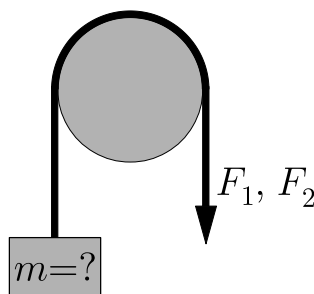


**FX10 Brvno** (opravuje Martin)

Cez brvno tvaru valca je prehodený špagát, na konci ktorého visí teleso s neznámou hmotnosťou  $m$ . Na to, aby teleso nezačalo padať, musíme pôsobiť silou aspoň  $F_1$ . Ak chceme teleso zdvíhať, treba pôsobiť silou aspoň  $F_2 > F_1$ . Určte neznámu hmotnosť závažia, ako aj koeficient trenia medzi špagátom a brvnom.



**FX11 Kužel** (opravuje Jakub)

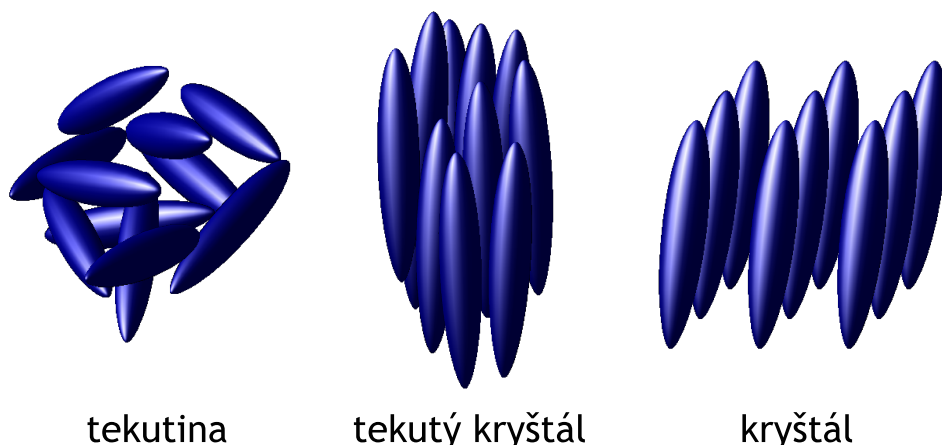
Ada má pevne uchytený plášť kužela (bez podstavy) s vrcholovým uhlom  $2\alpha$  a osou rovnobežnou s  $g$  tak, že vrchol je jeho najnižším bodom. Po jeho vnútri chce roztočiť guľôčku s hmotnosťou  $m$ , polomerom  $r$  a momentom zotrvačnosti  $I = \frac{2}{5}mr^2$  tak, že množina dotykových bodov plášťa kužela (body, ktoré niekedy prichádzajú do kontaktu s guľôčkou) budú tvoriť vodorovnú kružnicu s polomerom  $\ell$ . Množina dotykových bodov guľôčky bude tvoriť tiež kružnicu (nie nutne s polomerom  $r$ ). Aký má byť tento polomer ak Ada chce, aby guľôčka obehla dookola plášťa kužela za čo najkratší čas? Predpokladajte, že  $r$  je omnoho menšie ako  $\ell$ .

**FX12 Displej** (opravuje Bzdušo)

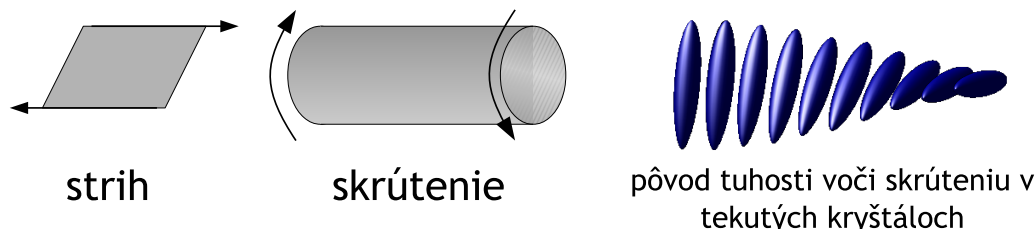
V tejto úlohe sa v krátkosti zoznámime s tekutými kryštálmi a ukážeme si zjednodušený model fungovania LCD (liquid crystal display). Ako naznačuje ich názov, ide o zvláštne skupenstvo hmoty, ktorého vlastnosti sú niekde medzi vlastnosťami kryštálov a tekutín. V čom?

Molekuly tekutín t.j. (kvapalín a plynov) sú v priestore rozmiestnené chaoticky, rovnako tak je náhodná aj orientácia týchto molekúl. V kryštáloch sa molekuly usporadúvajú do pravidelnej mriežky, ich poloha ako aj orientácia sú pravidelné. Molekuly tekutých kryštálov, ktoré možno dosť dobre modelovať ako podlhovasté elipsoidy, sú v priestore chaoticky rozmiestnené

(t.j. ako v kvapaline) no ich orientácia je rovnaká (t.j. pravidelná, ako v kryštáli).



Z uvedených vlastností priamo vyplývajú aj vlastnosti týchto skupenstiev pri deformovaní. Kryštály sú tuhé voči skrúteniu i strihu, pričom energiu deformácie možno všeobecne vyjadriť ako  $\mathcal{E}_{\text{elast.}} = \frac{1}{2}Ku^2$ , kde  $K$  je zovšeobecnená tuhosť a  $u$  veľkosť deformácie. Tuhosť je dôsledkom vychýlenia atómov z rovnovážnych polôh. Opačným extrémom sú kvapaliny, v ktorých sklz ani skrútenie nestoja žiadnu energiu. Tekuté kryštály sú opäť kdesi uprostred. Strih nestojí žiadnu energiu, skrútenie však áno. Je to spôsobené tým, že pri skrútení sa narúša ideálne rovnobežné naorientovanie susedných molekúl.



Pri LCD sa využíva ďalšia vlastnosť tekutých kryštálov, ktorou je ich polarizácia vo vonkajšom elektrickom poli. Energia tekutého kryštálu vo vonkajšom elektrickom poli je daná vzťahom

$$\mathcal{E}_{\text{elek.}} = -\frac{\epsilon_a}{8\pi} \int dV E^2 \cos^2 \alpha,$$

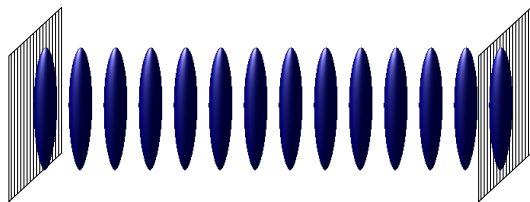
kde  $\alpha$  je uhol medzi elektrickým poľom. Zo vzťahu vyplýva, že v elektrickom poli sa energia minimalizuje naorientovaním molekúl do smeru siločiar tohto poľa.

Posledná vlastnosť, ktorú treba na pochopenie LCD poznať, je skutočnosť, že molekuly tekutých kryštálov prepúšťajú iba svetlo polarizované v smere ich hlavnej osi. S týmito vedomosťami sa môžeme pustiť do samotnej úlohy.

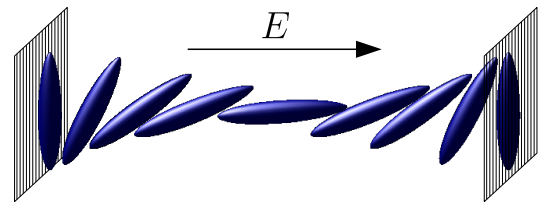
V LCD je tekutý kryštál uzavretý v priehradke dĺžky  $L$ , ktorá je zozadu osvetlená zdrojom. Kvôli povrchovým silám je orientácia okrajových molekúl fixovaná. V prípade neprítomnosti vonkajšieho poľa sú teda všetky molekuly rovnobežné, ako znázorňuje ľavý z dvojice nasledujúcich obrázkov. V tomto prípade svetlo prichádzajúce zľava prejde priehradkou a tá sa javí ako jasný pixel. Po zapnutí elektrického poľa je pre molekuly energeticky výhodné sa naorientovať do smeru tohto poľa, čo bráni svetlu prejsť naprieč priehradkou a príslušný pixel sa javí ako tmavý.<sup>1</sup> Vzhľadom na fixovaný smer okrajových molekúl však po zapnutí poľa nutne dochádza k deformácii. Systém sa teda snaží minimalizovať celkovú energiu

$$\frac{\mathcal{E}_{\text{celk.}}}{S} = \int_0^L dx \left\{ \frac{1}{2} \kappa \left( \frac{d\theta}{dx} \right)^2 - \frac{\varepsilon_a}{8\pi} E^2 \sin^2 \theta \right\}, \quad (1)$$

kde  $\theta(x)$  je odchýlka osi molekúl oproti stavu s nulovým elektrickým poľom.



orientácia molekúl v  
neprítomnosti poľa



orientácia molekúl v  
prítomnosti elektrického poľa

Ukazuje sa, že existuje kritická hodnota elektrického poľa  $E_c$  taká, že pre  $E < E_c$  nedochádza k žiadnej deformácii tekutého kryštálu – všetky molekuly zostanú rovnobežné. Pre  $E = E_c + \delta E$ ,  $\delta E \ll E_c$  dochádza iba k malým deformáciám a svetelnosť pixelu je len málo modulovaná.

Vaše úlohy sú nasledovné:

- ▶ Kvalitatívne odvodte vzťah (1) pre celkovú energiu tekutého kryštálu v priehradke.
- ▶ Nájdite kritickú hodnotu elektrického poľa  $E_c$ , nad ktorou dochádza k deformácii tekutého kryštálu.
- ▶ Nájdite priebeh deformácie  $\theta(x)$  pre  $E = E_c + \delta E$ ,  $\delta E \ll E_c$ . Využite, že pre malé výchylky platí  $\sin^2 x \approx x^2 - \frac{1}{3}x^4$ .

Pri druhej a tretej otázke sa vám zide analógia s klasickou mechanikou, kde je účinok definovaný ako integrál lagrangeovej funkcie podľa času, t.j.

$$\mathcal{S} = \int dt \mathcal{L}(x, \dot{x}),$$

<sup>1</sup>V skutočnosti každý pixel obsahuje tri takéto priehradky, za ktorými sa nachádza červený, zelený, resp. modrý filter. Tým sa dosahuje farebnosť pixelu.

kde  $x$  je zovšeobecnená súradnica (napr. dĺžka alebo uhol). V klasickej mechanike sa ukazuje, že účinok sa pri daných okrajových podmienkach  $x(t_1), x(t_2)$  extremalizuje pre taký pohyb  $x(t)$ , ktorý je riešením tzv. Eulerovej-Lagrangeovej rovnice

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = 0.$$

Zvedavejší z vás si na rôznych systémoch môžu preveriť, že pre  $\mathcal{L} = E_{\text{kin.}} - E_{\text{pot.}}$  táto diferenciálna rovnica skutočne reprodukuje výsledky newtonovskej mechaniky.

Naše zjednodušenie oproti skutočnosti spočíva v tom, že sme zvolili fixovanú orientáciu okrajových molekúl ako *rovnobežnú*. V skutočnosti sú tieto orientácie na seba *kolmé*, čo však značne komplikuje výpočty no neprináša prevratné zistenia. Pre lepšie pochopenie mechanizmu odporúčame pozrieť si nasledovné video na YouTube:

<http://www.youtube.com/watch?v=jiejNAUwcQ8>