

8. ročník

1. séria

súťaž beží do

16. 6. 2013

FX [f:ks]

www.fks.sk/fx

fx@fks.sk

powered by FKS

KTFDF FMFI UK

Mlynská Dolina

842 48 Bratislava

V rukách držíš zadania tretej série ôsmeho ročníka seminára FX (čítaj f:ks).

Súťaž je určená pre tých, ktorí sa chcú vo svete fyziky pohnúť míľovými krokmi dopredu. Za predošlých sedem rokov priniesli naši riešitelia cenné kovy z medzinárodných súťaží po celom svete. Každá vyriešená úloha vo FX je vecou prestíže a určite nie je hanbou zapojiť sa do súťaže len jedinou.

Riešenia úloh môžeš zasielať e-mailom na fx@fks.sk *kedykoľvek* až do 16.6., tj. asi týždeň pred letným sústređením FKS. Tvoje riešenia budú v priebehu niekoľkých dní okomentované, ohodnotené a zaslané späť. Za každú úlohu môžeš získať 0 až 9 bodov. *Ak si nezískal plný počet bodov, nevadí.* Komentáre od vedúceho si môžeš vziať k srdcu, na úlohe popracovať a úlohu zaslať znovu. Znova ju okomentujeme a body prehodnotíme. Takto môžeš iterovať naďalej, až kým úlohu dotiahneš do správneho riešenia.

Zasielať môžeš riešenia každej aktuálnej série. Do konca kalendárneho roka by sa na stránke mali v nepravidelných intervaloch objaviť dve série. Pri riešení Ti môžu prísť vhod vzorové riešenia úloh z predošlých ročníkov, ktoré nájdeš na stránke <http://www.fks.sk/fx/zbierka.php>. Veríme, že sa s príkladmi poriadne potrápiš a že si vďaka nim začneš vykračovať do diaľav sveta fyziky.

Veľa šťastia s riešením!

FX7 Granát (opravuje Jakub Ko.)

Predstavte si nasledovný experiment: Európska vesmírna agentúra umiestni do istej vzdialenosti od Slnka (nehybný) granát. V istom momente vybuchne a úlomky granátu sa rozletia do všetkých možných smerov rýchlosťou veľkosti v . Ukážte, že

- všetky úlomky budú okolo Slnka obiehať po eliptických dráhach s rovnako veľkou hlavnou polosou,
- množina všetkých bodov v priestore, do ktorých sa nejaký úlomok niekedy dostane, tvorí plný elipsoid.

FX8 Mravčky (opravuje Jakub)

Táto úloha sú v skutočnosti úlohy dve!

[A] Kaja vzala gumu počiatočnej dĺžky L . Jeden jej koniec upevnila k stene a druhým koncom začala gumu ťahať tak, že jej dĺžka v čase t je $L + ut$. Súčasne s ťahaním sa po gume začal od steny pohybovať mravec konštantnou rýchlosťou v . Zistite, aká musí byť rýchlosť v , aby sa mravcovi podarilo prísť na opačný koniec gumy a ako dlho mu to bude trvať! Predpokladajte, že guma sa ťahuje rovnomerne a možno ju natiahnuť na ľubovoľnú dĺžku.

[B] Predstavte si svet tvaru dvojrozmernej roviny (volajme ho „horúca platnička“) na ktorom žijú dvojrozmerné bytosti – mravčky. Mravčky ako aj všetky ich nástroje sú vyrobené z materiálu s rovnakou teplotnou rozťažnosťou α , všetky objekty sa tu ťahujú podľa $L = \alpha T L_0$. Keď sa mravček presunie na teplejšiu oblasť platničky, on aj jeho nástroje sa zväčšia rovnako veľmi, takže ťahovanie vôbec nepostrehne.

Čudnosť svojho sveta však mravčky môžu objaviť inak – geometricky! Keďže úsečky definované ako najkratšie spojnice dvoch bodov sú akosi krivé (oplatí sa ísť cez teplejšie oblasti, kde sú pravítka dlhšie), nemalo by byť prekvapivé, že súčet vrcholových uhlov v trojuholníku tu nemusí byť 180° alebo že pokus o nakreslenie štvorca, t.j. série čiar rovnakej dĺžky postupne na seba kolmých, tu môže zlyhať.

Vaša úloha je nasledovná: Ako má vyzeráť teplotná mapa platničky, aby geometria na nej bola identická s geometriou na guli? (Myslí sa to okrem jej južného pólu, ktorý sa na našu platničku „nevzmestí“.)

FX9 Zápalky (opravuje Halucinka)

Vo fyzike existuju dve rôzne interpretácie pravdepodobnosti, tzv. *frekvenčionistická* a *bayesovská*. Tá prvá chápe pravdepodobnosť nejakého javu ako objektívnu veličinu, ktorú možno určiť dostatočne veľkým počtom experimentov. Druhá chápe pravdepodobnosť ako subjektívnu veličinu zohľadňujúcu naše množstvo vedomostí o danom fyzikálnom jave. Zatiaľčo tá prvá je známa zo stredoškolskej matematiky, vo fyzike sa čoraz častejšie využívajú deduktívne metódy založené na tej druhej. Táto úloha vás s ňou trochu oboznámi.

Centrálnymi pojmami bayesiánskeho prístupu sú *apriórna* a *aposteriórna* pravdepodobnosť.¹ Apriórna pravdepodobnosť vyjadruje naše predpoklady pred vykonaním experimentu a aposteriórna vyvinuté predstavy vyplývajúce z apriórnej pravdepodobnosti a výsledkov experimentu. Ústredná je rovnica pre podmienené pravdepodobnosti, ktorú odôvodnil anglický duchovný Thomas Bayes. Znie

$$P(A_j|B) = \frac{P(B|A_j)P(A_j)}{P(B)}.$$

V tejto rovnici sú $P(A_j)$ a $P(B)$ pravdepodobnosti dvoch náhodných javov A_j a B , $P(B|A_j)$ je podmienená pravdepodobnosť javu B ak nastal jav A_j . Veličina $P(A_j|B)$ určuje podmienenú pravdepodobnosť javu A_j ak nastal jav B .

Vo fyzikálnom žargóne sa javy A_j a B môžu nazvať *teória* a *experiment*. V tom prípade $P(A_j)$ vyjadruje apriórnu pravdepodobnosť, že teória A_j je pravdivá, $P(B|A_j)$ je pravdepodobnosť že teória A_j dá experimentálny výsledok B , $P(B) = \sum_j P(B|A_j)P(A_j)$ je pravdepodobnosť, s akou podľa našich vedomostí vôbec nastane jav B . Potom $P(A_j|B)$ vyjadruje, s akou pravdepodobnosťou je teória A_j pravdivá po zohľadnení experimentu B .

Všimnite si, že táto interpretácia je kompatibilná s oboma extrémami: Ak sme si istí, že nejaká teória A_j určite *nie je* pravdivá a vopred ju vylúčime $P(A_j) = 0$, tak aj $P(A_j|B) = 0$, t.j. žiadne experimentálne dáta nás o teórii A_j neprinútia uvažovať. Naopak, ak sme si od začiatku istí, že teória A_j je určite pravdivá (čiže vopred vylúčime *všetky* ostatné teórie), tak podľa rovnice nás žiadne experimentálne výsledky neprinútia pochybovať. Presvedčte sa!

Táto úloha pozostáva z troch praktických úloh zo života, fyziky je tu naozaj málo. Prvé dve úlohy sú zahrievacie, tá posledná je naozajstná.

¹Z latinského *a priori* (na základe predošlého) a *a posteriori* (na základe neskoršieho).

[A] V istom meste sa stala nehoda – v nočných hodinách bol chodca zrazený taxíkom. Podľa očitého svedka išlo o oranžový taxík. Polícia vie, že v meste je 900 taxíkov žltých, zvyšných 100 taxíkov je oranžových. Testy v svetelných podmienkach zodpovedajúcim tým v čase nehody ukázali, že očitý svedok identifikuje žltý taxík s pravdepodobnosťou 18% ako oranžový a s 5% oranžový ako žltý. Ako zmenilo domnienky o páchatelovi toto očné svedectvo? Je dôvod predpokladať, že nehodu naozaj spôsobil oranžový taxík?

[B] Istou chorobou trpí 1% populácie. Bežne používaný test s pravdepodobnosťou 95% chorobu správne diagnostikuje resp. vylúči, vo zvyšných 5% prípadov diagnostikuje chorobu klinicky zdravým ľuďom resp. neodhalí ju u chorých. Ak vám takýto test oznámi, že ste chorí, s akou pravdepodobnosťou ste naozaj chorý? Ako sa vaša vedomosť zmení, ak aj druhý *nezávislý* test potvrdí vašu chorobu? Predpokladajte, že druhý test má rovnakú spoľahlivosť a že jeho výsledky sú nekorelované s výsledkami prvého testu.

[C] Eva si v obchode kúpila 10 krabičiek so zápalkami. Po rozbalení zistila, že tri z nich majú na obrázku Glärnisch, dve Wetterhorn, dve Matterhorn, dve Piz Beverin a jedna Jungfrau. Aký počet rôznych existujúcich vzorov možno očakávať na základe Evou náhodne vybranej desatice? Predpokladáme, že výrobca vyrába všetky vzory v rovnakom počte. Pred experimentom s rovnakou pravdepodobnosťou prípušťame všetky možné počty rôznych vzorov.

