má tvar plného homogénneho kužeľa s vrcholovým uhlom  $2\alpha$  a hustotou  $\rho$ . Môže plávať na vode so špicom smerujúcim kolmo dole? (t.j. je táto poloha stabilná?)

## FX2 Nabitá Zem

Boris poslal Boričom mýtov nasledujúcu otázku: *Predstavte si, že povrch Zeme nabijeme nábojom, ktorého plošná hustota závisí od uhla  $\theta$  (počítaný od severného pólu) ako  $\sigma = \sigma_0 \cos \theta$ . Akú elektrickú intenzitu  $E$  namerajú obyvatelia na rovníku?*

Pomôžete im?

## FX3 Klobúková funkcia

Laco sa rozhodol experimentálne testovať hustotu pravdepodobnosti  $\rho(x)$  náhodnej veličiny  $x$ . Jeho teoretická predpoveď je znázornená na obrázku nižšie. Odhadnite počet meraní, ktoré musí Laco uskutočniť, aby mohol preukázať dvojhrbovosť funkcie  $\rho(x)$ , ako aj počet meraní potrebný na lokalizovanie jej maxima s presnosťou  $\delta$ . Aby ste to mali jednoduchšie, tu je krátky návod:

1. Dokážte, že pre disperziu  $\sigma_x^2 = \langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle$  platí  $\sigma_x^2 = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2$ , kde  $\langle x \rangle$  značí strednú hodnotu náhodnej veličiny  $x$ .
2. Ukážte, že pre nezávislé náhodné veličiny  $x, y$  platí:  $\langle x \cdot y \rangle = \langle x \rangle \cdot \langle y \rangle$ .
3. Uvažujte opitého namorníka kráčajúceho náhodne s fixnou dĺžkou kroku po 1-rozmernej ceste. Aký bude stredný kvadrát jeho vzdialenosti od počiatkovej polohy po 1, 2 a  $N$  krokoch?
4. Priblížme sa k histogramu: Nech do jedného chlievika (binu) trafíme s pravdepodobnosťou  $p$ . Aký bude očakávaný počet zásahov do toho binu po  $N$  krokoch. Aká bude disperzia  $\sigma_{\text{zásahy}}^2$  po  $N$  krokoch?
5. Navrhните počet potrebných meraní na lokalizovanie maxima funkcie s danou presnosťou  $\delta$ .
6. Navrhните počet potrebných meraní na preukázanie dvojhrbovosti!

Klobúkovú funkciu môžeš považovať za známu aj so všetkými jej deriváciami. Nápomocný môže byť vzorák úlohy FX-6 z 5. ročníka súťaže.

