8. ročník
**4. séria**
súťaž beží do
**16.6.2013**

# FX [f:ks]

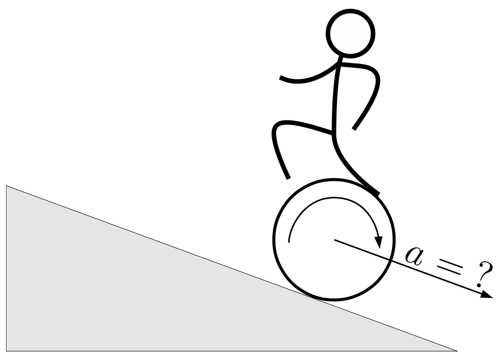
www.fks.sk/fx
fx@fks.sk

powered by FKS

KTFDF FMFI UK
Mlynská Dolina
842 48 Bratislava

## FX10 Kotúľ (opravuje Marcelka)

Paťo (s hmotnosťou $m$) trénuje cirkusové vystúpenie. Jeho kúsok spočíva v tom, že sa postaví na prázdny sud (s hmotnosťou $M$ a momentom zotrvačnosti $MR^2$) a nechá ho kotúlať sa dolu naklonenou rovinou so sklonom $\alpha$. Paťo pritom po sude beží tak, že sa stále nachádza na jeho najvrchnejšom bode. Zistite s akým zrýchlením sa za týchto okolností sud kotúľa. Predpokladajte, že sud na podložke neprešmykuje!




## FX11 Dvojité kyvadlo (opravuje Tomáš)

**Zadanie pre géniov:**
Vyriešte problém dvojitého matematického kyvadla pomocou princípu minimálneho účinku, ktorý použijete numericky.

**Zadanie pre normálnych ľudí:**
Princíp minimálneho účinku hovorí, že telesá sa snažia pohybovať tak, aby priemerná hodnota rozdielu ich kinetickej a potenciálnej energie za daný čas bola čo najnižsia. Tento čudesný zákon dokáže nahradiť pohybové rovnice, avšak na praktické výpočty sa používa zriedka. Týmto príkadom sme sa rozhodli tento neduh napraviť. Viac o princípe nájdete tu:

`http://en.wikipedia.org/wiki/Principle_of_least_action`

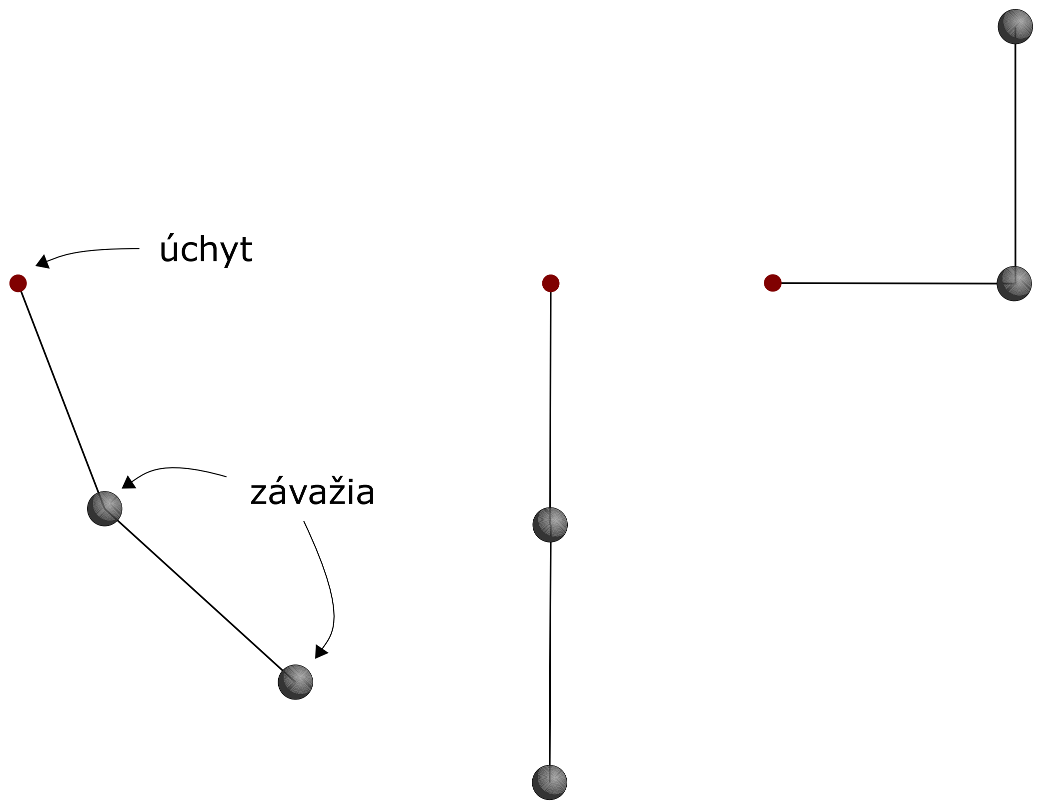
Dvojité matematické kyvadlo si možno predstaviť ako dve matematické kyvadlá pod sebou, viď ľavý z trojice obrázkov.

**Presné zadanie vašej úlohy:**

Na prostrednom obrázku je zachytená poloha kyvadla v čase 0 s, na pravom v čase 10 s. Dĺžka oboch tyčí je 20 cm, hmotnosť oboch závaží 100 g, gravitačné zrýchlenie 10 m.s$^{-2}$. Trenie neuvažujeme. Aké musia byť rýchlosti závaží v čase 0 s na obrázku vľavo, aby bol takýto vývoj možný?

(a) Nájdite čo najviac možných dvojíc $v_1$, $v_2$, ktoré sú riešením úlohy.

(b) Najexotickejší pohyb, ktorý nájdete vizualizujte a zaveste na `YouTube`, link vložte do riešenia.




**Návod:**

1. Postupujte numericky, otvorte si `Python` / `Javu` / `C` / `Ruby` / `JavaScript` / `Matlab` / `Excel` a smelo do toho.
2. Ak ste si z predchadzajucej ponuky vybrali `Excel`, vráťte sa na krok 1.
3. Spustite `Python`.
4. Vymyslite, ako čo najjrozumnejšie reprezentovať vývoj kyvadla (teda, nie len okamžitý stav, ale celý vývoj od času 0 s po čas 10 s)
5. Zrátajte pre tento vývoj účinok.
6. Skúste jemne poštelovať s vývojom a nájsť nový vývoj s menším účinkom.
7. Automatizovane opakujte niekoľko posledných krokov, až kým nedostanete vývoj s lokálne minimálnym účinkom, ktorý už neviete vylepšiť.

**Pár ďalších rád:**

- Nakóďte si jednoduchú vizualizáciu výsledného optimálneho vývoja, silne to odporúčam. Jednak uvidíte, či vám to ráta dobre a dvak, robí to úžasné veci.
- ***Neprepadajte panike!***
- Zabudnite na prežitky ako sú pohybové rovnice. Pri princípe minimálneho účinku vás nesmie trápiť, že vývoj, s ktorým pracujete, im odporuje. Je dokázané, že pokiaľ nájdete vývoj s minimálnym účinkom, tento bude OK aj čo do klasických pohybových rovníc.
- Ak máte problémy so zachytávaním videa, pokojne nahrajte fotoaparátom váš monitor, postačí to.
- Vaše video môže byť oproti realite spomalené, aspoň bude lepšie sledovateľné.
- Najexotickejší pohyb vyhráva od Andreja kompót.

## FX12 Magnet (opravuje Janči)

V tejto úlohe sa oboznámime s najjednoduchšou mikroskopickou teóriou popisúcou fázový prechod – *metódou stredného poľa*. Budeme ju aplikovať na zjednodušený, tzv. *klasický Isingov model* magnetu. Je na mieste vopred upozorniť, že výsledky tejto teórie sú veľmi odlišné od experimentálnych meraní pre naozajstné magnety. Existujú však iné fázové prechody prvého druhu,[1] pre ktoré teória funguje s úžasnou presnosťou (napr. prechod kovov do supravodivého stavu pri nízkych teplotách – to síce nie je obsahom tejto úlohy, ale v samom závere sa k tejto zaujímavosti vrátime).

Než vysvetlím, čo metóda stredného poľa znemaná, predstavím už spomínaný klasický Isingov model magnetu. Predstavte si kubický kryštál, v ktorom je rozmiestnených $n \times n \times n \equiv N$ elementárnych magnetov – tzv. *spinov* – ktoré sa môžu nachádzať v dvoch stavoch: hore ($\uparrow$ alebo $+1$) a dole ($\downarrow$ alebo $-1$). Dovedna teda existuje $2^N$ rôznych mikroskopických konfigurácií. Energia konfigurácie je daná vzťahom

$$E_{\text{konfig.}} = -\sum_i B s_i - J \sum_{\langle i,j \rangle} s_i s_j,$$

kde $s_i = \pm 1$ je orientácia spinu v mriežkovom bode $i$, $B$ je externé magnetické pole, $J > 0$ popisuje silu feromagnetickej interakcie spinov a $\langle i, j \rangle$ pri

[1] Aký je rozdiel medzi fázovým prechodom prvého a druhého druhu? Čítajte napr. tu

`http://www.tyzden.sk/casopis/2011/24/prvy-a-druhy-druh.html`.

druhej sume značí sčitovanie cez dvojice najbližších susedov. V uvažovanom trojrozmernom kryštáli má každý spin šesť najbližších susedov.

Zo štatistickej fyziky vieme, že každá z množstva konfigurácii sa v systéme realizuje s pravdepodobnosťou úmernou $e^{-E_{\text{konfig.}}/k_B T}$, tzv. Boltzmannov zákon. Očakávaná hodnota fyzikálnej veličíny $A$ sa potom počíta ako stredná hodnota

$$\langle A \rangle = \frac{\sum_{\text{konfig.}} A_{\text{konfig.}} e^{-E_{\text{konfig.}}/k_B T}}{\sum_{\text{konfig.}} e^{-E_{\text{konfig.}}/k_B T}},$$

kde $A_{\text{konfig.}}$ je hodnota veličiny $A$ ak sa realizuje konkrétna konfigurácia a obe sumy bežia cez všetkých $2^N$ možných konfigurácií systému. Tu však narážame na dva problémy: Prvý, zmagnetizovaný materiál bez vonkajšieho poľa na rozumných časových škálach[2] *nemení* svoju os magnetizácie – fluktuácia, ktorá by magnet prepólovala totiž stojí veľa energie a je extrémne málo pravdepodobná. Magnet sa teda nedostane do všetkých možných konfigurácii a sumy treba nejako orezať. Druhý problém je celkom očakávateľný – sumy v rovniciach nevieme vypočítať.

*Metóda stredného poľa* je drastickým zjednodušením. Predpokladá sa, že každý spin interaguje s priemernou magnetizáciou celého kryštálu. Keďže $6 \lll N^3$, nemožno očakávať zázraky – najmä pokiaľ sa v magnete realizujú korelácie na vzdialenostiach väčších ako vzdialenosť druhých najbližších susedov. Skutočne, sú to práve zanedbané flukuácie, kvôli ktorým nedáva metóda stredného poľa dobré predpovede. Metóda však aspon kvalitatívne vysvetľuje existenciu fázového prechodu a hysterézne správanie magnetov. To si ukážeme.

Postupujte nasledovne: Nech $\langle s \rangle = \frac{1}{N} \sum_i s_i$ značí priemernú orientáciu spinu v kryštáli. Tú pre dané parametre $T, B$ vopred nepoznáme, čo nám neprekáža ju nejako označiť. Zrejme $\langle s \rangle \neq 0$ bude znamenať magnetický stav kryštálu. Obmedzte sa na *jediný* spin ktorého 6 susedov nahraďte *stredným poľom* $\langle s \rangle$. Boltzmannovským prístupom určite, s akou pravdepodobnosťou sa tento spin nachádza v stavoch $\pm 1$ a aká je jeho stredná magnetizácia. Požadovaním „konzistentnosti“, t.j. že stredná hodnota skúmaného spinu je rovnaká ako priemerná magnetizácia vstupujúca do výpočtu, ukážte že môžu nastať nasledovné prípady:

- Ak $B = 0$ a $T$ je väčšia ako istá medzná (tzv. *kritická* alebo Curieho) teplota $T_c$, tak existuje jediné riešenie $\langle s \rangle = 0$, nemagnetický stav.
- Ak $B = 0$ a $T < T_c$, existujú riešenia $\langle s \rangle = 0$ a $\pm \langle s \rangle \neq 0$. Ukážte, že magnetický stav má nižšiu energiu ako nemagnetický a numericky určte závislosť nenulového $\langle s \rangle$ od teploty.

[2] Povedzme na škálach porovnateľných s vekom vesmíru.

- Ak $B \neq 0$, môže existovať jedno až tri riešenia. Ukážte, že vo všeobecnosti sú všetky tri nenulové a dajte im fyzikálnu interpretáciu.

Ďalej ukážte, že pre $T < T_\mathrm{c}$ a existuje kritická veľkosť magnetického poľa $B_\mathrm{c}$ ktorá spôsobí premagnetizovanie systému a že prekročenie tohto magnetického poľa povedie na hysterézne správanie.

Fázové prechody sú charakterizované sadou tzv. *kritických exponentov*. Hoci vo fyzike existuje veľké množstvo fázových prechodov, na základe sady hodnôt kritických parametrov ich možno všetky klasifikovať do prekvapivo malého množstva tried, tzv. *univerzalít*. Napríklad kritické exponenty nášho modelu magnetu v priblížení stredného poľa sú identické s kritickými exponentami supravodiča. Ďalším príkladom je kondenzácia plynu, ktorá patrí do tej istej triedy ako *presné* riešenie klasického Isingovho modelu.

Toto sú definície niektorých kritických exponentov:

- Ak teplota $T$ je blízka $T_\mathrm{c}$, tepelná kapacita sa škáluje ako $C \sim |T - T_\mathrm{c}|^\alpha$.
- Ak teplota $T$ je len o málo menšia ako $T_\mathrm{c}$, tak magnetizácia sa škáluje ako $\langle s \rangle \sim (T_\mathrm{c} - T)^\beta$.
- Ak $T = T_\mathrm{c}$, magnetizácia závisí od externého magnetického poľa ako $\langle s \rangle \sim B^{1/\delta}$.

Určte exponenty $\alpha, \beta, \delta$ v priblížení stredného poľa.

Poznámka: Pri popise kvapalín a supravodičov sa magnetizácia nahradzuje inou veličinou, tzv. *parametrom usporiadania*, ktorá je v týchto fázach nenulová a vo vysokoteplotnej fáze je nulová. V definíciách kritických parametrov pre tieto fázové prechody treba spraviť tú istú zámenu magnetizácie za parameter usporiadania.