7. ročník
2. séria
súťaž beží do
15.1.2012

FX [f:ks]

www.fks.sk/fx
fx@fks.sk

powered by FKS

KTFDF FMFI UK
Mlynská Dolina
842 48 Bratislava

FX4 Šošovky (opravuje Marika)

Dve tenké šošovky s optickými mohutnosťami D_1 a D_2 sú umiestnené vo vzdialenosti $L = 25\,\mathrm{cm}$ od seba. Táto sústava vytvára priamy, skutočný obraz predmetu umiestneného na optickej osi bližšie k šošovke 1 so zväčšením $\Gamma_\mathrm{A} = 1$. Ak polohy šošoviek zameníme, vznikne priamy, skutočný obraz so zväčšením $\Gamma_\mathrm{B} = 4$. Určte typ oboch šošoviek a rozdiel $\Delta D = D_1 - D_2$ optických mohutností šošoviek!

FX5 Pád telesa (opravuje Marcelka)

V tejto úlohe sa pozrieme na zub voľnému pádu na zem. Pád bude prebiehať z výšky h nad povrchom (merané zvislo, t.j. v smere tiaže) nad miestom so zemepisnou šírkou ϕ. Zavedieme lokálne súradnice s počiatkom v mieste na povrchu, sponad ktorého púšťame teleso, pričom z-ovú os volíme zvislo nahor, x-ovú smerom na západ a y-ovú smerom juh.[1] V týchto súradniciach v neinerciálnej rotujúcej sústave je pohyb hmotného bodu počas pádu daný pohybovou rovnicou

$$\ddot{\boldsymbol{r}} = \underbrace{\underbrace{\boldsymbol{g}_0(\boldsymbol{r})}_{\text{gravitačné zrýchlenie}} - \underbrace{\boldsymbol{\Omega} \times [\boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{R} + \boldsymbol{r})]}_{\text{odstredivé zrýchlenie}}}_{\text{tiažové zrýchlenie}} - \underbrace{2\boldsymbol{\Omega} \times \dot{\boldsymbol{r}}}_{\text{Coriolisovo zrýchlenie}} ,$$

kde $\boldsymbol{g}_0(\boldsymbol{r})$ je vektor gravitačného zrýchlenia ako funkcia vektora $\boldsymbol{r}$ udávajúceho polohu v nami zavedenej vzťažnej sústave, $\boldsymbol{R}$ je vektor od osi otáčania Zeme (napr. od stredu Zeme) do počiatku našich lokálnych súradníc a $\boldsymbol{\Omega}$ značí vektor uhlovej rýchlosti rotácie Zeme[2].

Budeme uvažovať pád z dostatočne malej výšky na to, aby sme tiaž mohli považovať za homogénnu, výsledná rovnica teda bude

$$\ddot{\boldsymbol{r}} \approx -g\hat{\boldsymbol{e}}_z - 2\Omega\boldsymbol{n} \times \dot{\boldsymbol{r}} , \tag{1}$$

kde g je veľkosť tiaže pre danú zemepisnú šírku ϕ.[3] Ďalej si uvedomíme, že veľkostne je druhý člen v predošlej rovnici pre bežné výšky pádu h (a teda pre bežné rýchlosti pádu $\dot{\boldsymbol{r}}$) v hlbokom tieni svojho prvého brata. Preto je

[1] V týchto súradniciach je počiatočný bod pádu $\boldsymbol{r}_0 = (0, 0, h)$.

[2] Jeho veľkosť je rovná $\Omega = \frac{2\pi}{\text{hviezdny deň}}$ a smer $\boldsymbol{n}$ má pozdĺž osi rotácie, orientáciu smerom k Polárke; $\boldsymbol{\Omega} = \Omega\boldsymbol{n}$; $\boldsymbol{n} = (0, -\cos\tilde{\phi}, \sin\tilde{\phi})$ v našich súradniciach, kde $\tilde{\phi} \approx \phi$ platí iba približne, lebo smer do stredu zeme sa kvôli odstredivej zložke tiaže a kvôli odchýlke tvaru Zeme od gule trochu odlišujú.

[3] Má teda platiť $\boldsymbol{g}_0 - \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{R}) = -g\hat{\boldsymbol{e}}_z$. Pozn.: $\boldsymbol{g}_0$ teda vo všeobecnosti nesmeruje pozdĺž našej lokálnej z-ovej osi.

na mieste nazdávať sa, že pohyb padajúceho telesa bude len málo odlišný od voľného pádu bez započítania Coriolisovej sily. V takýchto prípadoch je užitočné navrhnúť riešenie úlohy v tvare mocninného radu v malom (tzv. poruchovom) parametri Ω,[4]

$$\boldsymbol{r}(t) = \Omega^0 \boldsymbol{r}_0(t) + \Omega^1 \boldsymbol{r}_1(t) + \Omega^2 \boldsymbol{r}_2(t) + \Omega^3 \boldsymbol{r}_3(t) + \dots \ ,$$

čo je matematicky zapísaná predstava, že očakávame riešenie úlohy spojité v parametri Ω.[5] Keď takto navrhnuté riešenie dosadíme do rovnice (1) a požadujeme jej splnenie v každom ráde, tak sa rovnica rozpadne na ľahko riešiteľnú sústavu rovníc, ktoré možno postupne riešiť,

$$\begin{aligned}
\Omega^0 : \quad & \ddot{\boldsymbol{r}}_0 &= -g\hat{\boldsymbol{e}}_z \ , \\
\Omega^1 : \quad & \ddot{\boldsymbol{r}}_1 &= -2\boldsymbol{n} \times \dot{\boldsymbol{r}}_0 \ , \\
\Omega^2 : \quad & \ddot{\boldsymbol{r}}_1 &= -2\boldsymbol{n} \times \dot{\boldsymbol{r}}_1 \ , \\
\Omega^3 : \quad & \ddot{\boldsymbol{r}}_1 &= -2\boldsymbol{n} \times \dot{\boldsymbol{r}}_2 \ , \\
\dots : \quad & \dots & \dots
\end{aligned}$$

Vašou úlohou bude spočítať odchýľku miesta dopadu do druhého rádu.[6]

FX6 Vymŕzanie (opravuje Bzdušo)

V termodynamike sa hovorí, že na každý stupeň voľnosti systému pripadá v priemere energia $\frac{1}{2}kT$. Samotné stupne voľnosti sa však definujú iba vymenovaním, t.j. povie sa že

(i) jednoatómová molekula plynu (napr. He, Ne, Ar) má tri stupne voľnosti za nezávislé pohyby v smere osí x, y, z,

(ii) lineárna molekula plynu (napr N_2, O_2, H_2, CO_2; modelujeme ju ako guľôčky spojené nehmotnými pevnými paličkami) má dva stupne voľnosti navyše za rotácie okolo osí s väčším momentrom zotrvačnosti,

(iii) nelineárna viacatómová molekula plynu (napr. H_2O, NH_3, CH_4; opäť sa predpokladajú pevné väzby) má stupeň voľnosti aj za rotáciu okolo tretej osi,

(iv) na každý oscilátor pripadajú dva stupne voľnosti (jeden za kinetickú a jeden za potenciálnu energiu).

Tak v jednotlivých prípadoch je stredná hodnota energia jednej molekuly pri teplote T postupne rovná (i) $\frac{3}{2}kT$, (ii) $\frac{5}{2}kT$, (iii), $3kT$ a (iv) kT.

[4] Pozn.: keby sme chceli pracovať veľmi korektne, tak by sme mali dostať parameter do bezrozmerného tvaru, aby sme okrem iného videli, že je skutočne malý. To by v tomto prípade vyžadovalo prejsť k bezrozmerným veličinám zavedením charakteristického času $\sqrt{h/g}$ a charakteristickej dĺžky h: napr. teda definovaním bezrozmernej polohy $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{r}/h$ a bezrozmerného času $\tau = t/\sqrt{h/g}$. Toto si nateraz môžeme odpustiť.

[5] Presnejšie povedané: predpokladáme, že riešeniu úlohy je analytické (= má Taylorov rozvoj) v parametri Ω.

[6] Všimnite si, že aj čas dopadu bude zmenený oproti $\sqrt{2h/g}$.

Tu by sa mal každý rozumne zmýšľajúci človek ťuknúť do hlavy, že niečo tu nesedí. Veď molekuly nemajú pevné väzby! Namiesto toho všetky atómy kmitajú okolo rovnovážnych polôh. Prečo teda neuvažujeme v prípade dvojatómových molekúl aj dva stupne voľnosti za kmitanie? A prečo jej zakazujeme rotovať okolo tretej osi? Ešte zaujímavejšie sa zdá byť, že experimentálne merané počty stupňov voľnosti často nie sú celé čísla a navyše klesajú so zmenšovaním teploty. Posledne uvedený jav sa nazýva vymŕzanie stupňov voľnosti. Ľudia jeho podstatu pochopili až po sformulovaní kvantovej mechaniky. Vy to môžete skúsiť tiež.

Aby ste problém vyriešili, vezmite ako fakt Boltzmannov zákon, že pravdepodobnosť systému nachádzať sa v stave j je úmerná $e^{-E_j/kT}$, kde E_j je energia systému v tomto stave. Najprv predpokladajte platnosť klasickej fyziky, kde môžu všetky diskutované veličiny nadobúdať *spojite* ľubovoľné hodnoty a presvedčte sa, že vtedy naozaj

a) na pohyb v smere každej osi pripadá stredná hodnota energie $\frac{1}{2}kT$,
b) na rotáciu okolo každej z troch osí pripadá stredná hodnota energie $\frac{1}{2}kT$,
c) na harmonický oscilátor pripadá stredná hodnota celkovej energie kT.

Z kvantovej mechaniky však vyplýva, že niektoré fyzikálne veličiny v niektorých systémoch sú kvantované, zatiaľ čo iné nie. Napríklad energia za posuvný pohyb môže byť hocijaká, preto tu vyjde stredná hodnota energia posuvného pohybu rovnaká ako v klasickej teórii.[7] Vo zvyšných uvedených prípadoch však nastanú nasledovné zmeny:

d) Podľa kvantovej mechaniky môže energia rotujúcej paličky s momentom zotrvačnosti I (vzhľadom na os kolmú na paličku) nadobúdať diskrétne hodnoty $\frac{J(J+1)\hbar^2}{2I}$, kde J sú nezáporné celé čísla. Každej z týchto energií pritom zodpovedá $2J + 1$ *rôznych stavov.*[8] Numericky zistite, ako závisí stredná hodnota rotačnej energie na teplote a určte, pri akej teplote dochádza k vymŕzaniu rotačných stupňov voľnosti.
e) Podľa kvantovej mechaniky môže energia oscilátora s uhlovou frekvenciou ω nadobúdať diskrétne hodnoty $\hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right)$,[9] kde n je opäť nezáporné celé číslo. Exaktným výpočtom zistite, ako závisí stredná hodnota energie oscilátora od teploty a zistite, pri akej teplote dochádza k vymŕzaniu oscilačných stupňov voľnosti.

[7] V skutočnosti existujú delikátne prípady, keď ani toto tvrdenie nie je celkom pravdivé. Príkladom je vymŕzanie pohybu v supratekutom héliu (pri teplotách pod 2,17 K).
[8] V kvantovej mechanike sa vraví, že tieto energetické hladiny sú $2J + 1$-*násobne degenerované.*
[9] V tomto prípade zodpovedá každej energii *jediný* stav oscilátora.

Počet stupňov voľnosti definujte vo všetkých prípadoch vzťahom

$$\langle E\rangle = \frac{s}{2}kT \qquad \Rightarrow \qquad s = \frac{2\langle E\rangle}{kT}.$$

Výpočty robte pre molekulu dusíka. Hodiť sa vám môžu nasledovné veličiny: Planckova konštanta $\hbar = h/2\pi \approx 1{,}06 \cdot 10^{-34}$ J.s, Boltzmannova konštanta $k \approx 1{,}38 \cdot 10^{-23}$ J.K^{-1}, dĺžka väzby v molekule N_2 $a \approx 1{,}1 \cdot 10^{-10}$ m, polomer jadra atómu dusíka $r \approx 6{,}5 \cdot 10^{-15}$ m, hmotnosť atómu dusíka $m \approx 2{,}32 \cdot 10^{-26}$ kg a rezonančná frekvencia molekuly dusíka $\omega \approx 3{,}1 \cdot 10^{14}$ Hz.