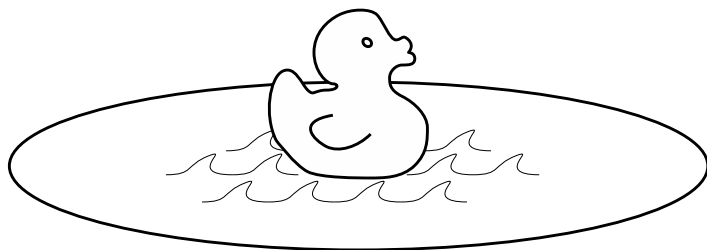


T. Bzdušek, J. Imriška, J. Závodný a kol.

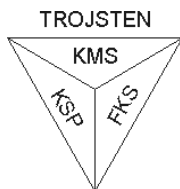
Zbierka FX



Vytvoril FKS – Fyzikálny Korešpondenčný Seminár

www.fks.sk

Vydal Trojsten



© Tomáš Bzdušek, Jakub Imříška, Jakub Závodný, 2009

ISBN 978-80-970297-0-8

Predslov a [pod’akovanie]

Kdesi tamsi, podelo sa malé točidielko krídlaté. Stali sa veci, dovolím si nazvať, bizarné. Ach ty môj semaforík večnezelený (pocta ako vyšinutá od motoristu), prečo netlačíš hodiny smerom dopredu? Komu sa nelení, toho sekne v krížoch. Ale sú na tom ľudia aj horšie. Napríklad, keď majú napísať k veci úvod ku vzoráku.

TOMÁŠ RYBÁR, ÚVOD DO VZORÁKU FKS

Britský fyzik *Stephen Hawking* v predslove svojej najznámejšej knihy *A Brief History of Time* uvádza, ako mu niekto povedal, že každá rovnica, ktorú do svojej knihy pojme, zníži jej predaj na polovicu. Keby toto bola celá pravda, kniha, ktorú práve držíte v rukách (ako i každá iná odborná fyzikálna literatúra) by vlastne mala byť vopred odsúdená na neúspech. Avšak mňa jeden môj priateľ (myslím, že to bol *Tomáš Kulich*) upozornil, že každý *Feynmanov* výrok a každá vtipná poznámka pod čiarou predaj knihy, naopak, zdvojnásobí. Tých tu čitateľ nájde naozaj nemálo, čo mi dáva nádej, že *Zbierka FX* vzbudí v cieľovej skupine ľudí nemalý záujem.

Tieto riadky by ste zrejme nečítali, keby Vás nezaujímalo, čo nájdete vo vnútri. Najprv však niečo o tom, čo knižke predchádzalo. Príbeh, ktorý sa zavŕšil jej vznikom, sa začal súťažou s rovnakým názvom – FX (čítaj [f:ks]). Tá vznikla r. 2001 z iniciatívy *Matúša Meda* a *Daniela Nagaja* ako prestížna kategória korešpondenčného seminára FKS (www.fks.sk), určená pre vtedajších nadšencov. Po dlhšej odmlke ju v roku 2005 jeden zo spomínaných nadšencov znovu prebral k životu, odkedy funguje nepretržite a s čoraz vyšším počtom riešiteľov. Po ukončení strednej školy sa niektorí z nich stávajú nadšenými organizátormi, čím súťaž získava čoraz profesionálnejší ráz. Dnes, po štyroch ročníkoch súťaže, sa môžeme pochváliť nielen kvalitnými vzorovými riešeniami, ale aj plejádou úspechov, ktoré naši riešitelia získali na medzinárodnej úrovni. Z Medzinárodnej fyzikálnej olympiády v Singapúre (2006), Iráne (2007), Vietname (2008) a Mexiku (2009) si doniesli štyri zlaté, dve strieborné a päť bronzových medailí!

Zbierka FX môže pri prvom otvorení v človeku vyvolať strach. Tu by som rád povedal tri veci. Po prvé, *neprepadajte panike!*

Po druhé, hoci sa v knižke často používa netriviálna matematika, ako napr. derivácie a integrály, pokiaľ ide o fyzikálne porozumenie textu, úplne stačí vedieť, čo tieto operácie znamenajú (a teda nie je nutné vedieť ich

naozaj počítat). Najmä kvalitatívne – tj., že „*derivácia funkcie $\approx$ miera či rýchlosť jej rastu*“, „*integrál funkcie $\approx$ obsah plochy pod jej grafom či akýsi jej kumulatívny súčet*“, nezaškodí však i kvantitívne pomocou definičných vzťahov

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}, \quad \int_a^{a+H} f(x) dx = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{N-1} f(a + k \frac{H}{N}) \cdot \frac{H}{N}$$

(pokračujte v neprepadaní a premyslite si, že definičné vzťahy dávajú presne to, čo chceme). Pokiaľ Vás zaujíma aj exaktné riešenie úlohy, po doštudovaní matematického aparátu sa k nemu môžete vrátiť – veci sa Vám budú zdať jasnejšie. Tu treba zdôrazniť, že hoci majú derivácie odstrašujúci názov a hoci sa učia až vo štvrtom ročníku gymnázií, ich počítanie nie je vôbec zložité. Poriadne sa dajú naučiť už za pár hodín z mnohej dostupnej literatúry.

Po tretie, súhlasím, že latku sme nasadili poriadne vysoko. Tak to však podľa nás má byť! Ak sa chce človek naučiť riešiť problémy, musí zapájať mozgové závitý a ísť až na hranicu svojich možností. Nesmie zaspáť na vavrínoch riešením tuctov typových príkladov. Fyzika rozhodne *nie je* o používaní namemorovaných vzorcov, ale o zdravom (niekedy priam sedliackom) uvažovaní a o tom, ako svoje myšlienky matematicky zapísať. O tomto by vedel veľa básniť americký fyzik *R. Feynman*, ktorý je pre nás veľkým vzorom (jeho dielo *Feynman's Lectures on Physics*, ktoré r. 2001 vyšlo v češtine rozhodne odporúčame každému záujemcovi o fyziku). Aby sme Vám študovanie *Zbierky FX* uľahčili, uvádzame spolu so zadaniami aj grafické znázornenie obtiažnosti na škále od 1 do 5 hviezdíček.

Slovenským čitateľom ponúkame učebnicu fyziky, aká tu ešte nebola. Ako ju ohodnotia a či sa aj im ukáže ako prospešná, to ukáže až čas. Radi by sme však na tomto mieste vyslovili niekoľko poďakovaní. Za finančnú podporu ďakujeme *Jednote slovenských matematikov a fyzikov*, predsedovi slovenskej Fyzikálnej olympiády *Ivovi Čápoovi* a najmä *Agentúre na podporu výskumu a vývoja*, ktorá podporila projekt združenia Trojsten na vzdelávanie talentov. Obrovská vďaka patrí *Eugenovi Hruškovi*, *Samuelovi Hapákovi* a predovšetkým *Petrovi Perešínmui* za odstránenie množstva štylistických, typografických i matematických chýb. Ďakujeme tiež našim riešiteľom za mnohé alternatívne spôsoby riešenia problémov. Napokon patrí vďaka aj nášmu priateľovi *Daliborovi Blažekovi*, ktorý bol súťažou FX nadšený a vydanie tejto knižky veľmi aktívne podporoval.

V prípade akýchkoľvek otázok nás neváhajte kontaktovať na fx@fks.sk.

ZA KOLEKTÍV AUTOROV

TOMÁŠ BZDUŠEK, 11. JANUÁRA 2010

Physics is like sex. Sure, it may give some practical results, but that's not why we do it.

RICHARD P. FEYNMAN

Zoznam [úloh]

A — Mechanika I.

FX A1 — LANO, str. 2



Horolezec Tomáš zliezol dokonale hladkú horu tvaru kužela s vrcholovým uhlom 2α , ale zabudol si na nej navlečenú kruhovú slučku lana hmotnosti m . Akou silou je napínaná táto slučka?

FX A2 — ŠPIRÁLA, str. 4



Fajo našiel vo vesmíre dlhý a veľmi ťažký valec s polomerom r . Na jeho plášti bol uviazaný špagát s voľnou dĺžkou L , s malým kamienkom pripevneným na druhom konci. Ako správny fyzik, Fajo natiahol špagát tak, aby sa uviazaným koncom práve dotýkal valca, a kamienku udelil rýchlosť v kolmú na špagát tak, aby sa začal namotávať v rovine kolmej na os valca. Za aký čas sa špagát úplne namotá na valec?

FX A3 — MOMENTKY, str. 7



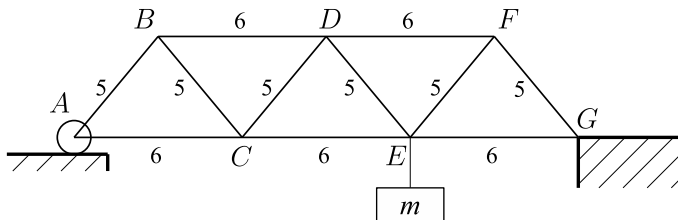
Vypočítajte bez použitia integrálov moment zotrvačnosti

- (a) obdĺžnikovej dosky vzhľadom na uhlopriečku,*
- (b) kocky vzhľadom na os prechádzajúcu stredmi dvoch protilahlých stien,*
- (c) pravidelného štvorstenu vzhľadom na os prechádzajúcej vrcholom a stredom protilahlej sten.*

FX A4 — MOST, str. 15



Katka si medzi poličkou a stolom postavila most. Most je tvorený ľahkými tyčami voľne spojenými kĺbmi, tak ako na obrázku. Dĺžky šikmých a vodorovných tyčí sú v pomere 5:6. V bode E je zavesené závažie s hmotnosťou m . Ktoré z tyčí môže Katka nahradiť ohybnými väzbami, t.j. napríklad pevným špagátom rovnakej dĺžky? Akou silou je namáhaná tyč BD ?



FX A5 – KRÚŽOK, str. 20

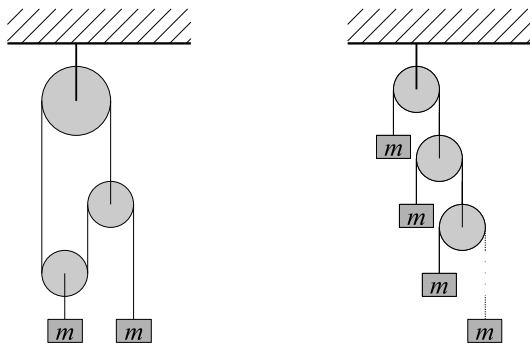


Máme horizontálny upevnený valec s polomerom r . Na ňom je navlečený prstenec s polomerom R (pochopiteľne $R > r$) a hmotnosťou M . Vypočítajte periódu malých kmitov tohto prstenca (v jeho rovine), ak po valci neprešmykuje.

FX A6 – KLDKY, str. 24



Tinka našla v pivnici obrovskú kopu lana a kladiek, preto sa rozhodla postaviť si kladkostroj. Ba dokonca dva! Jeden krajší ako druhý, ako to vidno na obrázkoch. Aké budú zrýchlenia jednotlivých telies po uvoľnení kladiek? Hmotnosti všetkých kladiek i lana sú zanedbateľné, počet kladiek na pravom obrázku považujte za nekonečne veľký.



FX A7 – MOTOROVÁ PÍLA, str. 32



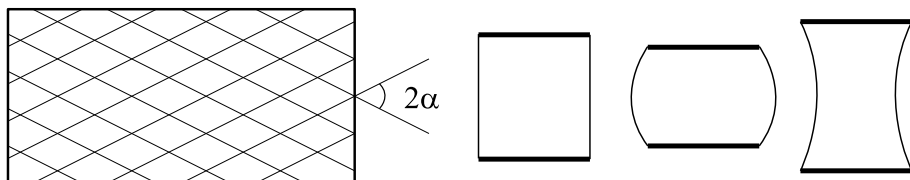
Predstavte si reťaz na motorovej píle. Jej dĺžka je L , hmotnosť M a úplne bez trenia sa napnutá pohybuje rýchlosťou v okolo dvoch valčekov s polomerom r . Predpokladajme, že valčeky sa neotáčajú. Reťaz nijakým spôsobom nepoháňame ani nespomaľujeme.

- (a) Za aký čas klesne jej rýchlosť pohybu na polovičnú?
- (b) Kvalitatívne popíšte (a zdôvodnite), čo sa stane s reťazou, ak by valčeky (a zvyšok motorovej pily) zrazu zmizli.

FX A8 – RUSKÝ SUD, str. 36



Fajo zháňal na trhu sud, do ktorého bude dávať jablká na pálenku. Jeden obchodník mu ponúkal veľmi zvláštny sud. Mal tvar valca, jeho podstavy boli z pevného kovu. Plášť je však vyrobený z pružnej gumovej látky, do ktorej sú votkané tenké ohybné a neroztiahnuteľné vlákna tak, ako na obrázku. Fajo sa hneď začal zaujímať, čo sa stane, ak do sudu natlakujeme vzduch. Ktorý z troch tvarov na obrázku zaujme sud v závislosti od uhla α ?



B – Optika

FX B1 – ZRKADLÁ, str. 40



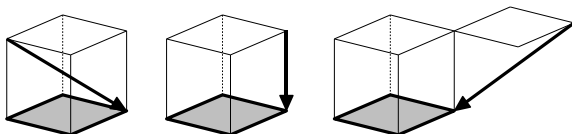
Polopriepustné zrkadlo s priepustnosťou α (kde $0 \leq \alpha \leq 1$) je také zrkadlo, na ktoré ak (z ľubovoľnej strany) zasvietime lúč s intenzitou I , prepustí lúč s intenzitou αI a odrazí lúč s intenzitou $(1 - \alpha)I$.

- (a) Filip zobral zrkadlo s priepustnosťou α_1 a hneď zaň postavil rovnobežné zrkadlo s priepustnosťou α_2 . Koľko svetla prepustí táto dvojica zrkadiel, ak na ňu spredu zasvietime lúč s intenzitou I ? Čo ak zasvietime zozadu?
- (b) Vlado sa nenechal zahanbiť. Vytiahol všetky polopriepustné zrkadlá, čo našiel v pivnici, a tiež ich postavil pekne za seba. Jeho zrkadlá majú priepustnosti $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, v tomto poradí. Ako sa bude správať táto sústava?

FX B2 – SVETLOMETY, str. 43



Bzdušo má stôl tvaru štvorca a chystá sa ho osvetliť zdrojom so svietivým výkonom P , a to dokonca takým, čo žiari do všetkých smerov rovnako. Týmto zdrojom sa blíži k rohu stola troma rôznymi spôsobmi (viď obrázok). Pri každom z nich vypočítajte hodnotu, ku ktorej sa blíži svietivý výkon dopadajúci na stôl, keď sa zdroj blíži k rohu stola. (Všetky hrany na obrázku okrem šípok sú rovnako dlhé a uhly medzi nimi pravé, útvary na obrázku sú teda kocky. Šípky naznačujú smer pohybu zdroja. Stôl je vyznačený šedo.)



FX B3 – MINCA, str. 47



Ujo z príkladov o minci na dne bazéna sa pozerá na mincu na dne bazéna. Vidí ju v hĺbke h a chce vedieť, v akej hĺbke sa nachádza naozaj. Stala sa mu však veľká galiba – nevidí ju totiž kolmo zhora, ako to už v takýchto príkladoch býva, ale pozerá sa na ňu pod uhlom α (vzhľadom na normálu hladiny). Pomôžte ujovi zrátať, v akej hĺbke sa nachádza minca naozaj!

FX B4 – VLÁKNO, str. 51



Maťo si minule kúpil optické vlákno dĺžky L a konečne si svoj počítač na intráku pripojil priamo ku serveru FKS. Jadro optického vlákna je dlhý valec polomeru r vyrobený zo skla s rôznymi prímiesami tak, aby sa rýchlosť šírenia svetla v ňom zvyšovala lineárne so vzdialenosťou od jeho osi. Index lomu v strede je n_1 , na kraji n_2 . V strede jednej jeho podstavy je bodový zdroj svetla, ktorý vyšle krátky svetelný impulz. Akú dĺžku trvania bude mať impulz prijatý na druhom konci optického vlákna? Rádové zanedbania sú prípustné, typické hodnoty veličín sú $L = 1 \text{ km}$, $r = 20 \mu\text{m}$, $n_1 = 1,445$, $n_2 = 1,44$.

C – Elektrické pole

FX C1 – GULKY, str. 60



Peťo rozostavil do medzihviezdneho priestoru 2009 všakovakých kovových guľiek. Gulky nabil nábojmi q , $-2q$, $3q$, ..., $-2008q$ a $2009q$, pričom q je kladné. Dokážte, že aspoň jedna z guľiek má na celom svojom povrchu kladnú hustotu náboja!

FX C2 – STAVEBNICA, str. 63



Marcelka dostala na narodeniny sadu bodových nábojov veľkosti Q a k nim všakovaké väzby. Hneď sa pustila do všelijakých experimentov a má na vás tieto otázky.

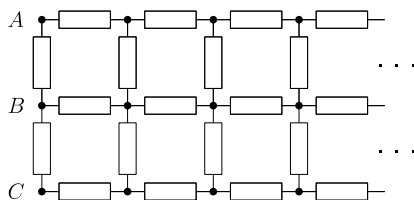
- Dva náboje fixujeme v priestore a tretí necháme voľne pohybovať po nimi danej priamke. Aká je jeho perióda kmitov v rovnovážnej polohe?
- Štyri náboje fixujeme vo vrcholoch štvorca, piaty necháme voľne pohybovať v nimi danej rovine. Nájdite jeho periódu kmitov v strede štvorca.
- Vymyslite konfiguráciu fixovaných nábojov v priestore tak, aby vznikla stabilná rovnovážna poloha pre ďalší náboj a vypočítajte jeho periódu kmitov v nejakom smere.

FX C3 – REBRÍK, str. 66



Juro si na chate postavil rebrík z rezistorov s odporom R . A to nie hocijaký, dokonca dvojité a nekonečný, tak ako na obrázku.

- Vypočítajte odpor medzi bodmi A a C .
- Vypočítajte odpor medzi bodmi A a B , ak sú body A a C vodivo spojené (vodičom s nulovým odporom).
- Vypočítajte odpor medzi bodmi A a B .



FX C4 – BALVAN, str. 73



Kubík našiel v Tatrách veľký balvan. Našiel si na ňom veľkú hladkú plochu a na ňu si nakreslil malý štvorec $ABCD$ so stranou a . Keď medzi body A a B pustil prúd I , medzi bodmi C a D nameral napätie U . Aký je merný elektrický odpor balvanu?

FX C5 – ŠKRUPINA, str. 77



Máme vodivú izolovanú guľovú škrupinu nabitú nábojom Q . Peto má bodový náboj rovnakej veľkosti a chce si ho niekam odložiť. Nájdite všetky jeho možné polohy v priestore také, že naň nepôsobí žiadna sila.

FX C6 – ČIARA, str. 83



Keď bola Marcelka na prednáške, Janka jej zo stavebnice s nábojmi zobrala dva rovnaké kladné náboje o veľkosti Q a priblížila ich do vzdialenosti d od seba. Potom si nakreslila siločiaru, ktorá vychádzala z jedného z týchto nábojov pod uhlom α ku spojnici oboch nábojov. Do akej najmenšej vzdialenosti od roviny symetrie nábojov sa táto siločiara dostane?

D – Gravitácia

FX D1 – PLOCHÁ ZEM, str. 96



Je všeobecne známe, že Zem je guľa s polomerom R . Kedysi si však ľudia mysleli, že Zem je nekonečná homogénna platňa s hrúbkou h . Zistite, aká by musela byť táto hrúbka h , aby bolo na „plochej Zemi“ rovnaké gravitačné zrýchlenie, ako je teraz. Predpokladajte, že hustota „plochej Zeme“ by bola rovnaká, ako je priemerná hustota Zeme teraz.

FX D2 – ASTEROID, str. 103



Azag sa hral so svojím novým ďalekohľadom, keď zrazu spozoroval pohybujúci sa asteroid. Azag zistil, že tento asteroid sa práve nachádza vo vzdialenosti d od Slnka, jeho okamžitá rýchlosť je v , a smer jeho rýchlosti zvierá uhol α so spojnicou asteroid-Slnko. Aká je jeho perióda obehu okolo Slnka?

FX D3 – POLGULE, str. 108



V rámci ekonomických opatrení pred oslavou jubilejného roku 3000 sa byrokracia rozhodla skrátiť výdavky tým, že odstrániť polovicu Zeme. Výkonná čata najprv rozrezala Zem na dve polgule a potom jednu z nich vymazala (príkazom delete, samozrejme).

- (a) Akou silou sa tieto dve polgule priťahovali?
- (b) Po vymazaní druhej polgule, aké bolo gravitačné zrýchlenie v mieste, kde sa kedysi nachádzal stred Zeme?

FX D4 – HMOTA, str. 113



Marián si kúpil asteroid s objemom V z plastickej hmoty o hustote ρ , a v priestore si vyznačil bod B . Ako má tento asteroid vytvárať a kam ho má umiestniť, aby bolo v bode B čo najväčšie gravitačné pole? Aká by bola veľkosť tohto gravitačného poľa, ak by parametre V a ρ asteroidu boli zhodné s týmito parametrami Zeme?

E – Mechanika II.

FX E1 – GUĽA, str. 120



Víla Amálka si svoju krištáľovú guľu položila na veľký stôl pokrytý obrusom. Keď mala slávnostnú náladu, veľkolepo strhla obrus zo stola (vodorovným pohybom). Aká bude rýchlosť gule po tom, ako na stole prestane prešmykovať? Môžete predpokladať, že toto sa stane ešte predtým, ako spadne zo stola, a že guľa pri strhaní obrusu neposkakuje. Polomer gule je R , hmotnosť M , koeficient trenia o obrus f_1 a o stôl f_2 .

FX E2 – KOLIESKA, str. 130



Marcel sa rád hrá s kolieskami. Minule vzal dve homogénne kolieska s hmotnosťou M a polomerom R a pripojil ich na opačné konce spoločnej ľahkej osky dĺžky $2L$ tak, aby sa mohli otáčať nezávisle od seba. Potom toto čudo položil na vodorovnú podložku a kolieska roztočil tak, aby sa oska otáčala uhlovou rýchlosťou ω okolo zvislej osi prechádzajúcej jej stredom. Aká je celková kinetická energia tohto čuda, ak kolieska neprešmykujú?

FX E3 – STRUNA, str. 139



Tina sa učí hrať na gitare. Okrem jej podmanivého zvuku ju však zaujala aj skutočnosť, že keď si gitaru naladí v teple domova a potom s ňou vyjde von do chladnej zasneženej noci, gitara už neladí. Aby ste Tine vysvetlili, ako je to možné, tak

- odvodte vlnovú rovnicu pre strunu;
- nájdite závislosť základnej frekvencie struny v závislosti od jej predĺženia ΔL ;
- zistite, ako sa zmení základná frekvencia struny, ak s gitarou zájdeme do treskúcej zimy s teplotou o ΔT menšou.

Struna má dĺžku $L = 0,8\text{ m}$ (jej časť na kobyľke zanedbávame), priemer $d = 0,6\text{ mm}$, je zhotovená z ocele s hustotou $\rho = 8000\text{ kg/m}^3$, modulom pružnosti $E = 220\text{ GPa}$ a tepelnou rozťažnosťou $\alpha = 11,10^{-6}\text{ K}^{-1}$ a na začiatku hrá s frekvenciou f_0 .

FX E4 – ŽĽAB, str. 145



Baša si na záhrade postavila dlhý žľab na odvod vody. Jeho šírka je b a sklon α . Keď sa raz rozpršalo, v žľabe tiekla voda prúdom o výške h (meranej kolmo na dno žľabu). Aký bol prietok vody žľabom, ak jej prúdenie považujeme za laminárne? Môžete predpokladať $h \ll b$.

FX E5 – RUTHERFORD, str. 150



Pán Rutherford znova vytiahol zo špajze zlatú fóliu a delo α častíc. Vystreľil α časticu rýchlosťou w smerom na jadro zlata, a ona sa mu odchýlila o uhol β (od pôvodného smeru letu). Zistite, o koľko pán Rutherford netrafil toto jadro zlata! (t.j. ako ďaleko od pôvodnej priamky letu sa toto jadro nachádzalo)

FX E6 – PINKAČKA, str. 158



Jano chce poraziť Jura v squashi a tak poctivo trénuje. Minule si napríklad zohnal loptičku s hmotnosťou m a škatuľu tvaru kvádra s hmotnosťou $M \gg m$. Potom kopol do škatule tak, aby sa šmýkala po zemi rýchlosťou v smerom kolmo na stenu, a do jej dráhy položil vo vzdialenosti D od steny nehybnú loptičku. Vypočítajte do akej najmenšej vzdialenosti od steny sa krabica dostane. Trenie škatule aj loptičky o zem považujte za nulové, všetky zrážky za dokonale pružné a predpokladajte, že krabica sa neotáča (celý pohyb loptičky sa deje na jednej priamke kolmej na stenu). Odpoveď stačí do prvého rádu v $\frac{m}{M}$.

FX E7 – VIA FERRATA, str. 164



Máme oceľové lano dĺžky $L = 20\text{ m}$, prierezu $S = 1\text{ cm}^2$, s medzou pevnosti $\sigma_t = 1\text{ GPa}$, hustotou $\rho = 8000\text{ kg.m}^{-3}$ a modulom pružnosti $E = 220\text{ GPa}$. Má slúžiť na zaistenej ceste v horách (t.j. na via ferrate) pre odvážneho feratistu na prelez ponad roklinu. Aby mohol byť takýto most uznaný bezpečným, tak napätie v lanách nesmie prekročiť 10-tinu medze pevnosti lana, ak je feratista s hmotnosťou $m = 80\text{ kg}$ v strede lana. Určte, akú najširšiu roklinu vieme pomocou tohoto lana prekonať za dodržania predpisov!

Straty hmotnosti feratistu v dôsledku fyziologických prejavov strachu môžete zanedbať.

FX E8 – JAMES BOND, str. 172

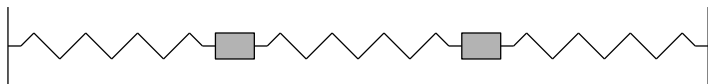


James Bond sa chystá na ďalšiu akciu, kde sa musí vyšplhať na strechu vysokého domu. Zaobstaral si kotvu o hmotnosti $M = 2\text{ kg}$, ktorú dokáže vystreliť rýchlosťou $v_0 = 25\text{ m/s}$. Kúpil si tiež horolezecké lano, ktorého jeden meter váži $\lambda = 100\text{ gramov}$. Do akej najväčšej výšky dokáže vystreliť kotvu (s upevneným lanom, samozrejme)? Odpor vzduchu neuvažujte.

FX E9 – PRUŽINKY, str. 178



Samo našiel N rovnakých teliesok s hmotnosťou m , $N + 1$ pružiniek s tuhosťou k , a jednu priamku. Pružinky teda pospájal za seba na priamku a medzi každé dve nasledujúce upevnil jedno teliesko. Začiatok prvej pružinky a koniec poslednej pevne zafixoval, ale telieska nechal voľne pohybovať po danej priamke. Na obrázku vidíte náčrt situácie pre $N = 2$:



- (a) Určte periódu všetkých harmonických pohybov, ktoré môže sústava vykonávať, pre $N = 2$.
- (b) Určte periódu všetkých harmonických pohybov, ktoré môže sústava vykonávať, pre $N = 3$.
- (c) Kvalitatívne popíšte, čo sa bude diať pre väčšie hodnoty N .

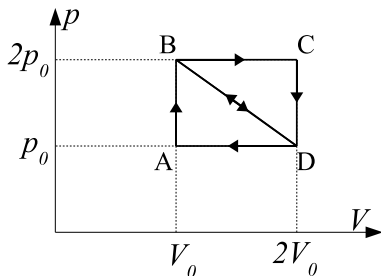
F – Termodynamika

FX F1 – PUDING, str. 188



Lenka navarila dva hrnce pudingu: jeden vanilkový a jeden čokoládový. Vanilkový puding má tepelnú kapacitu C_1 (nie mernú, t.j. už v $\text{J}\cdot\text{K}^{-1}$) a teplotu T_1 , čokoládový má kapacitu C_2 a teplotu T_2 . Koľko najviac energie vo forme makroskopickej práce z nich vie vyťažiť? (Puding pri tom nezje. Počítajte rýchlo, kým nevychladne!)

Judita sa rozhodla využiť teplo kompostoviska vo svojej záhradke na dobročinné účely. S tým zámerom si postavila dva vratné stroje periodicky pracujúce podľa dejov ABD a BCD . Pracovnou látkou je vzduch, pretože je lacný. Aký je pomer účinností týchto dejov?



G – Teória relativity a kozmológia

Kdesi ďaleko vybuchla supernova a obrovskou rýchlosťou vyvrhla materiál na všetky strany. Peťo tieto jej pozostatky už istý čas pozoruje so svojím ďalekohľadom. Pozná vzdialenosť supernovy D , zmeral aj uhlovú rýchlosť rozpínania jej obálky (vzďaľovania pozostatkov od hviezdy) ω , a tak si jednoduchým výpočtom ($v = D\omega$) vypočítal, že sa obálka rozpína rýchlosťou $4/3$ krát väčšou, ako je rýchlosť svetla. Akou rýchlosťou sa obálka rozpína naozaj? (Obálka supernovy sa rozpína rovnomerne.)

Peťo vyniesol do vesmíru svoju obľúbenú družicu. Družica sa dlho túlala hlbokým vesmírom a dostala sa až do vzdialenosti d od Zeme, keď jej začalo byť smutno a začala vysielat' rádiový signál s frekvenciou f . Kubo si chcel naladiť rádio na Peťovu družicu, a tak sa začal zamýšľať nad nasledujúcimi problémami.

- Akú frekvenciu signálu družice nameria Kubo, ak sa družica pohybuje (hoc i veľkou) rýchlosťou v smerom od Zeme?
- Akú frekvenciu signálu družice nameria Kubo, ak družica stojí, ale vesmír sa rovnomerne rozpína tak, že vzdialenosť medzi družicou a Zemou

sa v čase vysielania zväčšuje rýchlosťou v? Rovnomerné rozpínanie vesmíru v tejto úlohe znamená, že objektívna vzdialenosť medzi každými dvoma bodmi sa zväčšuje konštantnou rýchlosťou, pričom v každom momente je rýchlosť vzdďalovania sa dvojice bodov priamo úmerná vzdialenosti týchto bodov.

FX G3 – ZÁBAVNÉ FOTÓNY, str. 213



Halucinka našla na povale zopár fotónov vo veľmi dobrej nálade. Jej obľíbený elektrón je už niekoľko dní smutný a nehybne stojí na mieste, rozhodla sa ho teda obveseliť: poslala k nemu usmievavý fotón s vlnovou dĺžkou λ . S potešením zistila, že po tomto stretnutí sa elektrón predsa len začal pohybovať. Vyslaný fotón sa však pri stretnutí odchyľil od pôvodného smeru o uhol θ a zmenil svoju vlnovú dĺžku. Ako závisí nová vlnová dĺžka λ' fotónu a kinetická energia E elektrónu od uhla θ ?

Do rozbehnutého elektrónu po čase narazil druhý fotón. Po tejto zrážke zostal elektrón znova smutne stáť a fotón sa odchyľil do smeru, v ktorom sa pôvodne pohyboval prvý fotón. Aká je vlnová dĺžka odlietajúceho fotónu?

Nezabudnite, že rýchlosť elektrónu medzi zrážkami môže byť relativistická.

FX G4 – ENTERPRISE, str. 222



Cez vianočné prázdniny sa Marcel každoročne vracia z internátu domov. Keďže doma nemá internet, väčšinu času trávi hraním počítačových hier a pozeraním seriálov. Naposledy napríklad dal za jeden deň tolko dielov Star Trek-u, že mal sen, v ktorom bol na palube vesmírnej lode Enterprise. Tá sa práve nachádzala v časti vesmíru, odkiaľ bolo vidno hviezdy na oblohe rozmiestnené rovnomerne, t.j. tak, že počet hviezd na priestorový uhol $dN/d\Omega = \rho$ bol približne konštantný.

- (a) Aké rozdelenie hviezd by na lodi pozoroval, keby sa vzhľadom na predosľú sústavu pohyboval dopredu rýchlosťou v ?

Predstavte si, že by sme namiesto hviezd mali na oblohe monochromatické zdroje svetla s frekvenciou f s celkovým výkonom P .

- (b) Ako sa zmení frekvencia svetla v pohybujúcej sa sústave v závislosti od smeru, ktorým sa Marcel pozerá?
- (c) Čo vieme na základe častí (a) a (b) povedať o zmene hustoty žiarivého výkonu $\Pi = dP/d\Omega$ hviezdneho pozadia?

H – Matematické úlohy

FX H1 – ROMANTIČKA, str. 232



Bea nedávno čítala Malého Princa a rozhodla sa, že aj jej sa veľmi páčia západy slnka. Aby jej však nezovšedneli a aby si ich patrične vychutnala, odsťahovala sa na severný pól. Tam je totiž západ slnka len raz za rok, a navyše trvá sakramentsky dlho. Ozaj, ako dlho?

FX H2 – STARCRAFT, str. 236



Ferko a Tomáš sú zažratí do svojej obľúbenej počítačovej hry, klikajú ostošesť, stavajú armády, schyľuje sa k veľkej bitke. Tomáš posielal do boja X jednotiek, Ferko Y rovnakých jednotiek. Nájdite časový priebeh počtu jednotiek na oboch stranách, čas trvania bitky i konečný stav.

Môžete predpokladať, že obaja hráči sú skúsení – jednotky po sebe strieľajú fotónovými delami optimálnou stratégiou, a (kým sa nevykynožia), je ich veľmi veľa. Jedna jednotka stálym strieľaním zabije druhú (nebrániacu sa) za čas a .

FX H3 – BÚRKA, str. 241



Matúš práve sedel na lúke a počítal fyziku, keď sa zrazu prihnala veľká búrka. Počas búrky do zeme náhodne udierajú blesky, pričom na kilometer štvorcový za celú búrku priemerne udrie ρ bleskov. Aká je priemerná hodnota vzdialenosti Matúša a miesta, kde udel k nemu najbližší blesk?

FX H4 – MESIAC, str. 246



Kolkonásobne silnejšie žiari Mesiak v splne než v prvej štvrti? Uvažujte Lambertovský model rozptylu svetla na mesačnom povrchu.

FX H5 – ELEKTRICKÁ, str. 253



Ak vonku prší, schodíky na nástup do električky sú špinavé od blata. Keď sa však otvárajú a zatvárajú dvere, časť týchto schodíkov pri svojom pohybe poumývajú kefami pripevnenými na ich spodku. Vypočítajte tvar a plochu týchto poumývaných častí.¹ Všimnite si tiež horné upevnenie druhej dosky

¹Pri riešení uvažujte napríklad električky Tatra T3, kde sa jedno krídlo dverí skladá z dvoch rovnakých zvislých obdĺžnikových dosiek navzájom spojených kĺbom na zvislej hrane. Voľná hrana jednej z nich je upevnená na zvislej otáčavej tyči, hrana druhej má pohyb obmedzený v rovine prechádzajúcej touto tyčou.

dverí. V novších modeloch električiek tu nie je fixovaný jej horný roh v rovine zatvorených dverí, ale bod na upevnenom výstupku, pomerne ďaleko od samotných dverí. Čuduj sa svete, vodiaca lišta pre tento výstupok je tiež rovná. Akú polohu (vzhľadom na druhú dosku dverí) môže mať výstupok vo vodiacej lište, aby táto mohla mať tvar úsečky?

FX H6 – SKÚMAVKA, str. 260



Evka sa na biológii rada hrá so skúmkami, minule napríklad do skúmkavky tvaru valca s polomerom 1 cm naliala vodu a pozorovala, aký tvar bude mať jej povrch. Nájdite kontaktný uhol medzi povrchom vody a sklom, tiež nájdite celkové prevýšenie hladiny vody na kraji a v strede skúmkavky, a nakreslite tvar jej povrchu. Povrchová energia rozhrania voda-vzduch je 70 mJ.m^{-2} , energia rozhrania voda-sкло 40 mJ.m^{-2} a energia rozhrania sklo-vzduch 100 mJ.m^{-2} . Číselné výsledky úplne stačia.

A

Mechanika I.

Iste ste si už všimli že, hmotnosť je vlastne veličina charakterizujúca nechuť k pohybu. Napríklad, keď zjete jeden celý drevorubačov klátik (kilo rezňov, chlieb a baranie rohy), vaša chuť k hocíjakému aktívnemu pohybu prudko klesne. Človek je vlastne vcelku fyzikálne založený tvor.

TOMÁŠ RYBÁR, POZNÁMKA POD ČIAROU VO VZORÁKU FKS

FX A1 – LANO



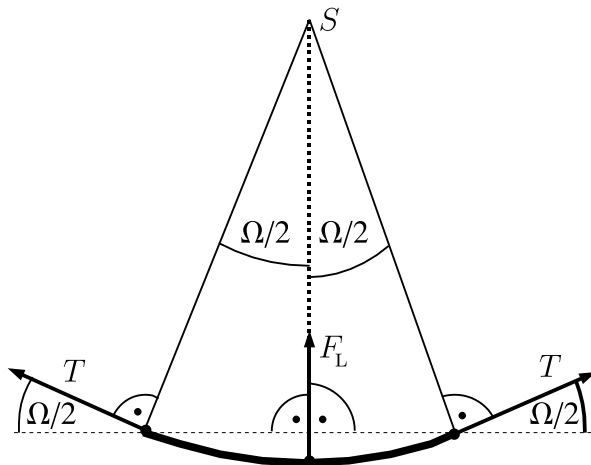
Horolezec Tomáš zliezol dokonale hladkú horu tvaru kužeľa s vrcholovým uhlom 2α , ale zabudol si na nej navlečenú kruhovú slučku lana hmotnosti m . Akou silou je napínaná táto slučka?

Zdroj: Úlohu vymyslel Kubus

✻ VZORÁK JAKUB ✻

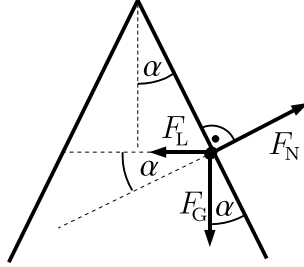
Hneď na úvod poviem, že tá historka s týpkom, čo zliezol horu, nám nijako nedeterminuje polohu lana, ktorú máme skúmať. Intuitívne všetci tušíme, že lano sa bude prirodzene rado nachádzať v horizontálnej rovine. Inak by zrejme malo väčšiu potenciálnu energiu v tiažovom poli Zeme (aj keď ma vôbec nenapadá, ako to jednoducho ukázať; inak ani zložito ma to nenapadá :-)).

Podme k veci: máme lano vo vodorovnej rovine. Príklad vykazuje symetriu voči osi kužeľa. To využijeme – totiž môžeme skúmať ľubovoľný kúsok lana o dĺžke $R\Omega$ a hmotnosti $\frac{m}{2\pi}\Omega$, ktorý obťáča kužeľ $R/\tan\alpha$ pod jeho vrcholom a uhol, ktorý mu prislúcha je Ω . Viď obrázok zhora, kde je do bodu S projektovaná rotačná os našej hory.



Na tomto obrázku aj pekne vidíme napätie v lane T , ktoré sa každý kúsok snaží natiahnuť. Nakoľko je situácia rotačne symetrická, tak je jasné,

že na každý jeden kúsok lana musia pôsobiť z oboch strán rovnaké napätia. Výborne, potom ich výslednica, viď obrázok, smeruje do rotačnej osi a má veľkosť $2T \sin \frac{\Omega}{2}$, čo sa však pre malé Ω (a ja si môžem zvoliť Ω ľubovoľne malé!) rovná $T\Omega$. To je sila F_L z druhého obrázka, ktorý ukazuje situáciu z boku. Ešte vyjadrím $F_G = \frac{mg\Omega}{2\pi}$. Keďže sa náš sledovaný kúsok lana nehýbe, tak musia byť sily v rovnováhe.



To nutne platí aj pre zložky síl kolmé na normálu kužeľa v mieste študovaného lana (čiže kolmé na F_N – lebo to je normálová sila, keďže trenie je nulové), z čoho dostanem podmienku $F_G \cos \alpha = F_L \sin \alpha$, čo mi po vyjadrení F_G a F_L dá

$$\frac{mg\Omega}{2\pi} \cos \alpha = T\Omega \sin \alpha, \quad \text{a teda} \quad T = \frac{mg}{2\pi \tan \alpha}.$$

K tomuto výsledku sa dá dopracovať trochu trikovy aj iným zaujímavým a častokrát veľmi efektívnym spôsobom cez virtuálne práce. Metóda virtuálnych prác vychádza z toho, že teleso je v rovnovážnej polohe vtedy, keď malým posunutím nič na svojej potenciálnej energii nestratí ani nezíska (do prvého rádu).

Skúsme teda uvažovať pružné lano napínané silou T . Pozrime sa teraz, čo sa stane s lanom, keď ho posunieme o kúsok, označme h , nadol (nahor). Potom sa polomer slučky zväčší (zmenší) o $h \tan \alpha$ a teda energia lana v dôsledku jeho pruženia stúpne (klesne) o približne $2\pi h T \tan \alpha$. Zároveň ale klesne (stúpne) jeho potenciálna energia v tiažovom poli, a to o mgh . Má platiť

$$2\pi h T \tan \alpha - mgh = 0 \quad \Rightarrow \quad T = \frac{mg}{2\pi \tan \alpha},$$

čo je náš predošlý výsledok. Tu by bolo fajn ešte urobiť diskusiu o tom, či to môžeme urobiť pre absolútne tuhé lano. Odpoveď sa mi hľadať nechce. Ani netreba, lebo vo svete absolútne nepružné laná neexistujú – čiže diskusia by nemala veľkú hodnotu. A pre malé natiahnutia môžeme vždy aproximovať, že napätie lana sa veľmi nezmení (stačí natahovať o infinitenzimálne málo), čo náš postup odobruje. Hotovo.

FX A2 – ŠPIRÁLA

☆☆☆☆☆

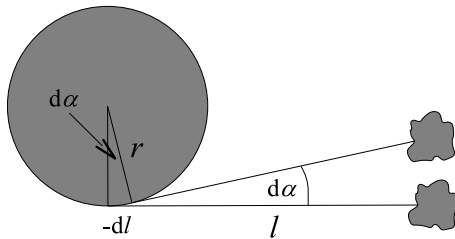
Fajo našiel vo vesmíre dlhý a veľmi ťažký valec s polomerom r . Na jeho plášti bol uviazaný špagát s voľnou dĺžkou L , s malým kamienkom pripevneným na druhom konci. Ako správny fyzik, Fajo natiahol špagát tak, aby sa uviazaným koncom práve dotýkal valca, a kamienku udelil rýchlosť v kolmú na špagát tak, aby sa začal namotávať v rovine kolmej na os valca. Za aký čas sa špagát úplne namotá na valec?

Zdroj: Úlohu vymyslel Bzdušo

🍃 VZORÁK BZDUŠO 🍃

Mnohé úlohy sa veľmi zjednodušia, ak nájdeme nejaký zákon zachovania. Zdá sa to neuveriteľné, ale náš kamienok sa bude celý čas pohybovať počiatočnou rýchlosťou. Jediná sila, ktorá naň pôsobí, je ťah v špagáte, a ten je kolmý na smer pohybu. Nekoná preto žiadnu prácu a energia kamienka sa nemení. Keďže sme vo vesmíre, ďaleko od gravitačných polí a odporových prostredí, jedinou relevantnou formou energie je kinetická energia. Navyše valec, o ktorý je kamienok pripevnený, je veľmi ťažký, takže nebude odoberať skoro žiadnu energiu. (Rozmyslite si!) Rýchlosť kamienka sa preto meniť nebude.

Máme poznatok, s ktorým sa dajú robiť mĺľové kroky. Obzrime si situáciu na obrázku v čase, keď dĺžka nenamotaného povrázku je l a sledujme, ako sa zmení situácia o čas dt .



Filip Kubina riešil túto úlohu nasledovne: Všimnime si, že za tento čas sa špagát otočí o uhol $d\alpha$ a o ten istý uhol sa otočí aj bod, v ktorom sa špagát dotýka valca. Špagát sa skráti o tú svoju časť, ktorá sa namotá na valec, preto

$$dl = -r d\alpha.$$

V každom okamihu akoby sa špagát otáčal okolo bodu, kde sa dotýka valca, rýchlosťou v . Možno preto povedať, že uhlová rýchlosť kameňa okolo tohto bodu² je $\omega = \frac{v}{l}$, kde l je okamžitá dĺžka nenamotanej časti špagátu. Z pohybu kameňa kožmo potom vyčítať

$$d\alpha = \omega dt = \frac{v}{l} dt.$$

Ak toto dosadíme to vzťahu pre skrátenie voľnej časti špagátu, dostaneme

$$dl = -r \frac{v}{l} dt.$$

Rovnicu rozseparujeme a zintegrujeme:

$$\int_L^0 l \, dl = \int_0^T -rv \, dt.$$

To vedie rýchlou cestou k výsledku

$$\frac{L^2}{2} = rvT, \quad \text{čiže} \quad T = \frac{L^2}{2rv}.$$

Iný prístup k riešeniu zvolil a k správne výsledku sa dopracoval Jan Hermann. Pozrime sa na situáciu v rovine, kde sa namotáva špagát. Ak si ju navyše natočíme tak, že na začiatku sa špagát dotýkal valca v bode $\mathbf{A} = [r, 0]$ a kamienok bol v bode $\mathbf{B} = [r, L]$, kamienok sa začne pohybovať proti smeru hodinových ručičiek. Voľná časť špagátu bude mať v závislosti od uhlu namotania α dĺžku $l = L - \alpha r$. Polohu kamienka budú určovať dva vektory: poloha bodu, kde sa špagát dotýka valca vzhľadom na stred valca a poloha kamienka vzhľadom na tento styčný bod. Poloha kamienka v našej súradnicovej sústave je súčtom týchto vektorov, použitím čoho sa možno dopracovať k rovniciam

$$x = r \cos \alpha - (L - \alpha r) \sin \alpha,$$

$$y = r \sin \alpha + (L - \alpha r) \cos \alpha.$$

Keď sa uhol zmení o $d\alpha$, obe súradnice sa máličko posunú a z Pytagorovej vety možno povedať, že prejdená dráha je

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{\left(\frac{dx}{d\alpha}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\alpha}\right)^2} d\alpha.$$

²Ten sa s časom síce mení, ale to nie je žiadnou prekážkou.

Na začiatku bolo lano navinuté o nulový uhol, na konci pohybu bude navinuté o uhol $\frac{L}{r}$. Prejdená dráha je preto jednoducho

$$s = \int_0^{\frac{L}{r}} \sqrt{\left(\frac{dx}{d\alpha}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\alpha}\right)^2} d\alpha.$$

Jediné, čo ostáva, je porátať tie škaredo vyzerajúce derivácie, umocniť ich na druhú a odmocniť. Človek by si pomyslel, že to bude nespočítateľné, ale môžete sa presvedčiť, že po všetkých týchto úpravách dostanete pekne vyzerajúci a zintegrovateľný vzťah

$$s = \int_0^{\frac{L}{r}} (L - \alpha r) d\alpha = \frac{L^2}{2r}.$$

Vieme, že túto dráhu prejde kamienok konštantnou rýchlosťou v , takže sa namotá za čas

$$T = \frac{s}{v} = \frac{L^2}{2rv}.$$

Čo viac sa dá ešte dodať? :-)

FX A3 – MOMENTKY



Vypočítajte bez použitia integrálov moment zotrvačnosti

- (a) *obdĺnikovej dosky vzhľadom na uhlopriečku,*
- (b) *kocky vzhľadom na os prechádzajúcu stredmi dvoch protilahlých stien,*
- (c) *pravidelného štvorstenu vzhľadom na os prechádzajúcej vrcholom a stredom protilahlej steny.*

Zdroj: Úlohu vymyslel Kubus

 VZORÁK BZDUŠO & KUBUS 

Najprv si spomeňme, čo je moment zotrvačnosti podľa nejakej osi. Ak máme len jediný hmotný bod, momentom zotrvačnosti nazývame veličinu $J = mr^2$, kde m je hmotnosť nášho hmotného bodu a r je jeho vzdialenosť od danej osi. Ak máme týchto hmotných bodov viac, celkový moment zotrvačnosti bude súčtom príspevkov od všetkých bodov. No a ak je tých hmotných bodov celé teleso, pripíšeme husací krk a suma sa zmení na integrál. Takže moment zotrvačnosti všeobecného telesa je

$$J = \int_M r^2 dm = \int_V r^2 \rho dV \quad (1)$$

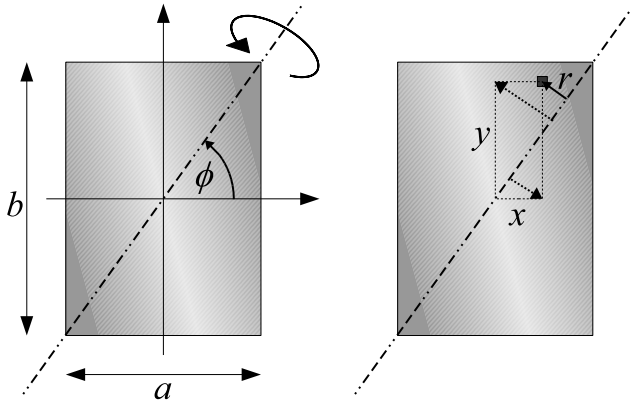
Vidíme ho tam, hada! Naskytá sa otázka, ako sa integrálu vo výpočte možno zbaviť. Skôr, než si tento malý zázrak ukážeme, cvične si spočítame časť (a) aj pomocou integrálov.

Časť (a)

Takže najprv to skúsime škaredo pointegrovat', vyjdeme priamo z definície (1). Keďže doska je skoro plošný útvar, hrúbku môžeme zanedbať a náš integrál sa zmení na dvojrozmerný:

$$J_a = \int_S r^2 \sigma dS, \quad (2)$$

kde σ je plošná hustota dosky, rovná tiež M/ab , ak si označíme jej hmotnosť M a rozmery a krát b . Dĺžka uhlopriečky je potom $u = \sqrt{a^2 + b^2}$. Zvoľme si súradnicový systém s osami x a y rovnobežnými so stranami obdĺžnika a počiatkom v jeho strede a označme si ešte uhol, ktorý zvierá uhlopriečka so stranou dĺžky a ako ϕ .



Potom vzdialenosť bodu so súradnicami $[x, y]$ od uhlopriečky bude $r = |y \cos \phi - x \sin \phi|$.³ Avšak $\sin \phi = b/u$ a $\cos \phi = a/u$. Teraz už môžeme spokojne integrovať:

$$\begin{aligned} J_a &= \int_{-a/2}^{+a/2} \int_{-b/2}^{+b/2} (y \cos \phi - x \sin \phi)^2 \sigma \, dy \, dx \\ &= \sigma \int_{-a/2}^{+a/2} \int_{-b/2}^{+b/2} \left(y^2 \frac{a^2}{u^2} + x^2 \frac{b^2}{u^2} - 2xy \frac{ab}{u^2} \right) dy \, dx \end{aligned}$$

Všimnime si, že posledný člen v zátvorke sa zo symetrie vyhubí, pretože integrujeme od *mínus* dačo po *plus* dačo. Preto ho hneď teraz vynecháme z počítania. Teraz je na ľubovôli, podľa ktorej premennej budeme integrovať ako podľa prvej. My si zvolíme y !⁴

$$\begin{aligned} J_a &= \sigma \int_{-a/2}^{+a/2} \left[\frac{y^3}{3} \frac{a^2}{u^2} + yx^2 \frac{b^2}{u^2} \right]_{y=-b/2}^{y=+b/2} dx \\ &= \frac{M}{ab} \int_{-a/2}^{+a/2} \left(\frac{a^2 b^3}{12u^2} + x^2 \frac{b^3}{u^2} \right) dx \\ &= \frac{M}{ab} \left[x \frac{a^2 b^3}{12u^2} + \frac{x^3}{3} \frac{b^3}{u^2} \right]_{x=-a/2}^{x=+a/2} \\ &= \frac{M}{6} \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2} \end{aligned} \tag{3}$$

³Na pravom z dvojice obrázkov je vzdialenosť r rozdielom dĺžok znázornených prerušovaných šípok. Tie predstavujú kolmice na uhlopriečku spustené z bodov $[x, 0]$ a $[0, y]$.

⁴Ide o zvoláciu vetu, preto vykričník. Podobne ako vo vete „Vyberám si teba, Píka-chu!“ ©

Celkom pekný výsledok. Hneď máme pocit, že by sa k nemu mohlo dať prísť aj nejako jednoduchšie. Radi by sme vám teraz predstavili jeden ne-tradičný postup na hľadanie momentu zotrvačnosti niektorých telies. Spomeňme si na dve veci:

- Prax nám hovorí,⁵ že moment zotrvačnosti homogénnych telies určitého tvaru sa dá vždy vyjadriť ako

$$J = Mf(x_1, x_2, \dots), \quad (4)$$

kde M je celková hmotnosť telesa a $f(x_1, x_2, \dots)$ je funkcia od rôznych dĺžkových parametrov telesa (napr. dĺžky hrán kvádra) majúca rozmer meter štvorcový. To však znamená, že funkcia f musí spĺňať podmienku.

$$f(cx_1, cx_2, \dots) = c^2 f(x_1, x_2, \dots). \quad (5)$$

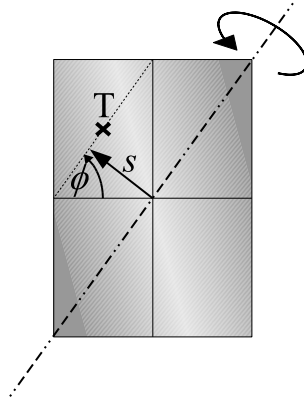
- Steinerova veta nám vraví, že ak moment zotrvačnosti telesa o hmotnosti m okolo nejakej osi prechádzajúcej ťažiskom je J_t , tak okolo inej *rovnobežnej* osi ktorá je vo vzdialenosti r od ťažiska bude mať to isté teleso moment zotrvačnosti

$$J' = J_t + mr^2.$$

Ako by sme to mohli využiť? Rozdeľme si pôvodný obdĺžnik na 4 menšie s polovičnými dĺžkami strán. Moment zotrvačnosti J_a je zrejme súčtom momentov od všetkých častí. Vidíme, že dva z nich majú nulovú vzdialenosť ťažiska od osi. Ďalšie dva majú ťažisko od osi vzdialené o

$$s = \frac{a}{2} \sin \phi = \frac{ab}{2u} = \frac{ab}{2\sqrt{a^2 + b^2}}. \quad (6)$$

⁵A nielen prax, ale aj zdravý rozum. Spomeňme si na definíciu (1). Keby sme zväčšili hustotu telesa k -násobne a zachovali rozmery, tak sa každý príspevok do súčtu zväčší k -násobne aj celá hmotnosť sa zväčší k -násobne. Ľafa, $J \sim m$. Analogicky si vieme odvodiť, že keby sme všetky rozmery telesa c -násobne zväčšili, výsledný moment zotrvačnosti sa zväčší c^2 -násobne. To už ale znamená, že MZ *musí* mať tvar (4).



Nič nám nebráni zapísať rovnosť:

$$J_a = J_a$$

$$Mf(a, b) = 2 \left(\frac{M}{4} f \left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2} \right) \right) + 2 \left(\frac{M}{4} f \left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2} \right) + \frac{M}{4} s^2 \right) \quad (7)$$

Spomeňme si na rovnicu (5) a dosadíme aj za s zo (6). Pre jednoduchosť označme $F = f(a, b)$. Tak dostávame rovnicu a následne upravujeme

$$MF = 2 \left(\frac{M}{4} \frac{F}{4} \right) + 2 \left(\frac{M}{4} \frac{F}{4} + \frac{M}{4} \frac{a^2 b^2}{4(a^2 + b^2)} \right)$$

$$F = \frac{1}{4} F + \frac{1}{8} \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2}$$

$$F = \frac{1}{6} \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2} \quad (8)$$

Spomeňme si, že $J_a = MF$ a dostávame znova ten istý výsledok.⁶

Časť (b)

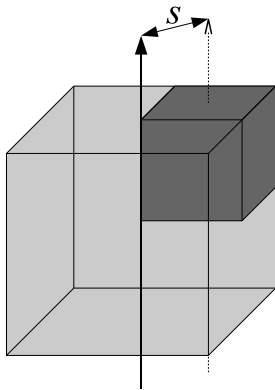
Tu sa už nejedeme zdržovať integrálmi. Pri kocke existuje dokonca viacero šikovních spôsobov na nájdenie momentu zotrvačnosti,⁷ no my ostáme pri práve objavenom triku.

Označme hmotnosť kocky M , jej dĺžku hrany a a začnime počítať. Moment zotrvačnosti kocky bude $J_b = Mf(a) = MF$. Rozdeľme si kocku na 8 malých kocočiek s polovičnou dĺžkou hrany. Tie budú mať osminovú hmotnosť a polovičnú dĺžku hrany. Ich moment zotrvačnosti by teda bol

⁶Akoby inak! Pán Steiner bol zaiste veľmi múdry!

⁷Nedá mi však nespomenúť tento: (pozri ďalšiu stranu)

$J'_b = \frac{M}{8} f(a/2) = \frac{M}{8} \frac{F}{4}$. Ku všetkému sa ich ťažiská nachádzajú vo vzdialenosti $s = \frac{a\sqrt{2}}{4}$ od osi pôvodnej osi, ako to pekne vidno na nasledujúcom obrázku:



Tak môžeme hneď zapísať rovnicu a riešiť:

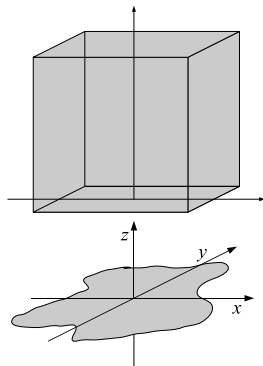
$$\begin{aligned}
 MF &= 8 \left(\frac{M}{8} \frac{F}{4} + \frac{M}{8} \frac{a^2}{8} \right) \\
 MF &= \frac{1}{4} MF + \frac{1}{8} Ma^2 \\
 J_b = MF &= \frac{1}{6} Ma^2
 \end{aligned} \tag{9}$$

Jednoduché, nie? Tak isto by sme mohli spočítat aj moment zotrvačnosti kocky okolo telesovej uhlopriečky alebo okolo osi spájajúcej stredy dvoch protiľahlých hrán. Skúste si to.

Keby sme našu kocku zlisovali, vzdialenosti jednotlivých bodov od osi sa nezmenia. Vzniknutý štvorec má teda rovnaký MZ. Pre všetky rovinné telesá (napr. na dolnom z dvojice obrázkov) však platí $J_z = J_x + J_y$, čo možno odvodiť z Pytagorovej vety

$$J_z = \int (x^2 + y^2) dm = \int x^2 dm + \int y^2 dm = J_y + J_x$$

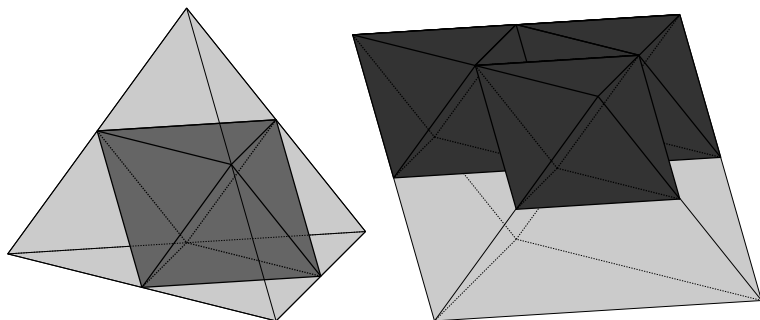
V prípade nášho štvorca si ponecháme pôvodnú os a zvolíme si ešte dve osi spájajúce stredy jeho protiľahlých strán. Ale okolo každej z týchto dvoch osí má štvorec rovnaký MZ ako úsečka okolo osi kolmej na jej stred. A to je už známa tabuľková hodnota. Dostať sa k MZ kocky je potom už len vec násobenia dvomi.



Časť (c)

„...Štvorsten ... veď to nemôže byť o nič ľahšie. Rozdelíme si štvorsten na menšie štvorsteny a ... ale počkať! Veď to sa predsa nedá!“ Áno, nedá. Ale predsa len sa skúsime trochu s tou geometriou pohrať. Majme štvorsten o hmotnosti M a strane a . Z jeho rohov teraz vyrežeme 4 štvorsteny s polovičnou dĺžkou hrany. Čo nám to ostalo?

Veľmi rýchlo sa presvedčíme, že tento „ohryzok“ má 8 stien v tvare rovnostranných trojuholníkov s dĺžkou strany $a/2$.⁸ Osemsten!



Ak z vrcholov tohoto osemstenu vyrežeme 6 osemsteníkov s polovičnou dĺžkou hrany, čo nám ostane? Na pravom z dvojice obrázkov vidno, že to nebude jedno teleso, ale hneď niekoľko. Po chvíli bádania zistíme, že sme dostali 8 štvorsteníkov. A čuduj sa svete, všetky majú tú správnu orientáciu.⁹

Niečo nám našepkáva, že by sme mohli zabiť dve muchy jednou ranou, tak uvažujme nielen moment zotrvačnosti štvorstenu $J_c = Mf$, ale aj osemstenu (vzhľadom na os prechádzajúcu stredmi dvoch protiľahlých stien) $J_d = mg$, kde M , resp. m je hmotnosť štvorstenu, resp. osemstenu a f , g sú neznáme funkcie od dĺžky ich hrany x , spĺňajúce funkcionálnu rovnicu

$$f(c_1x) = c_1^2 f(x) \quad \text{resp.} \quad g(c_2x) = c_2^2 g(x).$$

Súčasne tiež označme $f(a) = F$ a $g(b) = G$, kde $b = a/2$ je dĺžka hrany ohryzku vzniknuvšieho pri prvom „ohrýzaní“.

Dost' označovania, zapíšme konečne rovnice. Na ľavom obrázku vidíme, že pôvodný štvorsten možno nahradiť jedným osemstenom polovičnej a štyrmi štvorstenmi osminovej hmotnosti, všetko s polovičnou dĺžkou hrany. Spomedzi všetkých sa ťažiská troch štvorstenov nachádzajú vysunuté od pôvodnej

⁸Po jednom ostalo na každej stene a po jednom vzniklo pri každom reze.

⁹Štyri sú „hore nohami“, ale to nám neprekáža. Dôležité je, aby ich osi, vzhľadom na ktoré počítame MZ, boli rovnobežné.

osi o $a\sqrt{3}/6$, teda v písmenkách

$$MF = \frac{M}{2}G + 4 \left(\frac{M}{8} \frac{F}{4} \right) + 3 \left[\frac{M}{8} \left(\frac{a\sqrt{3}}{6} \right)^2 \right].$$

Teraz čo vidíme na pravom obrázku: Z osemstenu vznikne 6 osemsteníkov s polovičnou dĺžkou hrany. Hneď zo symetrie vidno, že ich ťažiská sú od osi rovnako vzdialené, konkrétne o $a\sqrt{3}/12$.¹⁰ S polovičnými rozmermi musia mať osminovú hmotnosť. Aby sa nám hmotnosť nestrácala, vieme si spočítať, že každý jeden štvorsten tvorí $1/32$ hmotnosti osemstenu, teda má hmotnosť $M/64$.

Ak si ešte overíme, že dva z týchto 8 štvorsteníkov majú ťažisko na pôvodnej osi a ostatných 6 vo vzdialenosti $a\sqrt{3}/12$, môžeme zapísať druhú rovnicu

$$\frac{M}{2}G = 6 \left[\frac{M}{16} \frac{G}{4} + \frac{M}{16} \left(\frac{a\sqrt{3}}{12} \right)^2 \right] + 8 \left(\frac{M}{64} \frac{F}{16} \right) + 6 \left[\frac{M}{64} \left(\frac{a\sqrt{3}}{12} \right)^2 \right].$$

Máme dve rovnice o dvoch neznámych. Ak sa zbavíme všade prítomnej hmotnosti M a dáme dokopy zlomky s rovnakými písmenkami, dostávame ich v krajšom tvare:

$$\frac{7}{8}F = \frac{1}{2}G + \frac{1}{32}a^2 \quad \text{a} \quad \frac{13}{32}G = \frac{1}{128}F + \frac{5}{512}a^2$$

Síce sa to nezdá, ale táto sústava má celkom sympatické riešenie

$$F = \frac{1}{20}a^2 \quad \text{a} \quad G = \frac{1}{40}a^2.$$

Ale to je už nielen riešenie našej úlohy! Ako bonus sme spočítali aj moment zotrvačnosti osemstena. Výsledky teda sú:

$$J_c = \frac{1}{20}Ma^2 \tag{10}$$

$$J_d = \frac{1}{40}ma^2 = \frac{1}{10}mb^2, \tag{11}$$

kde sme u oboch telies vyjadrili výsledok pomocou ich hmotnosti a ich dĺžky hrany. (Pripomeňme, že u osemstena $b = a/2$.)

Nabádame čitateľov, aby si týmto spôsobom skúsili vypočítať iné zaujímavé momenty zotrvačnosti a pokochali sa scenériou bez akéhokoľvek integrovania.¹¹ Kto sa dočítal až sem, tiež by mohol považovať za zaujímavé

¹⁰Premyslite si!

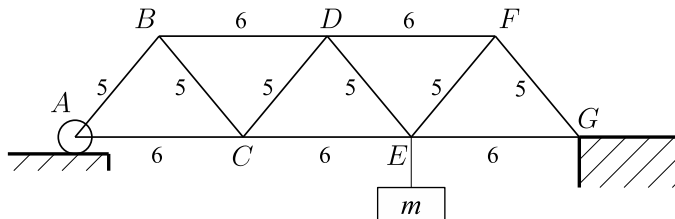
¹¹Scenária s integrovaním môže byť často veľmi zaujímavá najmä pre milovníkov adrenalínových športov.

zistenie, že moment zotrvačnosti kocky, štvorstena i osemstena je rovnaký vzhľadom na všetky osi prechádzajúce ťažiskom. Kľúčové slovo: sférický zotrvačník.

FX A4 – MOST



Katka si medzi poličkou a stolom postavila most. Most je tvorený ľahkými tyčami voľne spojenými kĺbmi, tak ako na obrázku. Dĺžky šikmých a vodorovných tyčí sú v pomere 5:6. V bode E je zavesené závažie s hmotnosťou m . Ktoré z tyčí môže Katka nahradiť ohybnými väzbami, t.j. napríklad pevným špagátom rovnakej dĺžky? Akou silou je namáhaná tyč BD ?



Zdroj: Feynmanove prednášky z fyziky

✿ VZORÁK FILIP ✿

Skôr, než sa pustíme do riešenia príkladu, zamyslime sa nad ohybnými väzbami. Tyč sa od ohybnej väzby – napríklad nejakého špagátiku – líši len v tom, že má stály tvar. Ohybná väzba sa môže ľubovoľne krčiť (teda skracovať), no nemôže sa natahovať. Zjavne teda nič nepokazíme, ak tyče, ktoré sú natahované, nahradíme špagátikmi. Tyče, ktoré sú stláčané, však nahradiť nemôžeme.¹²

Po tomto zamyslení sa pustíme na príklad. Ukážeme si tu tri rôzne postupy. Jeden je priamo cez sily, druhý a tretí cez energie.¹³

Sily:

V prípade, že sa rozhodneme počítať sily, tak si stačí napísať veľa rovníc o veľa neznámych a snažiť sa vyrátať silu F_{BD} . To je dosť nepríjemné. Našťastie môžeme využiť matice.¹⁴ To sa ľahko hovorí, ale ťažšie sa to aplikuje

¹²Mohli by sme ich však nahradiť napríklad telesom, ktoré je nestlačiteľné, ale pri rozťahovaní sa rozpadne. Taká veža z drevených kociek je pekným príkladom takéhoto čuda odolného len stlačeníu.

¹³Metódou tzv. *virtuálnych posunutí* a *virtuálnych prác*.

¹⁴Riešenie cez sily nie je matematicky jednoduché. Ba dokonca nie je vôbec elegantné! Ak neviete, čo sú to matice, prejdite priamo na elegantné riešenie cez energie, ktoré sa nachádza o pár strán ďalej.

v praxi. Čo to za rovnice v nej používame? Jednoduché rovnice zohľadňujúce rovnováhu síl. Pre každý kĺb musí platiť, že výsledná sila naň pôsobiaca je nulová – ináč by sa daný kĺb pohyboval so zrýchlením, čo je v statickej situácii očividne neprípustné. Zapišeme si teda všetkých 6 rovníc pre horizontálne zložky síl pôsobiace na body A až F (prvých 6 riadkov v matici) a následne aj vertikálne zložky síl pre body B až F tak, že prvý stĺpec zodpovedá koeficientom pri sile F_{AB} , druhý koeficientom sily F_{AC} , tretí F_{BC} , atď. Prečo používame práve tieto rovnice? Prečo nie. Sú pekné, je ich dostatočný počet a hlavne sú lineárne nezávislé¹⁵.

Treba si však uvedomiť pár detailov. Aké sily pôsobia na koncoch mosta? Práve tu je dôležité, že bod A je na koliesku. Hoci tam pôsobí nejaká (zatiaľ neznáma) vertikálna sila, horizontálna zložka musí byť nulová, ináč by sa koliesko hýbalo. Na most pôsobí tiažová sila smerom dole a teda vieme, že aby bola celková výslednica síl pôsobiaca na most nulová, horizontálna zložka musí byť nulová aj v bode G . Je celkom očividné, že súčet vertikálnych zložiek je rovný tiaži. Keď už máme premyslené rovnice, tak si dajme pozor na znamienka. Zvolíme si smer súradnicových osí a píšeme. Keďže výslednica síl pôsobiacich na tyče musí byť nulová, tyč pôsobí na oboch koncoch opačne orientovanou silou.

A už nám nič nebráni pustiť sa do písania. Toto je teda naša matica, ktorú chceme upraviť. Pre prehľadnosť sme ju vynásobili piatimi (násobením sa nič nepokazí).

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 3 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & -3 & 0 & 3 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & -3 & 0 & 3 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -5 & -3 & 0 & 3 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -5 & -3 & 0 & 3 & 0 \\ -4 & 0 & -4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & 0 & -4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 4 & 0 & 0 & 5mg \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & 0 & -4 & 0 \end{pmatrix}$$

¹⁵O čom sa dá presvedčiť úpravami našej matice alebo zamyslením sa.

Úpravou tejto matice na redukovaný stupňovitý tvar¹⁶ dostávame maticu

$$A = mg \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -5/12 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5/12 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -5/12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3/4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5/12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 5/6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -10/12 \end{pmatrix}$$

Skvelé, máme to, čo sme chceli! Sila $F_{BD} = -\frac{m \cdot g}{2}$. Po toľkej radosti si však prezradíme aj malý problém takéhoto riešenia. Časová zložitosť tohto počítania je $O(n^2)$, čiže pri veľkom moste by sme sa naozaj narátali.¹⁷ Na druhej strane je však veľkým potešením, že po vyriešení matice dostaneme darček zdarma¹⁸ – zoznam tyčí, ktoré môžeme nahradiť špagátikom. Sú to práve tie koeficienty, ktoré vyšli kladné, čo znamená, že ťahajú kĺb k sebe. Sú to tyče AC , BC , CE , DE , EF , EG .

Energie a momenty síl:

Tu stačilo ukázať (a zdôvodniť), ktoré palice sú nahraditeľné a následne vypočítať silu pôsobiacu na tyč BD .

Pri zdôvodňovaní využijeme princíp virtuálnych prác. Hoci máme „dokonale tuhé“ paličky, predstavme si, že nie sú spojené pevným kĺbom, ale držia ich malí trpaslíci.¹⁹ Teraz si predstavme, že trpaslík rozpaží jednu ruku, čo je veľmi podobné situácii, ako keby sa palička predĺžila o dx .²⁰ Čo sa stane s energiou sústavy? Principiálne sú možné tri výsledky. Potenciálna energia sústavy sa zväčší, zmenší alebo nezmení. Ak sa potenciálna energia zväčší, trpaslík musí vykonať prácu, a preto môžeme povedať, že palica je stláčaná. Naopak, ak sa potenciálna energia zmenší, trpaslík musí tejto zmene zabráňovať, palica je ťahaná. To, že by sa potenciálna energia nezmenila, sa nám nestane, ale znamenalo by to, že tu nepôsobí žiadna sila a teda žiadnu tyč ani nepotrebuje. Aké jednoduché.

¹⁶Tak sa volá tá vec, na ktorú sa matica pri riešení sústavy rovníc upravuje vždy. :-)

¹⁷Pravdupovediac, je to práca pre počítač. Mne sa nechcelo maticu s jedenástimi riadkami ani napísať na papier!

¹⁸Ani nemusia byť Vianoce. :-)

¹⁹Niektorí majú tri či dokonca štyri ruky!

²⁰Ako to už v rozprávkach býva, trpaslíci sú malí. Neskôr vás naučia, že trpaslík je taký epsilonový.

Pozrime sa teraz na tyče AC , CE a EG – To sú tie na spodnej strane mosta. Ak by sa predĺžila ľubovoľná z nich, most by sa prehľadol do tvaru V. To znamená, že potenciálna energia závažia klesne.²¹ Naopak, pri predĺžení tyčí AB , BD , DF , FG sa most prehne naopak. Zostávajú už len uhlopriečky. Ale aj tu sa stačí len trochu zamyslieť. Stačí si len predstaviť, ako sa pomenia uhly, keď sa jedna z nich natiahne a či sa most prehne do tvaru V alebo opačne. Úvahami dospejeme k rovnakým tyčiam, ako keď sme počítali pôsobiace sily.

Keď už sme hotoví s prvou časťou úlohy, poďme vyrátať silu, ktorá stláča tyč BD . S využitím rovnosti momentov síl to ide veľmi rýchlo. Vieme, že súčet síl pôsobiacich od podložky v bodoch A a G musí kompenzovať ťažovú silu telieska a súčasne ich moment síl vzhľadom na E musí byť nulový. Sú to totiž jediné vonkajšie sily pôsobiace na most, ktoré vzhľadom na teliesko spôsobujú nejaké momenty.

$$\begin{aligned}F_g &= F_A + F_G \\M &= M \\12 F_A &= 6 F_G \\F_A &= \frac{F_G}{2} = \frac{F_g}{3}\end{aligned}$$

Zamyslime sa teraz nad časťou mosta ACB a zvoľme si v ňom bod C . Výsledný moment vonkajších síl pôsobiacich na trojuholník vzhľadom na tento bod (ako aj na ľubovoľný iný) musí byť nulový. Vonkajšie sily pôsobiace v C majú moment nulový, zostávajú nám teda iba sily pôsobiace v bodoch A a B . Sila v A smeruje kolmo hore²² a už sme ju vyrátali. Jediná vonkajšia sila pôsobiaca v bode B je od tyče BD , teda smeruje vodorovne. Áno, je presne tá, ktorú chceme vyrátať. Označme ju F . Výška trojuholníka ABC je 4. Takže dostávame rovnicu:

$$\begin{aligned}6 F_A - 4 F &= 0 \\F &= \frac{mg}{2}.\end{aligned}$$

Energie a geometria:

Opäť si na pomoc pozveme trpaslíkov, ale ďalej budeme postupovať výlučne geometricky. Predstavme si, čo by sa stalo, keď sa zväčší dĺžka BD

²¹ Pozor! Uvedomme si, že pri nehmotnom moste je hmotné závažie jediná vec, čo nás zaujíma. Avšak vo všeobecnom prípade by to až také jednoduché nebolo a museli by sme počtovo vyrátať zmenu celkovej potenciálnej energie celej sústavy.

²² Bod A je na pohyblivom koliesku a preto ľubovoľná horizontálna sila bude hýbať s kolieskom, až do polohy, v ktorej bude nulová.

o dx . Tým sa nám zmení aj uhol BCD , označme to ako $\gamma + d\gamma$. Platí:

$$\begin{aligned}\sin(\gamma + d\gamma/2) &= \frac{3 + dx/2}{5} \\ \sin(\gamma) \cdot \cos(d\gamma/2) + \cos(\gamma) \cdot \sin(d\gamma/2) &= \frac{3 + dx/2}{5} \\ \frac{3}{5} \cdot 1 + \frac{4}{5} \cdot d\gamma/2 &= \frac{3 + dx/2}{5} \\ d\gamma &= \frac{dx}{4}.\end{aligned}$$

Most sa nám v bode C prehne a vznikne trojuholník ACG s výškou dh . Ľahko si všimneme, že uhol pri vrchole C je $\pi - d\gamma$. Ak označíme uhly pri A ako $d\alpha$ a pri G ako $d\beta$, tak vieme, že $d\gamma = 2d\beta$.²³ Súčet uhlov má byť π a preto

$$d\beta = \frac{d\gamma}{2} = \frac{dx}{8}.$$

Odtiaľ už pre zmenu výšky závažia máme

$$\begin{aligned}dh &= 6d\beta \\ dh &= \frac{3dx}{4}.\end{aligned}$$

A máme výsledok – ak trpaslík rozpaží o dx , potenciálna energia sústavy klesne o $mgdx/2$. To znamená, že na dráhe dx musel vykonať zápornú prácu takejto veľkosti a teda tyč BD je stláčaná silou $mg/2$.

²³Toto platí iba pre malé uhly alfa a beta, keď je výška dh trojuholníka ACG veľmi malá.

FX A5 – KRÚŽOK



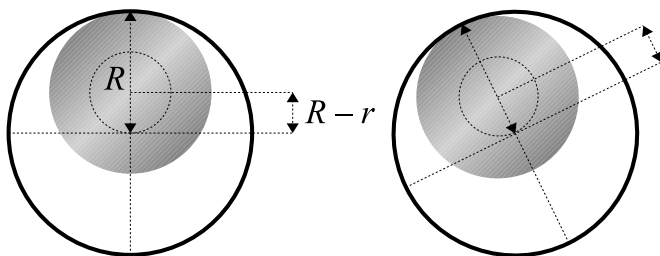
Máme horizontálny upevnený valec s polomerom r . Na ňom je navlečený prstenec s polomerom R (pochopiteľne $R > r$) a hmotnosťou M . Vypočítajte periódu malých kmitov tohto prstenca (v jeho rovine), ak po valci neprešmykuje.

Zdroj: KôMaL

✂ VZORÁK KUBUS ✂

Energetický prístup:

Pohyb obruče na valci (ktorý vôbec nie je taký jednoduchý, ako by sa na obyčajné kolísanie mohlo zdať) si môžeme rozdeliť na dva oveľa jednoduchšie a základnejšie pohyby: Pohyb jej stredu (ťažiska) po kružnici s polomerom $R - r$, ako to naznačuje nasledujúca dvojica obrázkov, a otáčanie obruče okolo svojho ťažiska. Zaveďme si súradnicu φ ako uhol, ktorý zvierajú spojnice stredu obruče, stredu valca a dotykového bodu obruče so zvislicou.

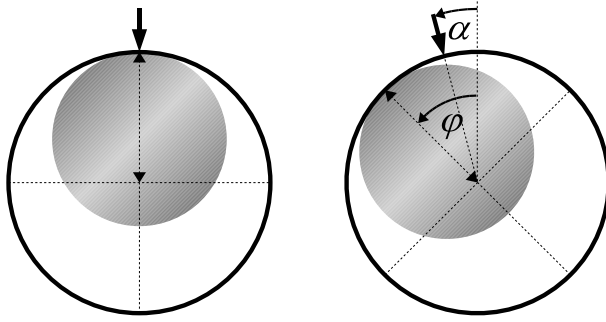


A o aký uhol, označme ho α , sa otočila obruč ako taká?²⁴ Obruč i valec sa dotýkali nejakým úsekom ich povrchov a ich dĺžky musia byť na oboch telesách rovnaké.²⁵ Spočítať dĺžku kružnicového oblúku je hračka. S pomocou obrázku dostávame rovnosť

$$\begin{aligned} R(\varphi - \alpha) &= r\varphi \\ R\alpha &\stackrel{\Downarrow}{=} (R - r)\varphi. \end{aligned} \tag{12}$$

²⁴Jednoducho možno fakt, že uhol α je odlišný od φ , ukázať nasledovne. Predstavte si, že keď bola obruč vo svojej najnižšej polohe, nakreslili sme na jej dotykový bod s valcom malú červenú bodku. Keď sa obruč trochu preválí, dotýka sa valca iným bodom. Keby platilo $\alpha = \varphi$, dotýkali by sa stále v tej istej červenej bodke, čo sa dá dosiahnuť len šmýkaním obruče po povrchu valca – nie jej preváľovaním.

²⁵Predstavte si, že na ich povrchoch sú miniatúrne ozubené kolieska. Obe sa posunuli o rovnaký počet rovnako veľkých zúbkov. To sa rovná rovnakej dĺžke.



Teraz nám už nič nebráni napísať si rovnicu zákona zachovania energie a upravovať:²⁶

$$\begin{aligned}
 E &= E_{\text{kin}} + E_{\text{rot}} + E_{\text{pot}} \\
 &= \frac{1}{2} M v^2 + \frac{1}{2} J \omega^2 + M g h' \\
 &= \frac{1}{2} M [(R-r) \dot{\varphi}]^2 + \frac{1}{2} (M R^2) \dot{\alpha}^2 + M g (R-r) (1 - \cos \varphi) \\
 &\approx M (R-r)^2 \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} M g (R-r) \varphi^2,
 \end{aligned} \tag{13}$$

pričom v poslednej úprave sme využili (12) a s vedomím, že sa pozeráme iba na malé výchylky φ , tiež aproximáciu $\cos \varphi \approx 1 - \varphi^2/2$.²⁷ Rovnicu (13) môžeme pokojne zderivovať podľa času:

$$\begin{aligned}
 M(R-r)^2 \frac{d(\dot{\varphi}^2)}{dt} + \frac{1}{2} M g (R-r) \frac{d(\varphi^2)}{dt} &= 0 \\
 M(R-r)^2 (2\dot{\varphi}\ddot{\varphi}) + M g (R-r) (\dot{\varphi}\varphi) &= 0
 \end{aligned}$$

Po vykrátení nadbytočných členov²⁸ a trochu usporadúvania dostávame diferenciálnu rovnicu pre harmonické kmity:

$$\ddot{\varphi} = -\frac{g}{2(R-r)} \varphi \tag{14}$$

Riešením tejto rovnice je funkcia tvaru $A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)$, kde

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{2(R-r)}}.$$

²⁶Používame tu štandardnú bodkovú notáciu pre časovú deriváciu premenných: $\dot{x} \equiv dx/dt$, $\ddot{x} \equiv d\dot{x}/dt = d^2x/dt^2$.

²⁷Skúste si to odvodiť z Taylorovho rozvoja kosínusu alebo binomického rozvoja odmocniny po aplikácii Pytagorovej vety.

²⁸V návale škrtania si všimnime, že ľavá strana je násobkom $\dot{\varphi} - \Gamma$ a ľá, nehybný krúžok je tiež riešením.

Nás zaujímaperióda kmitov. Tá je

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{2(R-r)}{g}}.$$

Silový prístup:

Úlohu môžeme vyriešiť podobnými úvahami, ak budeme používať sily namiesto energií. Keďže sa nám krúžok točí, budeme používať radšej momenty síl. Veľmi užitočný bod, okolo ktorého môžeme tieto momenty počítat, je stred valca. Napíšme si druhú vetu impulzovú:

$$N = \dot{L} \quad (15)$$

Podobne ako v minulom prípade, moment hybnosti si môžeme rozdeliť do dvoch častí: Pohybu ťažiska okolo stredu a otáčania krúžku okolo ťažiska, teda $L = M(R-r)v + J\omega$,²⁹ kde $v = (R-r)\dot{\varphi}$ a $\omega = \dot{\alpha}$.

Aký je moment sily pôsobiaci na krúžok? Jediná sila, ktorá spôsobuje nenulový moment sily, je tiaž s pôsobiskom v ťažisku. Jej moment je

$$N = -Mg(R-r)\sin\varphi, \quad (16)$$

pričom pre malé φ môžeme znovu napísať $\sin\varphi \approx \varphi$. Dosaďme teda všetko do rovnice (15), spomeňme si na (12) z predošlého postupu a upravujme:

$$\begin{aligned} -Mg(R-r)\varphi &= M(R-r)\dot{v} + J\dot{\omega} \\ -Mg(R-r)\varphi &= M(R-r)^2\ddot{\varphi} + (MR^2)\frac{R-r}{R}\ddot{\varphi} \\ -g\varphi &= (2R-r)\ddot{\varphi} \\ \ddot{\varphi} &= -\frac{g}{2R-r}\varphi \end{aligned} \quad (17)$$

Táto pohybová rovnica nám dáva periódu kmitov krúžku

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{2R-r}{g}}.$$

Ju! Silový a energetický prístup dávajú rôzne výsledky. Rovnice (14) a (17) nie sú rovnaké – ale oni predsa musia byť, veď popisujú ten istý krúžok! Výsledok musí byť ten istý bez ohľadu na to, aký prístup použijeme!

²⁹So znamienkom plus, lebo v súradniciach, ako sme si ich zvolili my, sú v rovnakom smere.

Silový prístup revisited:

Samozrejme, že nám to vyšlo inak. *Zabudli sme na trenie.* Trenie nemôžeme len tak zanedbať, pretože je veľmi dôležité, priam potrebné. Bez neho by krúžok dokonale prešmykoval.³⁰ A keďže momenty počítame vzhľadom na stred valca, moment sily spôsobený trením je nenulový. Tomuto by sme sa mohli vyhnúť počítaním momentov vzhľadom na dotykový bod, ale sústava s ním spojená nie je inerciálna a museli by sme uviesť nejaké sily navyše. V skutočnosti sme zamlčali ešte jednu silu, a to kolmú reakčnú silu od valca, ale jej moment je naozaj nulový a keďže je kolmá na pohyb ťažiska, nekoná ani žiadnu prácu. Označme si teda treciu silu ako F a napíšme si impulzové vety ešte raz.

$$\dot{p} = -Mg \sin \varphi + F \quad (18)$$

$$\dot{L} = -(R - r)Mg \sin \varphi - rF, \quad (19)$$

kde rovnica (18) popisuje pohyb obruče v smere rovnobežnom s povrchom.

Všimnime si znamienka F . Ak sa dohodneme, že F má opačný smer ako kolmý komponent gravitácie, potom má rovnaký moment, pretože pôsobí na opačnej strane od bodu otáčania.³¹

Pomocou starých známych vecí upravíme ľavé strany rovníc (18) a (19) nasledovne:

$$\frac{d}{dt}(Mv) = M(R - r)\ddot{\varphi} \quad (20)$$

$$\frac{d}{dt}(M(R - r)v + J\omega) = M(R - r)^2\ddot{\varphi} + (MR^2)\frac{R - r}{R}\ddot{\varphi} \quad (21)$$

Rovnica (18), resp. (19) prejde pomocou (20), resp. (21) na tvar

$$M(R - r)\ddot{\varphi} = -Mg\varphi + F \quad (22)$$

$$M(R - r)^2\ddot{\varphi} + (MR^2)\frac{R - r}{R}\ddot{\varphi} = -(R - r)Mg\varphi - rF. \quad (23)$$

Teraz ku rovnici (23) pričítame rovnicu (22) vynásobenú r , aby sme eliminovali F . Potom smelo upravujeme. Po neveľkej práci pridáme k rovnici

$$\ddot{\varphi} = -\frac{g}{2(R - r)}\varphi.$$

To sa zhoduje s rovnicou (14) získanou z energetického prístupu. Všetko je teda v poriadku, nemáme tu žiadny spor. Skutočná perióda kmitov je

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{2(R - r)}{g}}.$$

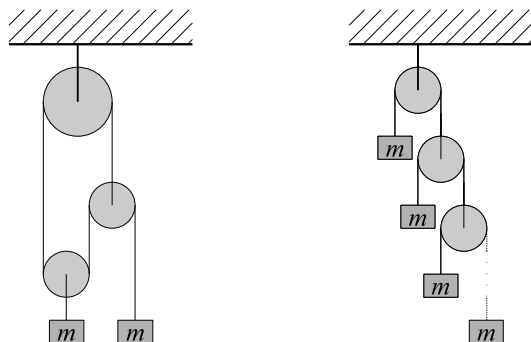
³⁰Všimnime si, že trenie potrebujeme zohľadniť v silovom prístupe, i keď nekoná žiadnu prácu. Keby však bolo menšie, mohlo by sa stať, že krúžok by začal prešmykovať a energia by sa začala strácať!

³¹Mohli sme si to zvoliť aj naopak, potom by nám vyšlo F záporné.

FX A6 – KLADKY



Tinka našla v pivnici obrovskú kopu lana a kladiek, preto sa rozhodla postaviť si kladkostroj. Ba dokonca dva! Jeden krajší ako druhý, ako to vidno na obrázkoch. Aké budú zrýchlenia jednotlivých telies po uvoľnení kladiek? Hmotnosti všetkých kladiek i lana sú zanedbateľné, počet kladiek na pravom obrázku považujte za nekonečne veľký.



Zdroj: BAUPC & Archív FKS

✻ VZORÁK BZDUŠO ✻

Ľafa. Kladky. A aby ich nebolo málo, tak hneď nekonečne veľa. Pre začiatok si však dajme prízemnejšie ciele – Zhrnieme si, ako tá fyzika *naozaj* vyzerá, keď je kladiek málo (napríklad jedna):

- Lano voľne natiahnuté medzi kladkami, resp. medzi kladkou a závažím je po celej svojej dĺžke napínané rovnakou ťahovou silou.

Prečo? Uvažujme kúsok lana malej dĺžky. Na hornom konci je ťahané ťahovou silou T nahor, na dolnom silou $T + dT$ nadol. Rozdiel týchto síl spolu s tiažovou silou udelia kúsku špagátu s hmotnosťou dm zrýchlenie $a \approx g$.³² Z Newtonovho zákona máme $dT = dm(g \pm a) \approx dm g$. Vránci lana sa teda *síce* ťahová sila mení, *ale* rádovo len o tiaž lana. Kladkostroje dvíhajú ťažké bremená, takže pôsobia rádovo väčšími silami, než je tiaž lana. Malé zmeny možno zanedbať.

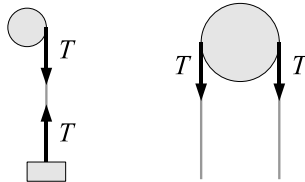
³²*Rádovo!* V reálnych kladkostrojoch dosahujú laná a závažia zrýchlenia od 0 po niekoľko málo g .

- Súčet síl pôsobiacich na *nehmotnú* kladku je 0 (nula) a to aj v prípade visiacej (nie pevne uchytenej) kladky.

Dôvod je podobný a platnosť rovnako (ne)presná: Za bežných okolností je tiaž kladky veľmi malá v porovnaní s pôsobiacimi silami. Nerovnováha týchto síl by podľa $a = \Delta F / m_0$ viedla k obrovským zrýchleniam. Tie by však mali byť „rozumne malé“.³³ V limite $m_0 \rightarrow 0$ musí nutne $\Delta F \rightarrow 0$.

- Lano prehodené cez *nehmotnú* kladku je napínané rovnakou silou na oboch stranách kladky.

Rozdiel vo veľkosti týchto síl ΔT by viedol k uhlovému zrýchleniu kladky $\varepsilon = R\Delta T / I_0$ (tu R je polomer kladky). Musí však nadobúdať „rozumne malé hodnoty“ ($\approx g/R$) a preto pre $I_0 \rightarrow 0$ musí aj $\Delta T \rightarrow 0$. V praxi väčšinou, naozaj, $\Delta T \ll T$.³⁴



Zbrane nabité, vojská rozostavené. Ideme bojovať! :-)

Časť (a)

Označme si jednu z ťahových síl ako T . Nech je to napr. tá, ktorá pôsobí na pravé teleso *nahor*. Keďže sú kladky *nehmotné*, tak ťah v lane musí byť

³³Špeciálne pre upevnenú kladku nulové! Vtedy tvrdenie platí automaticky.

³⁴Samozrejme, je to len také mávanie rukami vo vetre. Môj kamarát Bus raz povedal Kubusovi toto: „Kubík, všimol si si niekedy že každý fyzikálny dôkaz je taký nedôveryhodný, že sa vždy uvádza aspoň s jedným konkrétnym príkladom pre nejaký úplne triviálny špeciálny prípad? Dokonca v prípade, že dokazované tvrdenie neplatí sa pre istotu uvedú dva úplne rozličné dôkazy.“ Preto si skúste zrútať tento úplne triviálny špeciálny prípad:

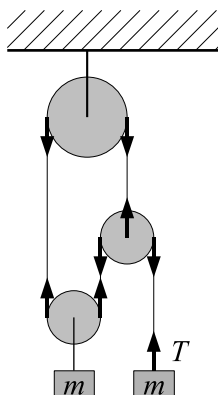
Cez otáčavú kladku je prehodené lano, na ktorého koncoch sú zavesené závažia s hmotnosťami m_1, m_2 . Moment zotrvačnosti kladky je I_0 , jej polomer R . Vypočítajte, čo sa len dá. – Z troch rovníc (Newtonov zákon pre obe telesá + momentová veta pre kladku) s tromi neznámymi (ťahové sily $T_{1,2}$ v lanách + zrýchlenie sústavy a) určíme všetko možné, špeciálne aj

$$T_1 - T_2 = g \frac{(m_1 - m_2) I_0}{(m_1 + m_2) R^2 + I_0},$$

čo ide naozaj do nuly v limite $I_0 \rightarrow 0$ a čo dáva nenulovú hodnotu jej uhlového zrýchlenia

$$\varepsilon = \frac{(T_1 - T_2) R}{I_0} = g \frac{(m_1 - m_2) R}{(m_1 + m_2) R^2 + I_0}.$$

rovnaký na oboch stranách každej jednej. Tak dostávame nasledujúci obrázok (všetky šípky sú rovnako veľké):



Skôr, než začneme zapisovať pohybové rovnice, si však všimnime sily pôsobiace na pravú kladku. Nahor ju ťahá sila T , nadol $2T$. Avšak, ako sme si povedali vyššie, súčet síl pôsobiacich na kladku je rovný nule. Preto nutne $T = 0$. Nič netreba riešiť, obe závažia budú padať voľným pádom.

Vážne? Neupadli sme slepo do nesprávnych dadaistických úvah? *Nie, neupadli!* Ak uvažujeme, že telesá sú rádovo ťažšie ako kladky, tak je to naozaj tak. Finta je v tom, že telesá „vlastne“ vôbec nie sú uchytené. Ak si predstavíme hmotnosť ľavého telesa sústredenú v kladke nad ním, tak táto kladka a druhé teleso sa snažia padať voľným pádom. *Bráni im v tom niečo?* Nebráni! Všimnite si, že posunutím pravej kladky nadol o x sa uvoľní x špagátu (dole odbudne $2x$ a hore pribudne x), ktorý sa môže využiť na klesnutie závaží. Hmotnosť kladky je zanedbateľná, takže pohybu telies sa poddá. Takto to bude, až kým sa dolné dve kladky nezrazia a pravá kladka už nebude môcť ďalej klesať. Nie je v tom žiadny spor – To len zdravému sedliackemu rozumu sa niečo nepozdáva. Zrejme je to tým, že „kolabujúce“ kladkostroje sa *zámerne* nestavajú.³⁵

Časť (b)

Než sa pustíme do samotného riešenia, urobíme jednu astrálnu úvahu: Predstavte si, že máte doma na povale (tj. v gravitačnom poli g) kladkostroj (hocijako komplikovaný). Teoreticky alebo experimentálne určíte zrýchlenia všetkých telies a ťahové sily vo všetkých lanách. Vzápätí sa presuniete na inú planétu³⁶ s gravitačným poľom ηg a postavíte tam rovnaký kladkostroj s rovnakými závažiami. *Aké budú nové zrýchlenia a nové ťahové sily?*

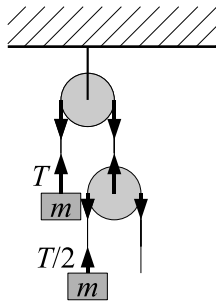
³⁵A ako ukazuje tento príklad, postaviť sa *dajú*.

³⁶Preto hovoríme o astrálnej úvahe. ☺

Skúsenosť ukazuje, že všetky sily a zrýchlenia na kladkách sú priamo úmerné tiažovému zrýchleniu.³⁷ Nové ťahové sily a zrýchlenia teda stačí pre násobiť bezrozmerným η a *to* sa bude diať. Predsa len som však trochu zavádzal, keď som povedal, že úvaha je astrálna. V skutočnosti je celkom prízemná a to opäť doslovne, pretože ju možno realizovať aj v zrýchľujúcom výťahu. Tu zrejme stačí spraviť zámenu $g \rightarrow g \pm a$.

Vráťme sa ku kladkostroju v zadaní. Na ľavej strane najhornejšej kladky je závažie m . Na pravej strane je... ale veď to je ten istý kladkostroj! Áno, má o jednu kladku menej, ale to je nekonečne malá (= nijaká) zmena.³⁸ Ak všetky kladky okrem prvej zavriem do jednej veľkej krabice, vyrobil som si spomínaný výťah, v ktorom namiesto g pociťujem $g + a$, kde a je zrýchlenie prvého telesa *nadol*.

Dva rovnaké kladkostroje. Jeden zavesený v gravitačnom poli – cíti g , druhý padá v gravitačnom poli, cíti $g + a$. Vieme, že podiel ťahových síl v príslušných lanách kladkostrojov bude $g/g + a$. *Ale ten vieme určiť!* Vezmime si napríklad ťahové sily v lanách pôsobiace na prvé a druhé závažie. Ľahko pridáme k nasledujúcemu obrázku:



Tadááá. Musí platiť:

$$\begin{aligned} \frac{T}{T/2} &= \frac{g}{g+a} \\ a &= -g/2 \end{aligned} \tag{24}$$

Prvé teleso sa teda pohybuje nahor so zrýchlením $g/2$. Zrýchlenia ostatných telies dopočítame analogicky. Ak sa pohráme s geometrickými radmi,

³⁷Argumentov je viacero, uvediem jeden rozmerový: Ak máme na počítanie k dispozícii veľa hmotností a jedno g , zrýchlenie možno vyrátať *len* ako g krát bezrozmerný faktor (tj. nejaký podiel hmotností). Pre sily zasa $\mathbf{F}_i = m_i \mathbf{a}_i$, čo je lineárne závislé na g ako dôsledok lineárnej závislosti pre všetky zrýchlenia.

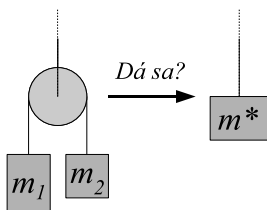
³⁸Matematici by ma po prečítaní tejto vety mohli zavesiť na hák. Pri použití slova nekonečno vo fyzike si v skutočnosti treba predstaviť reálnu situáciu so všeobecnými hodnotami a potom spraviť limitu.

zrýchlenie n -tého závažia v smere nadol dostaneme ako

$$a_n = \frac{2^n - 3}{2^n} g.$$

Alternatívne riešenie časti (b)

Ukážeme si trik, vďaka ktorému pre nás už väčšina príkladov s veľa kladkami nikdy nebude problém. Už sme spomenuli, že všetky ťahové sily v lanách sú priamo úmerné „pocitovanému zrýchleniu“ g . Položme si básnickú otázku: „*Možno hocikde v kladkostroji kladku so závažiami nahradiť jedným závažím?*“ Aby bolo jasné, čo tým chcel básnik povedať, chcel tým povedať toto:



Keďže som zlý básnik, odpoveď vám prezradím hneď: *Dá*. Uvažujme najprv situáciu, kde je kladka upevnená k stropu (tj. pociťuje g). Lano, ktoré ju na strope drží, bude pri tom napínane nejakou silu T^* , ktorá sa musí dať zapísať ako m^*g . Poďme nájsť, čomu je rovné m^* .

Ak označíme zrýchlenie závaží a a napätie v dolnom lane ako T , dostávame sústavu rovníc

$$\begin{aligned} m_1 a &= m_1 g - T \\ -m_2 a &= m_2 g - T \end{aligned}$$

s riešením

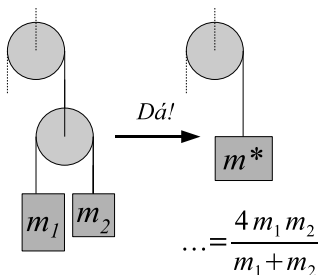
$$\begin{aligned} a &= \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} g \\ T &= \frac{2m_1 m_2}{m_1 + m_2} g. \end{aligned} \tag{25}$$

Z rovnováhy síl ďalej $T^* = 2T$, takže dostávame

$$m^* = \frac{4m_1 m_2}{m_1 + m_2}.$$

To však ešte nie je úžasné. *Úžasná* je až skutočnosť, že keby táto kladka bola zavesená vo výťahu alebo by padala na nejakej inej kladke, takže celá

sústava by pocítovala nejaké iné g , zámenu možno *znova* urobiť, pretože sila T^* nám vyšla priamo úmerná g .³⁹ Môžeme teda zakresliť našu spokojnosť!



Vráťme sa k nekonečne veľa kladkám v zadaní. Každý z nich možno prisúdiť nejakú hmotnosť m^* . Všetky kladky sú však identické, musí teda platiť

$$m^* = \frac{4mm^*}{m + m^*},$$

čo je po roznásobení kvadratická rovnica s dvoma riešeniami

$$m^* = 3m \quad \text{alebo} \quad m^* = 0.$$

Nekonečne veľa kladiek si možno predstaviť ako jednu kladku, ktorá má naľavo závažie m a napravo závažie m^* . Z rovnice (25) dostávame pre zrýchlenie najvyššieho závažia

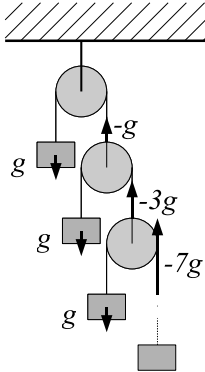
$$a = -\frac{g}{2}, \quad \text{resp.} \quad a = g.$$

Radosť však strieda zmätenie. Máme dva výsledky. Mimochodom, ak sa dobre zahľadíme na rovnicu (24) z predošlého postupu, tak aj ona má skutočne riešenie $a = -g$, pokiaľ $T = 0$. Aby to bolo vidno, stačí roznásobiť na

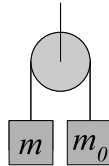
$$T(g - a) = \frac{T}{2}g.$$

Toto riešenie je celkom zmysluplné. Zrýchlenia jednotlivých telies v ňom vyzerajú nasledovne:

³⁹Inak to ani nemohlo vyjsť!



Dve riešenia. V *skutočnosti* sa môže diať *len jedno* z nich. Problém je v našom nedôslednom používaní slova *nekonečno*. Každý fyzikálny problém, treba zdefinovať pre konečné veličiny a až vzápätí spravíme limitu s nekonečnom. Pod konečnou situáciou si predstavíme takú, ktorá obsahuje N kladiek, pričom posledná je zakončená nejako takto:



Podľa zadania $m_0 = m$, ale budeme pracovať so všeobecným m_0 , aby sme pochopili, *kde* je problém. Ak použijeme našu fintu s m^* , môžeme kladky zospodu postupne nahradzovať závažiami. Dolnú kladku ľahko nahradíme hmotnosťou

$$m_1^* = \frac{4mm_0}{m + m_0}$$

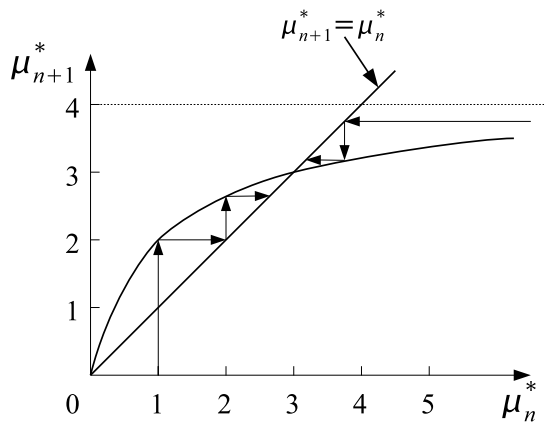
a pre vyššie kladky platí

$$m_{n+1}^* = \frac{4mm_n^*}{m + m_n^*},$$

kde n označuje poradie kladky počítajúc zdola. Pekný rekurentný vzťah. Nás zaujímajú jeho konvergentné vlastnosti. Pre lepšiu prehľadnosť zavedme $\mu_n^* = m_n^*/m$, teda hmotnosť m_n^* počítaná v jednotkách m . Rekurentný vzťah ľahko upravíme na

$$\mu_{n+1}^* = 4 - \frac{4}{1 + \mu_n^*},$$

čiže ide o hyperbolu. Zakreslíme si jej časť v kladných číslach graficky:



Vidíme, že pre všetky $m_0 > 0$ konverguje $m^* \rightarrow 3m$. Jediný prípad, kedy rad konverguje k nule je pre $m_0 = 0$, tj pre voľný špagát. Aj ten však má v skutočnosti nepatrnú kladnú hmotnosť,⁴⁰ takže správnym riešením je skutočne

$$a = -\frac{g}{2}.$$

⁴⁰O hmotnosti nekonečne veľa nehmotných kladiek ani nehovoriac...

FX A7 – MOTOROVÁ PÍLA



Predstavte si reťaz na motorovej pile. Jej dĺžka je L , hmotnosť M a úplne bez trenia sa napnutá pohybuje rýchlosťou v okolo dvoch valčekov s polomerom r . Predpokladajme, že valčeky sa neotáčajú. Reťaz nijakým spôsobom nepoháňame ani nespomaľujeme.

- (a) *Za aký čas klesne jej rýchlosť pohybu na polovičnú?*
- (b) *Kvalitatívne popíšte (a zdôvodnite), čo sa stane s reťazou, ak by valčeky (a zvyšok motorovej pily) zrazu zmizli.*

Zdroj: Úlohu vymyslel Kubus

✂ VZORÁK BZDUŠO & KUBUS ✂

Časť (a)

Označme si $\lambda = M/L$ dĺžkovú hustotu reťaze a pozrime sa na to, prečo by vôbec mala začať spomaľovať. Zamerajme sa iba na kus reťaze, ktorý sa momentálne nachádza v blízkosti jedného z valčekov. Tento kus sa otáča okolo valčeka a vracia sa naspäť, no a pri tom mení svoju hybnosť. Zmenu jeho hybnosti vypočítame neformálne: za čas dt zmení kus dĺžky $v dt$ rýchlosť z $+v$ na $-v$, preto

$$\frac{dp}{dt} = \frac{-2v \lambda v dt}{dt} = -2v^2 \lambda$$

To znamená, že na to, aby si reťaz udržala svoju rýchlosť, musíme ju stále ťahať silou veľkosti $2v^2 \lambda$. To isté platí o druhej polovici reťaze, takže na udržanie stavu s rýchlosťou v potrebujeme výkon

$$W = vF = 4v^3 \lambda$$

Predtým než by sme sa do dadaistických výsledkov ponorili prihlboko, vás musím upozorniť, že je to zjavne blbosť. Tento výsledok sa určite nepáči zákonu zachovania energie ani momentu hybnosti a argument sa dá rovnako aplikovať na točiace sa koleso. Kde udělali soudruzi z NDR chybu?

Skúsme sa zamyslieť nad tým, čo vlastne pôsobí na reťaz nejakou silou. Uvažujme nejaký kúsok reťaze, ktorý sa práve obťáča okolo valca. Ten evidentne mení svoju rýchlosť, preto na neho musí pôsobiť nejaká sila. Trenie neuvažujeme, preto jediné, čo na kúsok reťaze môže pôsobiť, sú susediace

kúsky reťaze.⁴¹ Inými slovami, v reťazi je nejaké pnutie. Ešte by sme nemali zabudnúť, že valce môžu pôsobiť na reťaz na povrchu nejakou tlakovou silou od podložky. No dobre, ale ako to bude spomaľovať pohyb reťaze?

Valce sa nehýbu, reťaz je teda akýmsi spôsobom napnutá a nemá možnosť zmeniť svoj tvar. To znamená, že všetky jej časti musia mať v každom okamihu rovnakú veľkosť rýchlosti, a teda tiež rovnakú veľkosť spomalenia.

Teraz nasleduje jedna diferenciálna úvaha. Ak reťaz dostatočne zazoomujeme, každý jej kúsok bude prakticky rovný. Aby sme dosiahli nejaké (obvodové) spomalenie a , musia na koncoch kúska dĺžky dx pôsobiť sily, veľkosťou sa líšiace o

$$dF = dma = dx\lambda a.$$

To ešte nezná ako problém, ale ak sa posunieme o dx ďalej, sila (vzájomné pôsobenie – ťah v reťazi) musí byť znova o dF väčšie. Po kúskoch však môžeme prejsť dokola po celej reťazi. Tak zrazu zisťujeme, že tam, kde posledný kúsok pôsobil na prvý silou F , prvý kúsok pôsobí na posledný silou $F + \lambda La = F + Ma$. To je ale proti zákonu akcie a reakcie. Tieto sily musia byť rovnaké, teda jediná možná hodnota zrýchlenia a musí byť nula. Tiež zisťujeme, že ťah je pozdĺž celej reťaze konštantný.

Výsledok? Áno. Z ničoho nič nám spadol z neba. Argumentácia je však jednoduchá: Celá reťaz musí mať rovnakú veľkosť zrýchlenia. To znamená konštantný gradient ťahovej sily v reťazi. Tá však musí byť po prejdení jednej otočky rovnaká ako na začiatku a teda gradient ťahovej sily je nulový. Na každý kúsok reťaze pôsobia na koncoch rovnako veľké sily takmer opačného smeru, ktoré môžu mať jedine dostredivé účinky na valec v kolmo smere. Ľalá, reťaz nebude spomaľovať.

Časť (b)

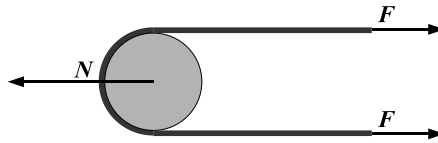
Intuícia nám našepkáva, že po zmiznutí valcov budú reťaz deformovať ťahové sily. Veď nič iné na reťaz nepôsobí.⁴² Aká veľká bude ťahová sila v reťazi? Argument použitý v časti (a) predpokladal nemeniaci sa tvar reťaze a rovnaké zrýchlenie pozdĺž celej reťaze. Ten však teraz nemožno použiť. Veď práve zmena tvaru je to, čo nás zaujíma. Nevieime posúdiť, či je pnutie v reťazi všade rovnaké, nieto ešte aké je veľké. Stojíme pod zaujímavým problémom. Máme veľa spojených kúskov reťaze, ktoré sa šíria známymi smermi. Akými veľkými silami budú na seba pôsobiť susedné kúsky?

Je bezpochyby obrovský problém riešiť takto položený problém. Poďme sa radšej vrátiť do časti (a), kde boli valce ešte namieste a uvažujme nad tým, akými silami pôsobili na reťaz. Valce pôsobili na každý kúsok reťaze

⁴¹Tiež je nám jasné, že náš kúsok reťaze pôsobí reakciou na susedné kúsky reťaze.

⁴²Pre osvieženie pamäte: Odstredivá sila existuje len v neinerciálnych (rotujúcich) vzťažných sústavách. My rozprávame o inerciálnej. Preto v nasledujúcich úvahách nemá čo hľadať!

nejakou malou reaktívnou silou. Z iného uhla pohľadu vieme povedať, že oba valce pôsobia na reťaz rovnako veľkými silami opačného smeru, označme ich veľkosť N .



Na obrázku je zobrazený kus reťaze, ktorý sa pohybuje rýchlosťou v . Sily F znázorňujú pnutie pôsobiace na koncoch kusu reťaze. Výslednica týchto síl zmení za čas dt kúsok reťaze o dĺžke vdt a hmotnosti λvdt rýchlosť z $+v$ na $-v$. Z Newtonovho zákona tak dostávame:

$$2F - N = \frac{dp}{dt} = 2v^2\lambda,$$

pričom sme už odôvodnili, že pnutie F musí byť po celej dĺžke reťaze rovnaké. Sila N však môže byť ľubovoľná v závislosti na tom, ako situáciu postavíme. Rovnako tak si môžeme zvoliť aj $N = 0$, čo je zrejme fyzikálne najbližšie k situácii bez valcov. To je prípad, kedy je reťaz už natiahnutá medzi valcami na správny tvar, ale ešte nie je napnutá. Vidíme, že v tom prípade je v reťazi pnutie

$$F = v^2\lambda.$$

Ale počkať! Tu nám z neba padá ďalší výsledok. Ak si predstavíme, že valce nenapínajú reťaz, tak akoby tam vôbec neboli. Ako sa bude reťaz pohybovať za týchto podmienok? Uvažujme kúsok reťaze idúci po kružnici s polomerom r , ktorému prislúcha stredový uhol $d\alpha$.

Na jeho koncoch pôsobia vyššie určené sily F , ktoré zvierajú uhol $180^\circ - d\alpha$. Ľahko sa možno presvedčiť, že ich výslednica je $dF_d = Fd\alpha$. Táto sila je kolmá na smer pohybu a spôsobuje dostredivé zrýchlenie

$$a = \frac{dF_d}{dm} = \frac{Fd\alpha}{\lambda r d\alpha} = \frac{F}{\lambda r} = \frac{\lambda v^2}{\lambda r} = \frac{v^2}{r}.$$

Ľaľa, dostredivá sila pôsobiaca na kúsok s polomerom krivosti r nám vyšla taká, že núti tento kúsok pohybovať sa po kružnici s polomerom r . Nemá teda snahu zájsť do valca, ale samovoľne sa pohybuje po jeho povrchu. Inými slovami, reťaz nemusí byť nijako vytláčaná z valca – nepôsobí na seba nijakou silou. Prekvapivé zistenie: Reťaz nebude meniť svoj tvar.

Výsledok? Vyzerá to tak. Znova sme sa k nemu dostali len veľmi nenápadne. Ak uvažujeme, že valce napínajú reťaz nulovou silou, reťaz sa sama napne práve natoľko, aby nemenila svoj tvar. Dostali sme tak bezrozporné

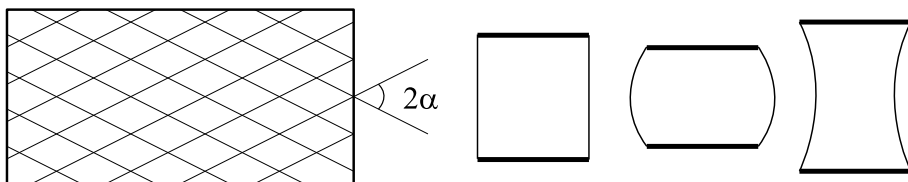
riešenie, ako sa bude reťaz pohybovať. Riešenie, ktoré vyhovuje všetkým zákonom mechaniky. Také môže existovať jediné – to správne.

POZNÁMKA: Všimnite si, že polomer r nebol v riešení nijako špecifický. Hral iba úlohu počiatočného zakrivenia. Ak by sme pomocou veľa valčekov nechali reťaz pohybovať sa v hocijakom éterickom tvare, po zmiznutí valčekov by na *každý* kúsok pôsobila práve taká sila, aby sa v danom mieste reťaz ostala pohybovať s daným zakrivením. Jej tvar by sa nemenil.

FX A8 – RUSKÝ SUD



Fajo zháňal na trhu sud, do ktorého bude dávať jablká na pálenku. Jeden obchodník mu ponúkal veľmi zvláštny sud. Mal tvar valca, jeho podstavy boli z pevného kovu. Plášť je však vyrobený z pružnej gumovej látky, do ktorej sú votkané tenké ohybné a neroztiahnuteľné vlákna tak, ako na obrázku. Fajo sa hneď začal zaujímať, čo sa stane, ak do sudu natlakujeme vzduch. Ktorý z troch tvarov na obrázku zaujme sud v závislosti od uhla α ?

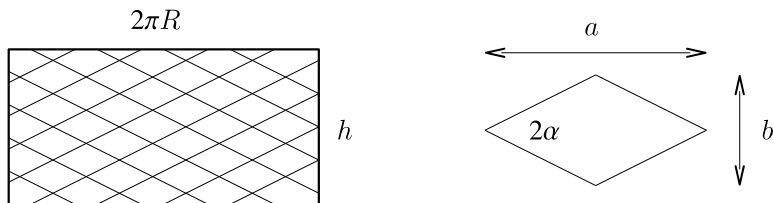


Zdroj: Kvant

✶ VZORÁK KUBUS ✶

Napriek tomu, že vyzerá hrôzostrašne, bol tento príklad celkom ľahký. Stačilo si poriadne premyslieť geometriu celej situácie a nakresliť si pôsobiace sily.

Predstavme si Fajov sud v počiatočnej polohe v tvare valca. Označme si jeho polomer ako R , jeho výšku ako h a veľkosti uhlopriečok jednotlivých kosoštvorčekových očiek medzi vláknami v jeho plášti ako a a b , všetko tak, ako na obrázku.



Ako je už naznačené aj na obrázku, plášť sudu bude mať rozmery $2\pi R$ krát h . Na šírku (pozdĺž obvodu podstavy) v ňom teda narátame $m = \frac{2\pi R}{a}$

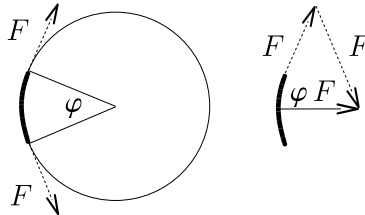
očiek a na výšku $n = \frac{h}{b}$ očiek. Navyše, pre neskoršie použitie z obrázku vyčítame, že $\operatorname{tg} \alpha = \frac{b}{a}$.

Teraz do sudu natlakujeme vzduch, označíme si rozdiel tlakov vnútri a vonku sudu ako p , a pozrieme sa, aké sily budú pôsobiť na jeho plášť (ktorý je ešte stále v tvare valca).

Na každú podstavu valca pôsobí tlaková sila veľkosti $\pi R^2 p$. Takouto silou je teda rozťahovaný plášť v zvislom smere – inými slovami, ak by sme ho hoci kde rozstihli vodorovným rezom, potrebovali by sme obe časti držať silou $\pi R^2 p$. Keďže v každej výške valca nájdeme vedľa seba m kosoštvorcových očiek, každé z nich musí niesť $\frac{1}{m}$ -tinu tejto sily. Inými slovami, ak by sme spomínaný vodorovný rez viedli cez uzly, kde sa vlákna pretínajú, prerezali by sme m rovnocenných uzlov, preto je každý z týchto uzlov rozťahovaný vertikálnou silou veľkosti

$$F_v = \frac{\pi R^2 p}{m} = \frac{\pi R^2 p}{2\pi R/a} = \frac{paR}{2}.$$

Len o niečo zložitejšie je nájsť silu, ktorou je plášť napínaný vo vodorovnom smere. Označme si túto silu ako F a zhora sa pozrime na výsek plášťa zabierajúci obvodový uhol $\varphi \ll 1$. Na tento výsek pôsobí zvyšok plášťa dvoma silami veľkosti F , zvierajúcimi uhol φ . Ich súčet bude mať veľkosť približne φF (v prvom ráde od φ) a bude smerovať dovnútra sudu.



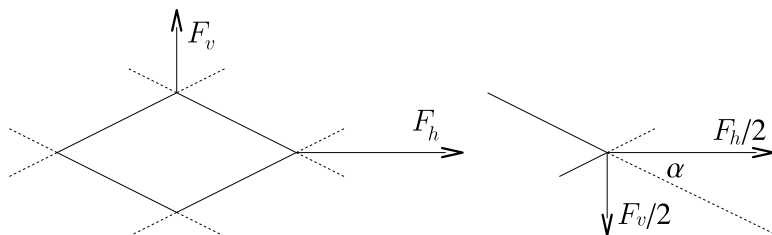
Keďže rozmery nášho výseku sú približne φR (na šírku) krát h (na výšku), presne v opačnom smere pôsobí tlaková sila veľkosti $p\varphi Rh$. Ak by bol sud v pokoji, tieto dve sily by museli byť v rovnováhe a platilo by teda

$$\varphi F = p\varphi Rh, \quad \text{teda} \quad F = pRh.$$

Teraz môžeme zopakovať úvahu s rezaním sudu. Ak by sme jeho plášť rozrezali vertikálne, potrebovali by sme ho pridržať silou F . Keďže by sme tak rozrezali n uzlov, každý z nich je rozťahovaný horizontálnou silou veľkosti

$$F_h = \frac{F}{n} = \frac{pRh}{h/b} = pbR.$$

Ak je teda sud v pokoji, každé kosoštvorčekové očko je vertikálne rozťahované silou F_v a horizontálne silou F_h . Lenže lanká, z ktorých sú tieto kosoštvorčeky poskladané, vedia prenášať silu iba vo svojom smere. Preto sa ľahko sa dopracujeme k tomu, že musí platiť $\operatorname{tg} \alpha = \frac{F_v}{F_h}$. (Buď „pozriem-vidím“ z obrázka, alebo z pár jednoduchých rovníc.)



My však vieme aj to, že $\frac{b}{a} = \operatorname{tg} \alpha$. Použijúc tieto dva poznatky a vyššie odvodené vzťahy pre F_v a F_h dostávame

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{F_v}{F_h} = \frac{paR/2}{pbR} = \frac{a}{2b} = \frac{1}{2 \operatorname{tg} \alpha},$$

z čoho

$$\operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{2}, \quad \text{teda} \quad \alpha = \operatorname{arctg} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right) \approx 35^\circ.$$

Pre takýto uhol α bude valcový sud v rovnovážnom stave.

Pre väčšie uhly α bude platiť

$$\operatorname{tg} \alpha > \frac{1}{2 \operatorname{tg} \alpha} = \frac{F_v}{F_h},$$

inými slovami, sila F_h bude priveľká (resp. sila F_v primalá) na to, aby boli lanká v rovnováhe, očká v plášti sa teda budú natahovať do šírky a sud bude tučnejší. Naopak, pre menšie α bude rovnováhu porušovať priveľká sila F_v , očká sa budú natahovať do šírky a sud bude štíhlejší. Koňec.

B Optika

If I could explain it to the average person, I wouldn't have been worth the Nobel Prize.

RICHARD P. FEYNMAN

FX B1 – ZRKADLÁ



Polopriepustné zrkadlo s priepustnosťou α (kde $0 \leq \alpha \leq 1$) je také zrkadlo, na ktoré ak (z ľubovoľnej strany) zasvietime lúč s intenzitou I , prepustí lúč s intenzitou αI a odrazí lúč s intenzitou $(1 - \alpha)I$.

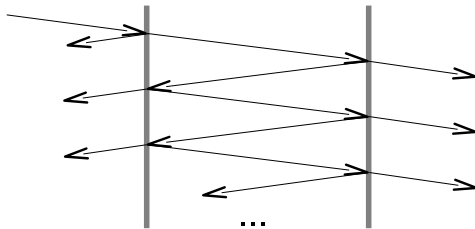
- (a) Filip zobral zrkadlo s priepustnosťou α_1 a hneď zaň postavil rovnobežné zrkadlo s priepustnosťou α_2 . Koľko svetla prepustí táto dvojica zrkadiel, ak na ňu spredu zasvietime lúč s intenzitou I ? Čo ak zasvietime zozadu?
- (b) Vlado sa nenechal zahanbiť. Vytiahol všetky polopriepustné zrkadlá, čo našiel v pivnici, a tiež ich postavil pekne za seba. Jeho zrkadlá majú priepustnosti $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, v tomto poradí. Ako sa bude správať táto sústava?

Zdroj: Úlohu vymyslel Kubus



Tento príklad nebol ťažký, všetko potrebné bolo napísané v zadaní. Bez ďalších prietahov ho teda vyriešme. Pozrime sa najprv na Filipovu situáciu s dvoma zrkadlami s priepustnosťami α_1 a α_2 .

Ak na túto dvojicu zrkadiel zasvietime lúč s intenzitou I , lúč s intenzitou $(1 - \alpha_1)I$ sa odrazí naspäť od prvého zrkadla a lúč s intenzitou $\alpha_1 I$ cezeň prejde. Tento lúč ďalej dopadá na druhé zrkadlo, od ktorého sa odrazí lúč s intenzitou $\alpha_1(1 - \alpha_2)I$, pričom zvyšných $\alpha_1\alpha_2 I$ prejde na druhú stranu. Ale pozor! Tu príbeh nekončí. Lúč odrazený od druhého zrkadla znova dopadne na prvé, kde sa časť znova odrazí a znova príde k druhému. Kúsok prejde ďalej, ale kúsok prejde znova k prvému a naspäť. Stále slabší a slabší lúč sa bude odrážať medzi zrkadlami, a pri každom odraze z neho kúsok prenikne von.

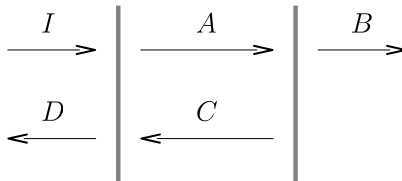


Ako už bolo spomenuté, prvý z lúčov, čo prejde na druhú stranu, bude mať intenzitu $\alpha_1\alpha_2 I$ (musel totiž prejsť cez obe zrkadlá). Ďalší z nich bude mať intenzitu $\alpha_1\alpha_2(1 - \alpha_1)(1 - \alpha_2)$ (musel prejsť cez prvé zrkadlo, odraziť sa od druhého a prvého, a prejsť cez druhé), ďalší $\alpha_1\alpha_2(1 - \alpha_1)^2(1 - \alpha_2)^2$ (tento sa od oboch zrkadiel zvnútra odrazil dvakrát), a tak ďalej. Celková intenzita lúča, ktorý prejde na druhú stranu, bude teda

$$\begin{aligned} B &= \alpha_1\alpha_2 I + \alpha_1\alpha_2(1 - \alpha_1)(1 - \alpha_2) + \alpha_1\alpha_2(1 - \alpha_1)^2(1 - \alpha_2)^2 + \dots \\ &= \alpha_1\alpha_2 (1 + (1 - \alpha_1)(1 - \alpha_2) + ((1 - \alpha_1)(1 - \alpha_2))^2 + \dots) \\ &= \alpha_1\alpha_2 \frac{1}{1 - (1 - \alpha_1)(1 - \alpha_2)} = \frac{\alpha_1\alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_1\alpha_2}. \end{aligned}$$

Posledný riadok sme dostali sčítaním nekonečného geometrického radu v tvare $1 + x + x^2 + x^3 + \dots$.

Na sčítavaní nekonečného radu samozrejme nie je nič zlé, ukážme si však aj iný, trochu všeobecnejší postup riešenia. Keď na zrkadlá spredu zasvietime lúč I , budú medzi nimi a všelike naokolo svietiť všelijaké lúče. Nás však nemusí zaujímať každý z nich, len celková intenzita lúčov, ktoré idú každým relevantným smerom. Označme si ako na obrázku intenzitu lúčov od prvého k druhému zrkadlu ako A , od druhého k prvému ako C , od druhého smerom doprava ako B a od prvého naspäť ako D .



Vieme, že každý z lúčov (teda súborov lúčov s danou celkovou intenzitou) I , A a C sa pri dopade na patričné zrkadlo rozdelí presne podľa priepustnosti tohto zrkadla. Keďže sa na zrkadlách žiadne ďalšie svetlo nevyrába, vieme presne vyjadriť, koľko svetla odchádza ktorým smerom z každého zrkadla. Dostávame rovnice

$$A = \alpha_1 I + (1 - \alpha_1)C$$

$$B = \alpha_2 A$$

$$C = (1 - \alpha_2)A$$

$$D = (1 - \alpha_1)I + \alpha_1 C.$$

Riešením tejto jednoduchšej sústavy rovníc dostaneme rovnaké riešenie ako prvým postupom.

Čo sa stane, ak na zrkadlá zasvietime z druhej strany? Presne to, čo by sa stalo, keby sme vymenili α_1 a α_2 . A teda, zhodou okolností, vôbec nič: všimnite si, že vzťah pre intenzitu B je úplne symetrický vzhľadom na výmenu α_1 a α_2 .

Zostáva už len vyriešiť otázku, čo sa stane, keď za seba postavíme zrkadiel viac. Napovedá nám k tomu predošlý odstavec. Keďže dvojica zrkadiel s priepustnosťami α_1 a α_2 prepúšťa z oboch strán presne $\frac{\alpha_1\alpha_2}{\alpha_1+\alpha_2-\alpha_1\alpha_2}$ svetla, správa sa nerozlíšiteľne (čo do prepúšťania svetla) od zrkadla s priepustnosťou $\alpha_{12} = \frac{\alpha_1\alpha_2}{\alpha_1+\alpha_2-\alpha_1\alpha_2}$. Ak teda za ne postavíme zrkadlo s priepustnosťou α_3 , všetky tri sa budú správať ako zrkadlo s priepustnosťou $\alpha_{123} = \frac{\alpha_{12}\alpha_3}{\alpha_{12}+\alpha_3-\alpha_{12}\alpha_3}$. Postupným pridávaním zrkadiel po jednom by sme takto mohli vypočítať priepustnosť sústavy zloženej z ľubovoľného počtu zrkadiel.

Mohli. Neexistuje však nejaký krajší vzťah pre výslednú priepustnosť? Alebo aspoň *nejaký* vzťah, a nie len algoritmus na jej výpočet?⁴³ Ak si rozpíšeme vzťahy pre α_{123} a α_{1234} pomocou jednotlivých α_i :

$$\alpha_{123} = \frac{\alpha_1\alpha_2\alpha_3}{\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3 - 2\alpha_1\alpha_2\alpha_3}$$

$$\alpha_{1234} = \frac{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4}{\alpha_1\alpha_2\alpha_3 + \alpha_1\alpha_2\alpha_4 + \alpha_1\alpha_3\alpha_4 + \alpha_2\alpha_3\alpha_4 - 3\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4},$$

nie je ťažké uhádnuť vzťah pre všeobecných n zrkadiel, a nie je ani oveľa ťažšie dokázať ho matematickou indukciou.

Ukážme si preto trochu iný nadhľad do problému. Všimnime si, že vzťah pre výslednú priepustnosť dvojice zrkadiel vieme prepísať ako

$$\alpha_{12} = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2} - 1} = \frac{1}{\left(\frac{1}{\alpha_1} - 1\right) + \left(\frac{1}{\alpha_2} - 1\right) + 1},$$

čiže

$$\frac{1}{\alpha_{12}} - 1 = \left(\frac{1}{\alpha_1} - 1\right) + \left(\frac{1}{\alpha_2} - 1\right).$$

Inými slovami, kvantita $\frac{1}{\alpha} - 1$ (čo je vlastne $\frac{1-\alpha}{\alpha}$, teda pomer odrazeného a prepusteného svetla) sa pri skladaní zrkadiel sčítava. Po krátkom zamyslení si overíme, že takéto sčítavanie musí fungovať aj pre sústavu viacerých zrkadiel, celková priepustnosť α Vladovho systému zrkadiel s priepustnosťami $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ bude spĺňať vzťah

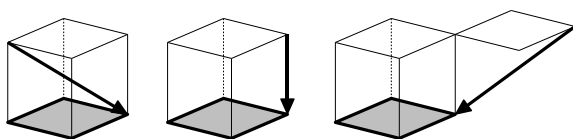
$$\frac{1}{\alpha} - 1 = \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{\alpha_i} - 1\right), \quad \text{a teda} \quad \alpha = \frac{1}{1 + \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{\alpha_i} - 1\right)}.$$

⁴³Vŕtavejší z vás sa možno pýtajú, aký je v tom v skutočnosti rozdiel: nie je aj normálny vzorec či vzťah vlastne len postup na výpočet?

FX B2 – SVETLOMETY



Bzdušo má stôl tvaru štvorca a chystá sa ho osvetliť zdrojom so svietivým výkonom P , a to dokonca takým, čo žiari do všetkých smerov rovnako. Týmto zdrojom sa blíži k rohu stola troma rôznymi spôsobmi (viď obrázok). Pri každom z nich vypočítajte hodnotu, ku ktorej sa blíži svietivý výkon dopadajúci na stôl, keď sa zdroj blíži k rohu stola. (Všetky hrany na obrázku okrem šípok sú rovnako dlhé a uhly medzi nimi pravé, útvary na obrázku sú teda kocky. Šípky naznačujú smer pohybu zdroja. Stôl je vyznačený šedo.)

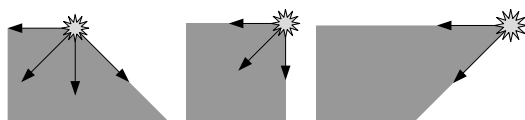


Zdroj: BAUPC

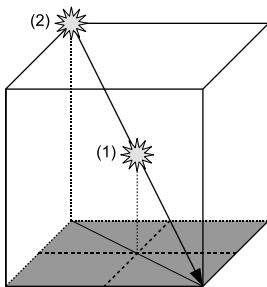
🌿 VZORÁK BZDUŠO 🌿

Úvodom hneď upozorním, že táto úloha bola naozaj veľmi ľahká a vzorák je taký dlhý len kvôli tomu, aby bol prístupný všetkým riešiteľom. Úloha sa dala riešiť viacerými spôsobmi, v tomto vzoráku ukážem najzaujímavejší a najtrikovejší z nich. Skôr, než sa pustíme do samotného riešenia, skúsme sa zamyslieť nad tým, prečo by mal byť svetelný výkon dopadajúci na povrch stola v jednotlivých prípadoch rôzny.

Keď sa budeme limitne približovať k rohu stola, môžeme si postupne meniť mierku obrázku tak, že vzdialenosť bodu od stola bude vyzeráť rovnaká, ale stôl sa bude zväčšovať. Je zrejmé, že v limite bude povrch stole prakticky zaberáť celú štvrtrovinu. Tiež je zrejmé, že na miesto stola bezprostredne pod bodovým zdrojom svetla bude dopadať značná časť svetelného výkonu. Situácie sú teda rôzne v tom, že v prvom prípade sa nachádzame nad stolom, v druhom prípade nad rohom a v treťom prípade sme niekde mimo. Komu tieto slová nestačia, ponúkam dvojrozmernú analógiu, kde svetlo dopadá na povrch polpriamky.



Vidno, že v dvojrozmernom svete by v prvom prípade na priamku dopadlo $\frac{3}{8}$ celkového výkonu, v druhom $\frac{1}{4}$ a v treťom len $\frac{1}{8}$ celkového svetelného výkonu. Pritom sme sa blížili vždy k tomu istému koncu nejakej úsečky, ale z rôznych smerov. Vráťme sa však späť k stolu tvaru štvorca a všimnime si nasledujúce pekné polohy.



Všimnime si najprv polohu (1) na obrázku. Otázka znie, aká časť dopadá na štvorec, ak je zdroj svetla umiestnený v strede jemu prislúchajúcej kocky. Zo symetrie musí na každú stenu kocky dopadať rovnaký podiel svetelného výkonu. Kocka má 6 stien, takže v tomto prípade dopadá na povrch stola $\frac{1}{6}$ celkového svetelného výkonu.

Teraz sa pozrime sa polohu (2). Vidíme, že sa má voči veľkému štvorcu rovnako, ako bod uprostred kocky voči jednej štvrtine tohto štvorca: z bodu (2) dopadne na veľký štvorec rovnaký podiel svetla ako zo stredu kocky na štvrtinu jednej steny. Ale takýchto plôch je na povrchu kocky 24, preto z bodu (2) dopadne na povrch nášho štvorca $\frac{1}{24}$ celkového svetelného výkonu. To nám zatiaľ vedieť stačí. Mimochodom, je zrejmé, že keď podstavu rozdelíme po naznačenej uhlopriečke, tak na obe časti podstavy bude v oboch prípadoch dopadať rovnaký podiel svetelného výkonu, čiže pre (1) by to bola $\frac{1}{12}$ a pre (2) $\frac{1}{48}$.

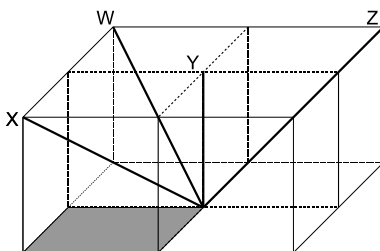
Teraz si predstavme, že sa po zakreslenej šípke v tom istom obrázku pohybuje k vrcholu štvorca. Aká časť svetelného výkonu dopadne na jeho povrch teraz? Konečne sme sa teda dostali k samotnej úlohe v zadaní. Konkrétne k prvej situácii. Zo symetrie musí na dolnú, prednú a pravú stranu kocky dopadať rovnaký svetelný výkon a rovnako takisto musí rovnaký svetelný výkon dopadať aj na hornú, ľavú a zadnú stenu kocky. Lenže tieto výkony už máme porátané, pretože ide o situáciu (2) z obrázka – vybratý vrchol a príslušné steny sú síce iné, ale majú sa k sebe rovnako. Môžete si overiť že vhodnými symetriami môžeme situáciu pretransformovať na tú v obrázku. Navyše, celkový svetelný výkon, ktorý dopadá na jednotlivé steny kocky je zrejme rovný P . Označme podiel svetelného výkonu, ktorý dopadne v prvej situácii v zadaní na povrch štvorca ako x . Musí platiť rovnosť

$$3 \cdot x + 3 \cdot \frac{1}{24} = 1, \quad \text{čiže} \quad x = \frac{7}{24}.$$

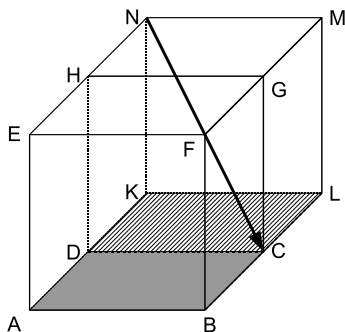
Vidíme, že to vôbec nebolo namáhavé. Druhú situáciu zo zadania opäť vyriešime hravo. K rohu stola sa blížime priamo zhora. Ak budeme limitne blízko k rohu, štvorec bude prakticky zaberať celú štvrtrovinu. My si môžeme dokresliť tri ďalšie rovnaké štvrtroviny, pričom na každú dopadne rovnaká časť svetelného výkonu. Rovnaké štyri štvrtroviny si môžeme dokresliť aj nad náš zdroj. Keďže sa tiahnu neobmedzene ďaleko, každý⁴⁴ lúč musí na niektorú z nich dopadnúť. Dovedna máme 8 rovnocenných plôch. Na každú teda musí dopadať rovnaký podiel y svetelného výkonu, čiže

$$y = \frac{1}{8}.$$

Zostáva nám posledná, najkomplikovanejšia možnosť. Ale aj tú hravo zvládneme. Cestou však budeme musieť spočítať svetelný výkon dopadajúci na povrch štvorca v ešte jednej situácii. V nasledujúcom obrázku je vyznačený náš štvorec a štyri body X,Y,Z,W, z ktorých sa blížime k rohu tohto štvorca. Príslušné podiely svetelného výkonu, v prípade, že sa z daných bodov limitne približujeme k vrcholu štvorca označíme ako x, y, z, w .



Už vieme $x = \frac{7}{24}$ a $y = \frac{1}{8}$. K určeniu zvyšných výkonov použijeme usporiadanie na nasledujúcom obrázku.



Budeme sa limitne blížiť z bodu N do bodu C. Celkový výkon, ktorý dopadá na steny kvádra ABLKEFMN musí byť P . Ale výkony dopadajúce

⁴⁴Okrem dokonale vodorovných, tých je však nekonečne málo. :-)

na jednotlivé štvorčeky už skoro všetky vieme. Tu sú:⁴⁵

$$\frac{P_{ABEF}}{P} = \frac{P_{EFGH}}{P} = \frac{P_{ADHE}}{P} = \frac{P_{KLMN}}{P} = \frac{P_{KDHN}}{P} = \frac{P_{HGMN}}{P} = \frac{1}{24},$$

$$\frac{P_{DCLK}}{P} = \frac{P_{CLMG}}{P} = \frac{7}{24},$$

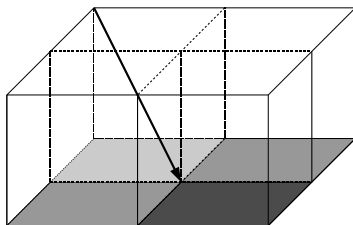
a nakoniec

$$\frac{P_{ABCD}}{P} = \frac{P_{BCFG}}{P} = w$$

sú naše neznáme. Dostávame rovnosť

$$6 \cdot \frac{1}{24} + 2 \cdot w + 2 \cdot \frac{7}{24} = 1,$$

čo je lineárna rovnica s riešením $w = \frac{1}{12}$. Už nám len stačí určiť z a vyhrali sme. Na to vezmeme štyri susedné kocky ako na nasledujúcom obrázku:



Keď budeme limitne blízko k povrchu, dolné štyri štvorce sa budú javiť ako celá rovina a dopadne na ne polovica celkového svietivého výkonu. To znamená, že $x + 2w + z = \frac{1}{2}$. Ak dosadíme, za x a w , ktoré už poznáme, dostávame $z = \frac{1}{24}$. Vlastne to vôbec nebolo ťažké, len bolo treba pokúsiť sa nájsť nejakú fintu.

⁴⁵Všimnime si, že rovnosť vyjadruje fakt o tom, že predný, zadný, horné a ľavé štvorce stien na obrázku sú voči bodu C orientované rovnako.

FX B3 – MINCA



Ujo z príkladov o minci na dne bazéna sa pozerá na mincu na dne bazéna. Vidí ju v hĺbke h a chce vedieť, v akej hĺbke sa nachádza naozaj. Stala sa mu však veľká galiba – nevidí ju totiž kolmo zhora, ako to už v takýchto príkladoch býva, ale pozerá sa na ňu pod uhlom α (vzhľadom na normálu hladiny). Pomôžte ujovi zrátať, v akej hĺbke sa nachádza minca naozaj!

Zdroj: Štandardné učebnice fyziky

✻ VZORÁK KUBUS ✻

Na to, aby sme vedeli vypočítať tento príklad, musíme si najprv uvedomiť, ako naše *videnie* vlastne funguje. Čo znamená, ak vidíme na nejakom mieste mincu?

Táto minca vysiela nejaké (odrazené) svetlo, ktoré dopadá do našich očí. Naše oči musia toto svetlo v prvom rade správne zaostriť, aby sa na sieťnici vytváral ostrý obraz. Takisto sa vnemy z každého oka musia zosynchronizovať,⁴⁶ pridávajúc vylepšený 3D obraz sveta okolo nás.⁴⁷

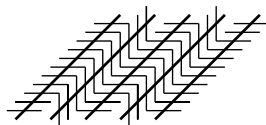
Toto svetlo normálne prichádza smerom z miesta, kde je minca. Keď je však minca na dne bazéna, svetlo sa na hladine láme a prichádza z iného smeru. Navyše, ich vzájomný uhol sa tiež môže zmeniť. Preto ujo vidí mincu v inej vzdialenosti a v inom smere, ako naozaj je. Pri pohľade šošovkou by sa mu mohla javiť zmenšená/zväčšená.

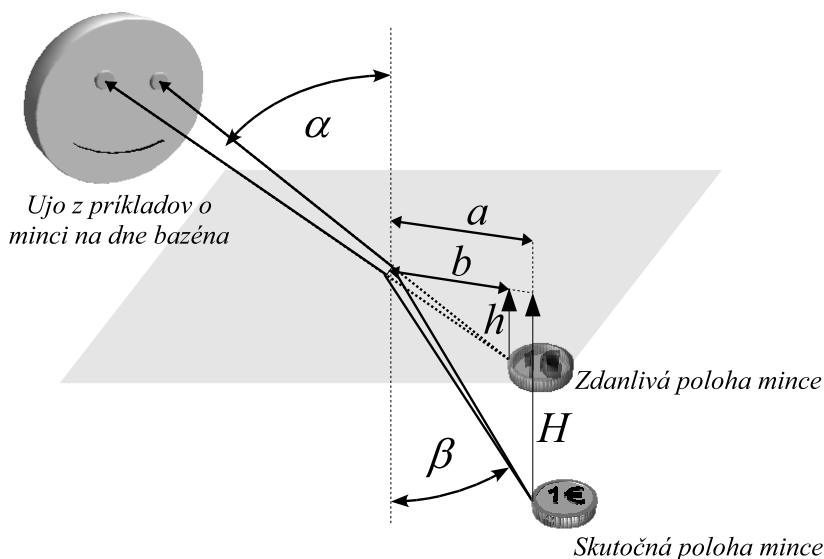
Nech h je zdanlivá vzdialenosť mince od hladiny a H skutočná. α je uhol, ktorý zvierajú ujo pohľad s normálou hladiny, β je zase uhol ktorý zvierajú lúče z mince s normálou hladiny ešte vo vode. Pozrime sa na dva lúče vychádzajúce z mince, ktoré sa separujú vo vodorovnom smere o malý uhol. Napríklad také dva lúče, z ktorých jeden dopadne do ujo vho ľavého a jeden do pravého oka.

⁴⁶To je už práca centrálnej nervovej sústavy.

⁴⁷Samozrejme, potom do toho vstupuje ďalšie podvedomé spracovanie obrazu a naše skúsenosti (napr. odhad vzdialenosti pomocou veľkosti a uhlového priemeru predmetu).

Toto spracúvanie má však tiež svoje chyby. Sú podľa vás šikmé čiary na pravom obrázku rovnobežné? Overte si to pravítkom!





Tieto lúče sa pri výchoде z vody zalomia. Všimnime si však, že dráha každého lúča sa bude nachádzať v istej zvislej rovine.⁴⁸ Zvislé roviny lúčov sa pretínajú v zvislej priamke, ktorá zrejme obsahuje mincu. Ak si teraz predĺžime časti lúčov, ktoré vchádzajú do ujoých očí, akoby sa nelámali na hladine (t.j. zdanlivý chod lúčov z ujoého pohľadu), zo symetrie sa musia niekde pretnúť. Obe ležia vo svojej rovine, takže sa zrejme môžu pretnúť iba niekde na spomínanej priamke, t.j. zvislo nad mincou.

Inak povedané to znamená, že vodorovná vzdialenosť od miesta, kde lúč prechádza vodnou hladinou od skutočnej polohy mince je rovnaká, ako od zdanlivej polohy mince. V reči písmeniek na obrázku

$$a = b.$$

Použijúc tento poznatok vidíme, že musí platiť

$$\frac{a}{h} = \operatorname{tg} \alpha \quad \text{a podobne} \quad \frac{a}{H} = \operatorname{tg} \beta.$$

Vydelením týchto dvoch rovníc a aplikovaním Snellovho zákona lomu

⁴⁸Presne tá rovina, ktorú si kreslíme na hodinách fyziky, keď sa preberá lom svetla. Táto rovina je určená bodom na hladine a dvoma z neho vychádzajúcimi polpriamkami. Dobré sa dá celá nasledujúca argumentácia predstaviť pri pohľade *zhora*.

$\sin \alpha = n \sin \beta$ dostávame:

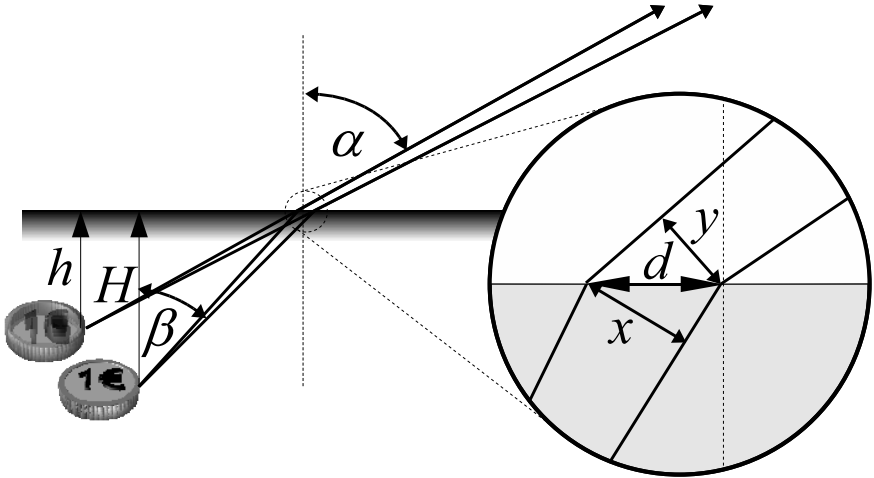
$$\frac{H}{h} = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \beta} \quad (26)$$

$$\begin{aligned} \frac{H}{h} &= \frac{\sin \alpha \cos \beta}{\cos \alpha \sin \beta} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \frac{\sqrt{1 - \sin^2 \beta}}{\sin \beta} \\ \frac{H}{h} &= \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \frac{\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha}}{\sin \alpha} \\ H &= h \frac{\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha}}{\cos \alpha} \end{aligned} \quad (27)$$

Toto je teda skutočná hĺbka mince.

Počkať počkať. Neskončme hneď takto za rána.⁴⁹ Čo by to bolo za hanbu, dvojstranový vzorák! V našom postupe sme uvažovali dva lúče, ktoré sa vzdľaľovali od seba v horizontálnom smere. Pozrime sa na dva lúče, ktoré sa vzdľaľujú vo vertikálnom smere.

Nech tieto dva lúče zvierajú maličký uhol $d\beta$. Pri hladine bude ich odstup (kolmá vzdialenosť) x , pretnúť hladinu v bodoch vzdialených d od seba a ich vzájomná vzdialenosť resp. uhol sa zmenia na y resp. $d\alpha$:



Vyjadriť si teraz vzdialenosť d . Po trochu hrania sa s geometriou a pravouhlými trojuholníkmi dostávame $d = x / \cos \beta$ (viď. zaozomovaný obrázok), ale keďže $d\beta$ je malé, $x = d\beta(H / \cos \beta)$ (viď. oblúk kružnice so

⁴⁹Za rána, za rosy, dobre sa kosí...

stredom v minci). Podobným postupom zistíme, že $d = y/\cos \alpha$ a tiež $y = d\alpha(h/\cos \alpha)$. Odstránením x , y a d z rovníc dostávame:

$$\frac{d\beta \frac{H}{\cos \beta}}{\cos \beta} = \frac{d\alpha \frac{h}{\cos \alpha}}{\cos \alpha} \Rightarrow \frac{H}{h} = \frac{d\alpha \cos^2 \beta}{d\beta \cos^2 \alpha} \quad (28)$$

Stále máme na pamäti, že $d\alpha$ a $d\beta$ sú malé, priam ich môžeme poslať do nuly. Ľaľa, derivácia! :-) Vzťah medzi α a β nám poskytne Snellov zákon. Stačí spraviť diferenciál na oboch stranách rovnice $\sin \alpha = n \sin \beta$. Tak dostávame

$$\cos \alpha d\alpha = n \cos \beta d\beta.$$

To môžeme dosadiť do rovnice (28). V pár úpravách sa už len zbavíme uhlu β , opäť pomocou Snellovho zákona, postupne dostávajúc:

$$\begin{aligned} \frac{H}{h} &= \frac{n \cos \beta \cos^2 \beta}{\cos \alpha \cos^2 \alpha} = n \frac{\cos^3 \beta}{\cos^3 \alpha} \\ \frac{H}{h} &= n \left(\frac{\sqrt{1 - \sin^2 \beta}}{\cos \alpha} \right)^3 = n \left(\frac{\sqrt{1 - \frac{\sin^2 \alpha}{n^2}}}{\cos \alpha} \right)^3 \\ H &= \frac{h}{n^2} \left(\frac{\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha}}{\cos \alpha} \right)^3 \end{aligned} \quad (29)$$

A máme problém. Naše výsledky nám nesedia. Kde sa stala chyba?⁵⁰

Nestala sa. *Ono to takto naozaj vychádza*. Lúče sa inak rozbiehajú v horizontálnom a inak vo vertikálnom smere, a nedať sa presne zaostriť. Pre lepšiu predstavu, niečo podobné by nastávalo, keby sme vzali obyčajnú šošovku, v jednom smere ju natiahli, a chceli vypočítať jej ohniskovú vzdialenosť.

Prvý výsledok je pravdepodobne bližšie k realite, lebo odstup očí nám podáva lepšiu predstavu o „hlbke sveta“ ako zaostrenie jednotlivých očí. Keď ujo stojí ďaleko od bazéna, malé rozdiely v uhloch, pod ktorými prichádzajú lúče do jednotlivých očí sa javia nevýrazné popri veľkom horizontálnom rozstupe očí. Ak si však doma hodíte do umývadla mincu a budete sa na ňu pozerat' pod veľkým uhlom α s okom tesne nad hladinou, zistíte, že na ňu nevíete poriadne zaostriť. Môžete si tento efekt skúsiť zachytiť aj fotograficky, chce to však dostatočne kvalitnú techniku.

POZNÁMKA NA ZÁVER: Ani jeden z výsledkov nie je úžasne jednoduchý, ale môžeme si ich aspoň ako-tak overiť na okrajových podmienkach. Napríklad pre $\alpha = 0$ dostávame $H = nh$, čo nám potvrdí ujo z príkladov o minci na dne bazéna. Tiež pre $n = 1$, keď nenastáva žiadny lom, dostávame očakávané $H = h$.

⁵⁰Všimnite si tiež, že tentokrát sa zdanlivá poloha ani nenachádza nad skutočnou!

FX B4 – VLÁKNO



Maťo si minule kúpil optické vlákno dĺžky L a konečne si svoj počítač na intráku pripojil priamo ku serveru FKS. Jadro optického vlákna je dlhý valec polomeru r vyrobený zo skla s rôznymi prímiesami tak, aby sa rýchlosť šírenia svetla v ňom zvyšovala lineárne so vzdialenosťou od jeho osi. Index lomu v strede je n_1 , na kraji n_2 . V strede jednej jeho podstavy je bodový zdroj svetla, ktorý vyšle krátky svetelný impulz. Akú dĺžku trvania bude mať impulz prijatý na druhom konci optického vlákna? Rádové zanedbania sú prípustné, typické hodnoty veličín sú $L = 1 \text{ km}$, $r = 20 \text{ }\mu\text{m}$, $n_1 = 1,445$, $n_2 = 1,44$.

Zdroj: IPhO



Pokiaľ by som svetelný lúč pustil presne v smere osi vlákna, čas za ktorý príde na opačný koniec by bol L/v_0 , kde $v_0 = c/n_1$ (rovnako ako v celom ďalšom riešení) označuje rýchlosť svetla v strede vlákna. Absolútna presnosť sa však nedá dosiahnuť⁵¹ a nezabráňime skutočnosti, že svetlo vojde do vlákna s istým rozptylom. Lúče, ktoré vchádzajú dovnútra pod nenulovým uhlom, budú na dosiahnutie opačného konca vlákna potrebovať viac-či-menej odlišný čas. Pointou tejto úlohy je určiť, o koľko najviac sa môže nejaký lúč omeškať alebo predbiehať v porovnaní s priamo idúcim lúčom.

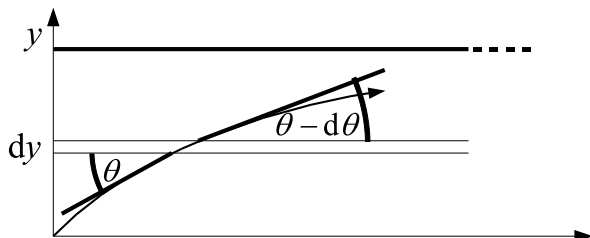
Vopred podotknem prekvapivý výsledok, že všetky odchýlené lúče prejdú vlákno za kratší čas. Že prečo? Ako uvidíme, odchýlené lúče sa budú pohybovať po cikcakovitej dráhe, ktorá je dlhšia než cesta piama. *Avšak* väčšinu času budú prechádzať opticky redším prostredím (tj. s menším indexom lomu) a teda väčšou rýchlosťou!

Hor sa do riešenia! Na začiatok pár uvažovaných predpokladov:

- **Optické vlákno je rovné:** Vzhľadom na to, že aj poskrúcané optické vlákno má polomer krivosti rádovo väčší ako je jeho pričný rozmer, výsledky by sa líšili až na vzdialenej platnej číslici.
- **Svetlo, ktoré dosiahne povrch optického vlákna sa pohltí:** Ak sa lúč odrazí raz, zrejme sa odrazí ešte mnohokrát. Ak sa pri každom odraze stratí čo i len malý podiel svetla, pri obrovskom počte odrazov lúč stratí prakticky všetku intenzitu.

⁵¹Či už kvôli Parkinsonovi alebo kvôli Heisenbergovi... :-)

Označme uhol, pod ktorým lúč vojde stredom podstavy do vlákna ako α .⁵² Svetlo sa postupne dostáva do miest s čoraz menším indexom lomu, kvôli čomu sa bude zakrivovať jeho smer do čoraz plytšieho uhlu. Mohlo by sa snáď stať, že v istej vzdialenosti sa začne pohybovať rovnobežne s osou valca? Uvidíme. Poďme sa pozrieť, čo nám dajú rovnice:



Mechanizmom zakrivovania lúča nie je nič iné, iba Snellov zákon lomu. Optické vlákno si budeme predstavovať ako obrovské množstvo vrstiev s hrúbkou dy , ktoré sa navzájom líšia indexom lomu o malé hodnoty dn . Keď bude svetlo prechádzať z jednej vrstvy do druhej, nastane lom podľa vzťahu

$$\frac{\cos \theta_i}{\cos \theta_{i+1}} = \frac{n_{i+1}}{n_i}.$$

Pokiaľ svetlo prechádza N vrstvami, pre každý prechod platí analogický vzťah. Vynásobením všetkých rovníc⁵³ dostaneme

$$\begin{aligned} \frac{\cos \theta_1}{\cos \theta_2} \frac{\cos \theta_2}{\cos \theta_3} \dots \frac{\cos \theta_{N-1}}{\cos \theta_N} &= \frac{n_2}{n_1} \frac{n_3}{n_2} \dots \frac{n_N}{n_{N-1}} \\ \frac{\cos \theta_1}{\cos \theta_N} &= \frac{n_N}{n_1}. \end{aligned}$$

Takže ak chceme zistiť, pod akým uhlom sa šíri svetlo v nejakej vzdialenejšej vrstve, stačí ju porovnať priamo s prvou, kde svetlo vstupovalo pod uhlom α , a nemusíme sa zaujímať o vrstvy medzi nimi.

Teraž už presne vieme, o aké lúče sa budeme v riešení zaujímať. Najväčší uhol, ktorý nás ešte zaujíma, je taký, pre ktorý sa svetlo bude pohybovať rovnobežne s osou vlákna na povrchu vlákna, tzn.

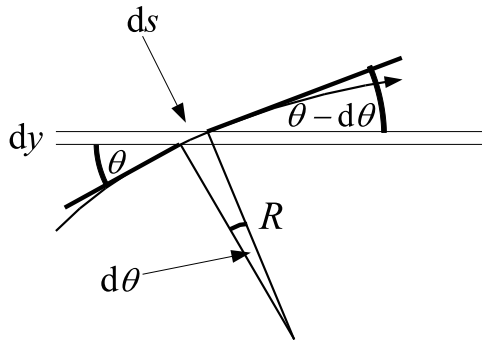
$$\begin{aligned} \cos \alpha_m &= \frac{n_2}{n_1} \\ \alpha_m &\approx 4,77^\circ. \end{aligned}$$

⁵²Myslí sa uhol na vnútornej strane valca, tzn. už je zahrnutý lom svetla, ktorý na podstave nastal.

⁵³Znie to hrozne odpudivo, ale perfektne to z rovníc odstráni všetko nezaujímavé.

Otázka je, ako sa bude lúč pohybovať *po* dosiahnutí rovnobežnosti s osou vlákna. Na prvý pohľad by sa zdalo,⁵⁴ že pôjde už navždy rovno. Naozaj to vyzerá ako samozrejmosť. Skutočnosť však ukazuje, že lúč sa *rovno* pohybovať *nebude* – Okamžite sa začne stáčať späť k osi vlákna. Keďže ide o naozaj ošemetnú vec, budeme sa jej venovať v poznámke 1 na konci riešenia. Teraz to budeme brať ako fakt.

Teraz by sa patrilo určiť čas, za ktorý vychýlený lúč prejde jeden oblúk. Je zřejmé, že oblúk sa bude len málo odlišovať od oblúku kružnice. Náhoda je, že pre nami zvolenú závilosť indexu lomu vnútri vlákna bude dráha lúča *presne* oblúk kružnice. To znie ako drsná finta! Najprv si však tento fakt dokážeme.



Označme polomer krivosti v nejakom konkrétnom mieste ako R .⁵⁵ V tomto mieste máme tiež tenkú vrstvičku hrúbky dy , do ktorej svetlo vstupuje pod uhlom θ rýchlosťou v a vychádza z nej pod o niečo menším uhlom $\theta - d\theta$ a o niečo väčšou rýchlosťou $v + dv$. Zákon lomu dáva

$$\frac{\cos \theta}{\cos (\theta - d\theta)} = \frac{v}{v + dv}.$$

Roznásobením, použitím súčtového vzorca pre kosínus⁵⁶ a aproximáciou pre limitne malé uhly $\sin d\theta = d\theta$ a $\cos d\theta = 1$ dostaneme

$$\cos \theta dv = v \sin \theta d\theta.$$

Podľa zadania sa rýchlosť v mení so vzdialenosťou od osi vlákna *lineárne*, t.j. podľa vzťahu $v = v_0 + ky$. Dosadením $y = 0$, resp. $y = r$ možno určiť

⁵⁴A nielen na prvý. Mne sa to zdá úplne zakaždým, keď sa nad týmto problémom zamyslím.

⁵⁵Polomer krivosti funkcie je dobre definovaná vec a nielen nejaké hádzanie rukami. V poznámke 3 na konci riešenia nájdete fyzikálny argument, prečo by to tak malo byť.

⁵⁶ $\cos (x - y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$

konštanty:

$$v_0 = \frac{c}{n_1}$$

$$k = \frac{c}{r} \left(\frac{1}{n_2} - \frac{1}{n_1} \right).$$

My do našej rovnice potrebujeme diferenciál rýchlosti, pre ktorý zrejme platí $dv = k dy$, čím sa naša rovnica transformuje na

$$\cos \theta k dy = v \sin \theta d\theta.$$

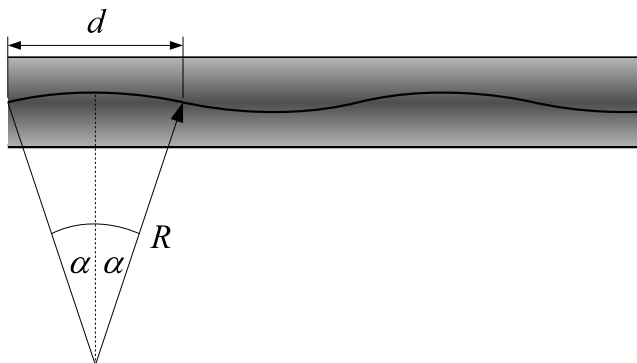
Zároveň však z jednochej geometrie (pre kružnicový oblúk resp. pravouhlý trojuholník) vyplývajú rovnice:

$$\left. \begin{array}{l} ds = dy / \sin \theta \\ ds = R d\theta \end{array} \right\} \implies dy = R \sin \theta d\theta$$

Dosadením do našej rovnice dostávame po malej úprave

$$R = \frac{1}{k} \cdot \frac{v}{\cos \theta} = \frac{1}{k} \cdot \frac{v_0}{\cos \alpha} = \text{konštanta},$$

kde sme si úpravu pomocou rýchlosti v strede v_0 a vstupného uhla α mohli dovoliť vďaka zákonu lomu. Ako vidíme, polomer krivosti lúča nezávisí na vzdialenosti od stredu vlákna a bude teda celý čas konštantný. Tadááá – Lúč sa pohybuje po kružnicovom oblúku! Označme dĺžku jedného oblúka ako d . Z obrázka vidno, že $d = 2R \sin \alpha$.



Prejdime konečne k samotnému času. Úsek $d\theta$ kružnicového oblúka prejde lúč za čas

$$dt = \frac{Rd\theta}{v} = \frac{Rd\theta \cos \theta}{v \cos \theta} = \frac{Rd\theta \cos \alpha}{v_0 \cos \theta}$$

a zrejme prvú polovicu oblúka prejde lúč za rovnaký čas, ako druhú. Celý oblúk preto prejde lúč za čas

$$t = \frac{2R \cos \alpha}{v_0} \int_0^\alpha \frac{d\theta}{\cos \theta}.$$

To vyzerá ako *dost' škaredý integrál*.⁵⁷ Preto sa nebudeme otravovať analytickým riešením, ale spravíme priblíženie pre malé θ (a tie my máme!). Vtedy možno písať

$$\begin{aligned} t &= \frac{2R \cos \alpha}{v_0} \int_0^\alpha \left(1 + \frac{\theta^2}{2} + O(\theta^4) \right) d\theta \\ &= \frac{2R \cos \alpha}{v_0} \left(\alpha + \frac{\alpha^3}{6} + O(\alpha^5) \right). \end{aligned}$$

Pre čas, za ktorý svetlo príde na koniec vlákna, dostávame

$$\begin{aligned} T &= \frac{L}{d} t \\ &= \frac{L}{2R \sin \alpha} \frac{2R \cos \alpha}{v_0} \left(\alpha + \frac{\alpha^3}{6} + O(\alpha^5) \right) \\ &= \frac{L}{v_0} \frac{\left(1 - \frac{\alpha^2}{2} + O(\alpha^4) \right) \left(\alpha + \frac{\alpha^3}{6} + O(\alpha^5) \right)}{\alpha - \frac{\alpha^3}{6} + O(\alpha^5)}, \end{aligned}$$

kde $O(x^k)$ označuje funkciu, ktorá rastie rýchlosťou nanajvýš x^k , tj.

$$\forall n < k : \lim_{x \rightarrow 0} \frac{O(x^k)}{x^n} = 0$$

a v našich úvahách je teda nekonečne malá.

Keď sme sa dostali až sem, nemali by sme sa zastavovať kvôli nejakému O . Využime, že pre O očividne platí $O(x^k) = xO(x^{k-1})$ a že pre malé h platí

⁵⁷Dá sa riešiť univerzálnou trigonometrickou substitúciou $t = \operatorname{tg}(\theta/2)$. Pre diferenciál platí

$$\theta = 2 \arctg t \quad \Rightarrow \quad d\theta = \frac{2dt}{1+t^2}.$$

Ďalej sa využíva

$$\begin{aligned} \sin \theta &= 2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} = 2 \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} = \frac{2t}{1+t^2} \\ \cos \theta &= \cos^2 \frac{\theta}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2} = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} - \frac{t^2}{\sqrt{1+t^2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2}. \end{aligned}$$

Takto napríklad prevedieme $\int \frac{d\theta}{\cos \theta}$ na jednoduchší $\int \frac{2dt}{1-t^2}$.

$\frac{1}{1+h} \approx 1 - h$. Potom upravujeme ďalej, pričom stačí sledovať koeficienty pri jednotlivých mocninách α :

$$\begin{aligned} T &= \frac{L}{v_0} \left(1 - \frac{\alpha^2}{2} + O(\alpha^4) \right) \left(1 + \frac{\alpha^2}{6} + O(\alpha^4) \right) \left(1 + \frac{\alpha^2}{6} + O(\alpha^4) \right) \\ &= \frac{L}{v_0} \left(1 - \frac{\alpha^2}{2} + \frac{\alpha^2}{6} + \frac{\alpha^2}{6} + O(\alpha^4) \right) \\ &\approx \frac{L}{v_0} \left(1 - \frac{\alpha^2}{6} \right) \end{aligned}$$

Vidíme, že lúč s $\alpha = \alpha_m$ príde na koniec vlákna ako prvý. Priamo idúci lúč predbehne o

$$\Delta T = \frac{L\alpha_m^2}{6v_0}.$$

Ak využijeme, že $v_0 = c/n_1$, $\cos \alpha_m = n_2/n_1$ a zavedieme $\Delta n = n_1 - n_2$, možno výsledok upraviť na elegantný tvar

$$\Delta T \approx \frac{L}{3c} \Delta n \approx 5,5 \cdot 10^{-9} \text{ s}$$

POZNÁMKA 1: Prečo svetlo po dosiahnutí rovnobežnosti nebude pokračovať rovno, ale začne sa vracat späť k osi vlákna? V praxi sa môžeme vyhovoriť na mikroskopické nehomogenity prostredia, ktoré vždy existujú a ktoré určite lúč aspoň trochu vychýlia z rovného smeru. Akákoľvek malá fluktuácia smerom k osi však lúč určite vráti späť. Preto sa dá povedať, že lúč idúci paralelne s osou vlákna sa nachádza v akejsi „labilnej“ polohe.

Skutočnosť je však ešte zložitejšia. Lúč by sa začal vracat k osi aj keby sme mali dokonale homogénnu látku (ideálny kryštál). Správne treba argumentovať *Fermatovým princípom extrémneho času*. Ten vraví, že svetlo sa pohybuje z A do B po takej dráhe, ktorá je spomedzi všetkých nekonečne podobných dráh *najextrémnejšia* (najdlhšia alebo najkratšia) v tom zmysle, že na nej svetlo strávi najmenej času. Bohužiaľ, v tejto chvíli nám nezostáva inak, než krčiť plecami. Čo to znamená *nekonečne podobná dráha*? Ako toto tvrdenie zovšeobecňuje vlnovú a geometrickú optiku? A ako z toho vyplýva pohyb lúča v našej úlohe? To všetko sú určite zaujímavé otázky. Odpovede sa dozvieme v treťom ročníku na matfyzе na *variačnom počte*.

POZNÁMKA 2: Každá slušná funkcia je na dostatočne malom úseku dostatočne lineárna. Preto napríklad aj rýchlosť svetla vo vzduchu v závislosti na výške možno považovať za lineárnu funkciu. To znamená, že aj svetlo

v atmosfére sa v skutočnosti pohybuje po kružnicových oblúkoch. Ich polomer je však niekoľko desiatok tisíc kilometrov. Je to síce malé zakrivenie, ale vďaka takémuto lámaniu svetla vidíme slnko na oblohe o kúsok vyššie, než v skutočnosti je. Tento jav je najvýraznejší keď je slnko nízko nad obzorom. Keď by jeho dolnú časť nemalo byť vidno, stále je v nejakej výške nad obzorom a Slnko sa javí sploštené. Inak povedané, vďaka tomuto javu trvá deň o niečo dlhšie, než by trval bez atmosféry.

POZNÁMKA 3: Platí ešte silnejšie tvrdenie: *Každej hladkej funkcii sa dá v každom pripísať tzv. osculačná kružnica, kt. je na dostatočne malom úseku zhodná s danou funkciou.* Fyzikálny argument je takýto: Predstavte si, že vezmete drôt a vytvarujete ho do tvaru danej funkcie. Potom cez funkciu prevlečiete korálku a necháte ju pohybovať sa po nej konštantnou rýchlosťou. Malí obyvatelia korálky (termity?) by počas pohybu po funkcii nutne pociťovali odstredivú silu. Tá je merateľná. Zo vzťahu $F_O = mv^2/R$ potom vyplýva jednoznačnosť (dokonca merateľnosť) polomeru krivosti R .

Existuje aj vzťah pre výpočet polomeru krivosti funkcie f v bode x , no nie je nijako pôvabný. Skúste si odvodiť, že

$$R(x) = \frac{(1 + f'(x)^2)^{3/2}}{f''(x)}.$$

POZNÁMKA 4: Predstavte si, že by ste optickým vláknom vysielali napríklad morzeovku v podobe svetelných impulzov. Aby boli signály na opačnom konci rozlíšiteľné, museli by byť vysielané bodky resp. čiarky oddelené dostatočne dlhou medzerou. Vzniknutý rozptyl svetla teda obmedzuje množstvo informácie, ktorá môže prejsť vláknom za daný čas. V praxi sa samozrejme nepoužíva morzeovka, ale pri podobných technikách sú obmedzenia analogické. Ak uvažíme, že impulz zodpovedajúci jednému bitu informácie musí trvať rádovo aspoň čas ΔT (inak by sa susedné bity zlievali kvôli rozptylu), dostávame teoretické maximum pre prenosovú rýchlosť v ráddoch stoviek megabitov za sekundu.

C

Elektrické pole

Vopred sa ospravedlňujeme, ak tu čitateľ narazí aj na pojmy dôverne známe a spôsobená strata času ho vyvedie z emocionálnej rovnováhy; vytrhnutie, dôkladné rozžuvanie a následné spopolnenie príslušnej pasáže zvyčajne vráti v krátkom čase hladinu adrenalínu do hraníc normy. Svoje pohrdanie autorom môžeme dať najavo aj tým, že sa textu niekoľko dní (prípadne už nikdy) nedotkne.

MARIÁN FECKO: DIFERENCIÁLNA GEOMETRIA A LIEOVE GRUPY PRE FYZIKOV,
POZNÁMKA POD ČIAROU

FX C1 – GULKY



Peťo rozostavil do medzihviezdneho priestoru 2009 všakovakých kovových guliek. Gulky nabil nábojmi q , $-2q$, $3q$, $\dots$, $-2008q$ a $2009q$, pričom q je kladné. Dokážte, že aspoň jedna z guliek má na celom svojom povrchu kladnú hustotu náboja!

Zdroj: Kvant

🌿 VZORÁK BZDUŠO 🌿

Úloha nie je ťažká, len sa jej treba chopiť zo správnej strany. A práve to *chopenie sa* tu môže byť problematické. Samotné riešenie bude ľahko pochopiteľné a vystačíme si s úplne elementárnymi vedomosťami o elektrickom poli.

V riešení sa budeme opierať o niekoľko tvrdení o vodičoch. Keďže tie nemusia byť každému známe, venujem ich odôvodneniu pár odstavcov. Skúsení borci sa nemusia nechať zdržiavať a môžu ich preskočiť. Jedinou náročnejšou vecou v riešení bude Gaussov zákon,⁵⁸ o ktorý sa oprieme pri dokazovaní posledného z tvrdení. Ako sa však ukáže, v riešení si vystačíme aj bez tohoto takto získaného silného tvrdenia.

Niekoľko tvrdení o vodičoch⁵⁹:

I. Vnútri vodiča je nulové elektrické pole E – Vo vodiči sú prítomné voľné elektróny. Ak by vo vodiči existovalo makroskopické elektrické pole, na elektróny by pôsobila elektrická sila $\mathbf{F} = q\mathbf{E}$ a tá by ich prinútila prúdiť na iné miesto. Tento pohyb však nebude existovať navždy, bude utlmený kvôli elektrickému odporu prostredia. Po vložení vodiča do elektrického poľa sa preto elektróny prakticky okamžite preskupia tak, aby na ne nepôsobila žiadna elektrická sila. Vnútri vodiča je preto $\mathbf{E} = \mathbf{0}$.

II. Elektrické pole na povrchu vodiča je kolmé na tento povrch – Argumentácia je podobná ako v predošlom prípade. Aj na povrchu vodiča sú totiž voľné elektróny. Keby elektrické pole nebolo kolmé, elektrická sila $\mathbf{F} = q\mathbf{E}$ pôsobiaca na elektróny by mala zložku rovnobežnú s povrchom.

⁵⁸Ako sa dá odvodiť z Coulombovho zákona nájdete vo vzoráku úlohy FX D1 PLOCHÁ ZEM, pozri poznámku 2 na jeho konci.

⁵⁹Samozrejme, myslia sa vodiče, ktoré nie sú napojené na zdroj napätia a neprechádza nimi elektrický prúd.

Elektróny by teda mohli voľne prúdiť a preskupovať sa. Tento pohyb však musí po čase ustať. To znamená, že elektróny sa preskupili tak, aby na povrchu vodiča bolo $\mathbf{E}$ kolmé na povrch.

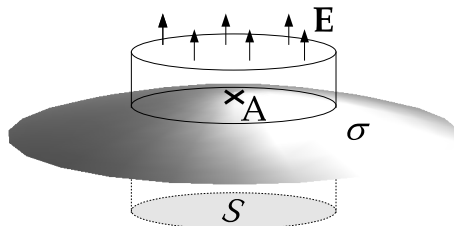
III. Povrch vodiča je ekvipotenciálová plocha – Ide o priamy dôsledok II. tvrdenia. Ak by sme vzali malý pomocný náboj δq a pohybovali s ním po povrchu vodiča, nevykonáme žiadnu prácu, pretože $\mathbf{F} = \delta q \mathbf{E}$ je kolmé na $\mathbf{s}$. Žiadna práca znamená žiadny potenciálový rozdiel. Podobne z I. tvrdenia vyplýva, že dokonca *vnútri celého vodiča* je rovnaký elektrický potenciál.

IV. Vnútri vodiča je nulová hustota ρ elektrického náboja – Z tvrdenia I. vyplýva, že ak si vnútri vodiča zvolím *úplne hocíjakú* uzavretú plochu, tak tok elektrického poľa cez ňu bude nulový. Podľa Gaussovho zákona platí $\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \rho/\epsilon_0$. Ak má byť splnený pre úplne všetky uzavreté plochy, tak potom nutne $\rho = 0$ v celom objeme vodiča. Z toho vyplýva, že náboj sa pri vložení vodiča do elektrického poľa bude sústreďovať len na povrchu vodiča.⁶⁰ Dôležitým pojmom sa teda stáva *plošná hustota náboja* σ .

V. Elektrické pole bezprostredne nad povrchom vodiča má veľkosť $\mathbf{E} = \sigma/\epsilon_0$ – Skúmame pole nad bodom A na povrchu vodiča. Obkolesíme ho malou gaussovskou plochou tvaru valca, ako na obrázku pod odstavcom. Keďže vnútri vodiča je pole nulové a nad vodičom kolmé na povrch, jediné miesto, kde pole tečie zakreslenou plochou je horná podstava. Tam možno navyše $\mathbf{E}$ považovať za konštantné, pretože zakreslená plocha je rádovo menšia než rozmery vodiča. Z Gaussovho zákona máme

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = ES = \frac{\sigma S}{\epsilon_0},$$

odkiaľ vidno hľadaný vzťah. To samozrejme platí len pre veľmi malé vzdialenosti!



⁶⁰Elektróny nemôžu vodič opustiť, na to im treba dodať istú energiu. To sa dá realizovať viacerými spôsobmi, napríklad osvetlením vodiča (tzv. *fotoelektrický jav*) alebo teplom (tzv. *termoemisie*).

Samotné riešenie

V tvrdení V. sme dokázali, že pre elektrické pole tesne nad povrchom vodiča platí $E = \sigma/\varepsilon_0$. Ak $\sigma > 0$, tak siločiarly z kovu vychádzajú, ak $\sigma < 0$, siločiarly smerujú dovnútra.⁶¹ Ak sa snažíme dokázať, že na povrchu aspoň jednej guľky je všade $\sigma > 0$, je to ekvivalentné dokazovaniu tvrdenia, že *aspoň do jednej guľky nevchádza žiadna siločiara*. Budeme teda skúmať siločiarly elektrického poľa. Siločiarly smerujú z miesta s vyšším potenciálom na miesta s nižším potenciálom a môžu byť zakončené len na nejakom náboji⁶² alebo pokračujú až do nekonečna.

Keďže celkový náboj guľiek je $q - 2q + 3q - \dots + 2009q = 1005q > 0$, na veľmi veľkých vzdialenostiach⁶³ možno pozorovať elektrické siločiarly smerujúce od guľiek do nekonečna, *ale nie opačným smerom!* To znamená, že každá siločiara, ktorá smeruje do nejakej guľky, musí začínať na nejakej inej guľke. Iné začiatky tu totiž neexistujú.

Podľa III. tvrdenia každej guľke zodpovedá nejaký potenciál. Skúmame náhodne vybranú guľku. Pravdepodobne netrafím na takú, do ktorej vstupuje nejaká siločiara. Táto siločiara musí podľa predošlého odstavca nutne začínať na nejakej inej guľke. Aby to bolo možné, táto iná guľka musí mať nutne väčší potenciál, než *skúmaná* guľka.

Túto úvahu môžem spraviť pre každú náhodne vybranú guľku okrem jednej. Musí totiž existovať guľka s najvyšším potenciálom. Aby do *nej* mohla vstupovať nejaká siločiara, musela by táto odniekiaľ prichádzať. Z inej guľky to však byť nemôže (žiadna guľka nemá ešte vyšší potenciál a iné náboje, než sú tie na guľkách, v úlohe nevystupujú) a z nekonečna prichádzať tiež nemôže (pretože celkový náboj na guľkách je kladný). To je všetko. Dokázali sme, že existuje guľka, ktorá má na celom svojom povrchu kladnú hustotu náboja σ . Ide o guľku, ktorá má najvyšší potenciál.

Na záver dodajme, že potenciál nezávisí len od náboja na guľke, ale aj od jej umiestnenia v priestore medzi ostatnými guľkami. Hľadaná guľka teda nemusí byť tá s najväčším kladným nábojom. To nám však neprekáža. Úlohou bolo dokázať existenciu takej guľky, nie zistiť, ktorá guľka to bude. A to sme splnili.

⁶¹Naša analýza je dokonca zbytočne presná. Úplne si tu vystačíme zo základnoškolským elektrické siločiarly smerujú z $+$ do $-$.

⁶²Ak sa pýtate prečo, odpoveďou je (zase raz) Gaussov zákon. Podľa neho si môžeme predstaviť, že elektrické pole tečie. Prameňom tohoto tečenia sú kladné elektrické náboje, v záporných nábojoch sa tento tok končí. V oblastiach bez nábojov môže elektrické pole len *pretekať*, čomu zodpovedá pokračujúca siločiara.

⁶³Tak veľkých, že sa nám všetky guľky zlejú do jedného bodu.

FX C2 – STAVEBNICA



Marcelka dostala na narodeniny sadu bodových nábojov veľkosti Q a k nim všakovaké väzby. Hneď sa pustila do všetkých experimentov a má na vás tieto otázky.

- Dva náboje fixujeme v priestore a tretí necháme voľne pohybovať po nimi danej priamke. Aká je jeho perióda kmitov v rovnovážnej polohe?
- Štyri náboje fixujeme vo vrcholoch štvorca, piaty necháme voľne pohybovať v nimi danej rovine. Nájdite jeho periódu kmitov v strede štvorca.
- Vymyslite konfiguráciu fixovaných nábojov v priestore tak, aby vznikla stabilná rovnovážna poloha pre ďalší náboj a vypočítajte jeho periódu kmitov v nejakom smere.

Zdroj: Úlohu vymyslel Kubus

 VZORÁK KUBUS 

Časť (a)

Začnime pekne od začiatku, najjednoduchšou časťou *a*. Položme si fixované náboje na os x do polôh R a $-R$. Je zrejmé, že jediná rovnovážna poloha pre tretí náboj fixovaný na osi x je presne v strede medzi nimi, teda v bode $x = 0$. Aká sila naň bude pôsobiť, ak ho vychýlime do inej polohy x ? Z Coulombovho zákona to bude

$$F = \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{(R+x)^2} - \frac{1}{(R-x)^2} \right).$$

Rozmyslite si prečo sedí znamienko sily (t.j. kladný smer sily je rovnaký ako kladný smer polohy x). Toto síce nie je lineárna závislosť sily od polohy, akú by sme pre harmonicky kmitavý pohyb očakávali, avšak pre malé výchylky x , keď môžeme členy $x^2, x^3, \dots$ zanedbať, bude závislosť približne lineárna:

$$F = \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{(R-x)^2 - (R+x)^2}{(R-x)^2(R+x)^2} \approx \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{-4Rx}{R^4} = -\frac{Q^2}{\pi\epsilon_0 R^3} x.$$

Uhlovú frekvenciu kmitov zistíme pomocou analógie s hmotným bodom na pružinke, alebo si rovnicu upravíme do štandardného tvaru

$$a = \ddot{x} = -\frac{Q^2}{\pi\epsilon_0 m R^3} x.$$

Například dosadením všeobecného riešenia v tvare $x = A \sin(\omega t) + B \cos(\omega t)$ zistíme, že harmonické kmity s uhlovou frekvenciou kmitania $\omega = \sqrt{Q^2/(\pi\epsilon_0 m R^3)}$ budú riešením tejto rovnice. Perióda kmitov bude teda

$$T_1 = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{\pi\epsilon_0 m R^3}{Q^2}} = \frac{2\pi R}{Q} \sqrt{\pi\epsilon_0 m R}.$$

Časť (b)

V dvojrozmernom prípade postupujeme podobne; nech sú fixované náboje v polohách $[\pm_1 R, \pm_2 R]$, potom bude x -ová zložka sily pôsobiaca na voľný náboj v polohe $[x, y]$:

$$F_x = \sum_{\pm_1, \pm_2} \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{((x \pm_1 R)^2 + (y \pm_2 R)^2)} \frac{x \pm_1 R}{\sqrt{(x \pm_1 R)^2 + (y \pm_2 R)^2}},$$

kde posledný zlomok len vyberá x -ovú zložku. Použili sme pri tom pekný zápis inšpirovaný riešením Jana Hermanna, kde sčítavame cez všetky štyri náboje, používajúc indexy na rozlíšenie znamienok pochádzajúcich z x -ovej a y -psilonovej súradnice. Ďalej už len zanedbávame všetky členy vyššieho rádu a tiež použijeme prvorádovú aproximáciu $(1+x)^\lambda = 1 + \lambda x$. (Pre odvodenie tohto vzorca si skúste si ľavú stranu zderivovať.)

$$\begin{aligned} F_x &= \sum_{\pm_1, \pm_2} \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{(x \pm_1 R)}{((x \pm_1 R)^2 + (y \pm_2 R)^2)^{3/2}} \\ &\approx \sum_{\pm_1, \pm_2} \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{(x \pm_1 R)}{(2R^2 \pm_1 2Rx \pm_2 2yR)^{3/2}} \\ &\approx \sum_{\pm_1, \pm_2} \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{(x \pm_1 R)}{(2R^2)^{3/2}} (1 \mp_1 \frac{3}{2} \frac{1}{R} x \mp_2 \frac{3}{2} \frac{1}{R} y) \\ &\approx \sum_{\pm_1} \frac{Q^2}{4\sqrt{2}\pi\epsilon_0 R^3} (x \pm_1 R - \frac{3}{2} x) \\ &= -\frac{Q^2}{4\sqrt{2}\pi\epsilon_0 R^3} x. \end{aligned}$$

V smere osi x bude teda stredný náboj kmitať s periódou

$$T_2 = 2\pi \sqrt{\frac{4\sqrt{2}\pi\epsilon_0 m R^3}{Q^2}} = \frac{2\pi R}{Q} \sqrt{4\sqrt{2}\pi\epsilon_0 m R} = 2^{5/4} T_1.$$

Kvôli symetrii to bude rovnako aj pre výchylku v smere y . Všimnime si tiež, že sila F_x nezávisí od výchylky y a podobne ani F_y nezávisí od x (do prvého

rádu). Preto budú malé kmity v osi x a y nezávislé, no a keďže ich perióda je rovnaká, môžete si rozmyslieť, že náboj bude v strede štvorca harmonicky kmitať v ľubovoľnom smere a to s rovnakou periódou T_2 .⁶⁴

Časť (c)

Ako to teda bude v priestore? Ak si napríklad skúsíte porátať silu pôsobiacu na náboj blízko stredu kocky, zistíte, že nenulové členy sa objavujú až v treťom ráde – žiadne harmonické kmity sa teda nekonajú. Ba čo viac, poloha v strede kocky nie je pre voľný náboj stabilná. A ak by ste náhodou mali nervy hrať sa s ďalšími konfiguráciami, zistíte, že žiadna nemá stabilné rovnovážne polohy.

A dôvod? Predstavme si, že v nejakej konfigurácii nábojov v priestore by vznikla stabilná rovnovážna poloha pre ďalší náboj. Stabilná poloha znamená, že pre dostatočne malé výchylky sa náboj z nej vychýlený vráti naspäť. Ak by sme si teda nakreslili dostatočne malú guľovú škrupinu (sféru) okolo tejto polohy, sila pôsobiaca na náš náboj Q by musela pôsobiť smerom dovnútra. Ak je $Q > 0$, to by znamenalo, že elektrické pole na sfére smeruje do jej vnútra, a teda jeho plošný integrál po nej je záporný. Lenže Gaussov zákon nám potom hovorí, že celkový náboj vnútri tejto sféry je záporný – to však nie je možné, keďže vnútri je len prázdny priestor a nanajvýš nejaké z fixovaných nábojov $Q > 0$. (Ak $Q < 0$, argument je podobný.)

Inými slovami, v neexistuje elektrostatičky vytvorená stabilná rovnovážna poloha. Dalo by sa ešte namietat', ako je to možné, že sme v predošlých dvoch častiach dve také polohy našli. Je to možné len kvôli tomu, že sme voľný náboj viazali do danej priamky alebo roviny. Ak by sme napríklad náboj zo situácie so štvorcom nefixovali v jeho rovine, poloha v strede štvorca by bola labilná v smere kolmom na túto rovinu. Náboj by stále vedel kmitať v rovine štvorca, ale pri ľubovoľnom vychýlení z tejto roviny by ušiel do tretieho rozmeru. . .

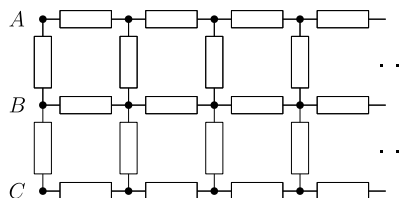
⁶⁴Môže dokonca krúžiť po hocijakej malej elipse v rovine štvorca!

FX C3 – REBRÍK



Juro si na chate postavil rebrík z rezistorov s odporom R . A to nie hocijaký, dokonca dvojitý a nekonečný, tak ako na obrázku.

- Vypočítajte odpor medzi bodmi A a C.
- Vypočítajte odpor medzi bodmi A a B, ak sú body A a C vodiivo spojené (vodičom s nulovým odporom).
- Vypočítajte odpor medzi bodmi A a B.



Zdroj: Úlohu vymyslel Matúš



VZORÁK BZDUŠO

Aby sme mali jednotnú terminológiu označovania uzlov (bodov) schémy, dohodnime sa, že body napravo od A ⁶⁵ budeme označovať $A_1, A_2, \dots$, body za B budeme označovať $B_1, B_2, \dots$ a za C to budú body $C_1, C_2, \dots$. Teraz sa môžeme s chuťou pustiť do práce.

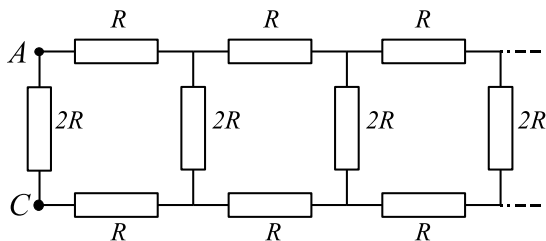
Začneme teda pekne po poradí. Najprv určíme odpor medzi bodmi A a C. Situácia je symetrická podľa osi určenej uzlami B_i a našepkáva nám, že potenciál v bode B_i sa musí rovnako veľmi líšiť od potenciálov v bodoch A a C, teda musí byť strednou hodnotou potenciálov v týchto bodoch. Ale to isté platí pre úplne všetky body B_i . Dospeli sme teda k záveru že vo všetkých bodoch B_i bude rovnaký potenciál.

Rovnosť potenciálov nám umožňuje z obvodu „škrtnúť“⁶⁶ všetky odpory spájajúce akékoľvek dva body B_i, B_j , to znamená celý jeden riadok odporov. Pýtate sa prečo? Pán Ohm nám zanechal zákon pre tečenie prúdu, podľa ktorého $I = U/R$, kde $U = |\varphi_i - \varphi_j|$ je rozdiel potenciálov v daných bodoch

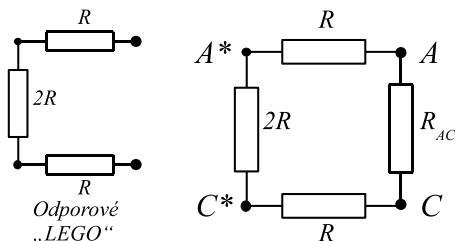
⁶⁵Bod A si možno predstaviť ako bod A_0 , ale nebudeme to tak robiť kvôli kompatibilitate so zadaním.

⁶⁶Poznámka z Príručky mladých fyzikov: Pri konečných sieťach používajú najmä experimentálni fyzici termín „odpojiť“.

a R je odpor, ktorým sú spojené a ktorým počítaný prúd preteká. A vidíme to. Žiadne napätie, žiadny prúd. No a rovnako veľký – žiadny – prúd bude tiecť medzi danými bodmi B_i a B_j aj vtedy, keď odpory R medzi nimi vynechám. Prúdy v ostatných vetvách a potenciály v jednotlivých bodov sa tým neovplyvnia a odpor schémy medzi bodmi A a C sa nezmení. Dostávame tým nasledovnú schému:



Náš pôvodný dvojité rebrík sa, pokiaľ skúmame len odpor medzi bodmi A a C , bude správať rovnako ako tento nový elegantný jednoduchý rebrík. Všimnite si, že je tvorený nekonečným množstvom pravidelne sa opakujúcich dielcov⁶⁷ znázornených na ľavom z nasledujúcej dvojice obrázkov. Označme hľadaný odpor medzi bodmi A a C ako R_{AC} . Zrejme pokiaľ k začiatku rebríka pridám ešte jeden dielec a budem skúmať odpor medzi novými koncovými bodmi A^* a C^* , tak bude taký istý ako predošlý, pretože ide o rovnakú nekonečnú schému vzhľadom na (*topologicky*) tie isté body ako pred tým.⁶⁸ To znamená, že odpor medzi A^* a C^* bude znova R_{AC} .



V pravom obrázku sme celú schému medzi bodmi A a C nahradili hľadáčím odporom R_{AC} . Ten istý odpor očakávame aj medzi bodmi A^* a C^* , čo nám použitím vzťahov pre paralelne a sériovo zapojené rezistory umožňuje

⁶⁷Akási LEGO skladačka, ale z odporov.

⁶⁸V sieti je teraz síce zapojená jedna skladačka navyše. Otázka je, či to má nejaký zmysel, ak predpokladáme, že ich je nekonečne veľa. Pre konečné schémy by bol nový odpor naozaj iný, ale s rastúcim počtom priečok sa rozdiel znižuje a konverguje k nule. Premyslite si prečo.

vyjadriť R_{AC} pomocou „seba samého“:

$$R_{AC} = \frac{2R(2R + R_{AC})}{2R + (2R + R_{AC})}.$$

Trochu zvláštne, že sme vyjadrili R_{AC} pomocou R_{AC} , ale v tom práve spočíva náš trik, pretože sme tým zostavili rovnicu, kde je jedinou neznámou a z ktorej sme schopní ho určiť. Jednoduchými úpravami dostávame kvadratickú rovnicu

$$R_{AC}^2 + 2RR_{AC} - 4R^2 = 0$$

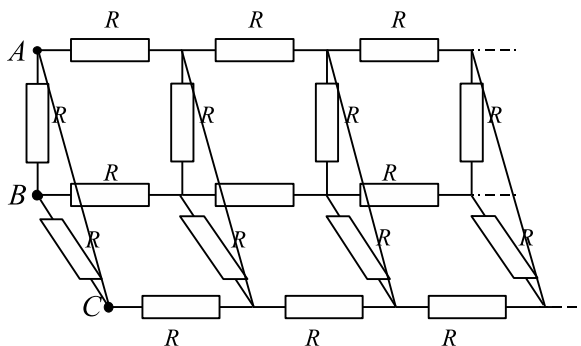
s dvoma riešeniami, správnym je nezáporné z nich,⁶⁹

$$R_{AC} = (\sqrt{5} - 1)R.$$

Aký je odpor medzi bodmi A a B , pokiaľ sú body A a C vodiwo spojené? V prvom rade si treba uvedomiť, že odpor medzi A a B je rovnaký ako medzi bodmi B a C , pretože bezodporovým spojením sme z bodov A a C spravili prakticky jeden bod a máme záruku, že v oboch bude vždy rovnaký potenciál.

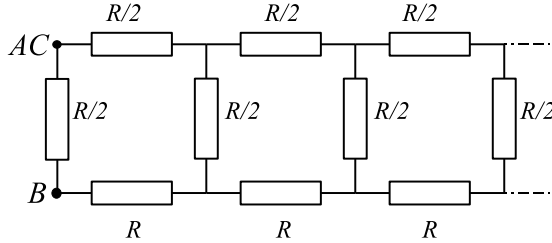
Skúsme rovnako ako v predošlej časti úlohy skúsiť niečo poodpájať alebo pospájať. K tomu musíme skúmať potenciály v jednotlivých bodoch. Avšak symetria, tzn. fakt že v bodoch A a C je rovnaký potenciál, nám našepkáva, ktoré body sú pre nás zaujímavé. Konkrétnejšie, symetria nám vraví, že rovnaký potenciál je očakávateľný v dvojici bodov A_i a C_i pre každé i .

Tieto body nie sú spojené žiadnym odporom, takže škrtať nebudeme. Spravíme presný opak. V bodoch A_i a C_i je rovnaký potenciál, preto medzi nimi nebude tiecť prúd, ani ak ich spojíme vodičom s nulovým odporom. Prúdy prechádzajúce jednotlivými časťami siete budú stále rovnaké. Vznikne nám teda niečo takéto:

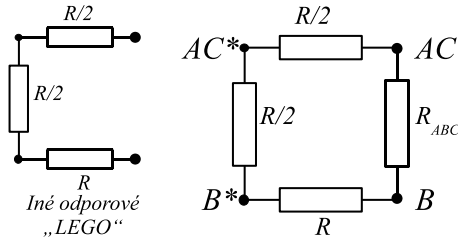


⁶⁹Druhé riešenie siete vyhovuje tej istej rovnici, no nemá fyzikálny zmysel.

Schému ešte prekreslíme. Ak v nej zaznačené vodivé spojenie skrátime na nulu, uvidíme, o čo vlastne ide. Body A_i a C_i sa pre každé i stanú jedným bodom, nech ho naďalej označujeme ako AC_i . Všimnime si, že každé body AC_i a B_i sú spojené paralelne dvoma odpormi R , teda ich možno nahradiť odporom $R/2$. Rovnako tak sú dvoma paralelnými odpormi R spojené aj každé dva body AC_i a AC_{i+1} , preto aj toto spojenie nahradíme odporom $R/2$. Tak dostávam nový jednoduchý rebrík na nasledujúcom obrázku:



Avšak podobný problém sme už riešili v prvej časti úlohy. Akurát naša skladačka je tento raz o trošičku iná. Ak označíme hľadaný odpor ako R_{ABC} , tak musíme ten istý odpor dostať aj ak nadpojíme jednu skladačku. Schematické znázornenie skladanie je teraz takéto:



Ak budeme postupovať rovnako ako v prvej časti, dostaneme pre neznámy odpor R_{ABC} vyjadrenie

$$R_{ABC} = \frac{\frac{R}{2} \left(\frac{3R}{2} + R_{ABC} \right)}{2R + R_{ABC}},$$

ktoré analogickým spôsobom vedie na kvadratickú rovnicu

$$4R_{ABC}^2 + 6RR_{ABC} - 3R^2 = 0$$

so správnym nezáporným riešením

$$R_{ABC} = \frac{\sqrt{21} - 3}{4} R.$$

Zostáva nám posledná časť úlohy; nájsť odpor medzi A a B . Budeme ho označovať R_{AB} . Ak sa pozrieme na zadanú schému, nevieme nájsť žiadnu symetriu, ktorá by nám pomohla situáciu prekresliť nejakým škrtaním alebo spájaním na niečo jednoduchšie. Nevieme totiž nijakým spôsobom nájsť dva body s rovnakým potenciálom. Ani LEGO skladačku nevieme použiť. Chce to niečo nové.

V elektrických obvodoch platí niečo, čo možno jedným slovom nazvať *superpozícia* a ktorá vystihuje nasledovný fakt: Pokiaľ na svorky A , B a C našej siete priložíme elektrické potenciály $(\varphi_{A1}, \varphi_{B1}, \varphi_{C1}) = \vec{\varphi}_1$,⁷⁰ tak sa v celej sieti ustália prúdy vyhovujúce Ohmovmu a Kirchhoffovým zákonom a z jednotlivých svoriek budú vytekať prúdy postupne $(I_{A1}, I_{B1}, I_{C1}) = \vec{I}_1$.⁷¹ Ak by sme vzali nejakú inú trojicu potenciálov $(\varphi_{A2}, \varphi_{B2}, \varphi_{C2}) = \vec{\varphi}_2$, tak riešením bude nejaká (vo všeobecnosti iná, ale nie nutne) trojica vytekajúcich prúdov $(I_{A2}, I_{B2}, I_{C2}) = \vec{I}_2$. Princíp superpozície vraví, že ak na svorky privediem lineárnu kombináciu potenciálov $\vec{\varphi} = c_1\vec{\varphi}_1 + c_2\vec{\varphi}_2$, tak zo svoriek bude vytekať rovnaká lineárna kombinácia prúdov $\vec{I} = c_1\vec{I}_1 + c_2\vec{I}_2$.

Skúsme trochu nahliadnuť do problému, prečo by to tak malo byť.⁷² Tvrdenie nejdeme odvodzovať – iba ukážeme, že takéto riešenie naozaj vyhovuje rovniciam. Ak na svorky privediem potenciál $\vec{\varphi}_1$, tak okrem toho, že zo svoriek bude vytekať prúd $\vec{I}_1$, vo všetkých uzloch obvodu sa ustália nejaké potenciály a vo všetkých vetvách nejaké prúdy. Aké by boli jednotlivé potenciály a prúdy, keby sme na svorky priviedli potenciál $c_1\vec{\varphi}_1$? Na prvý pohľad ťažká otázka, ale poďme overiť tip, že všetky potenciály a prúdy budú c_1 -násobné. Ak platil Kirchhoffov zákon o prúdoch v každom uzle pred tým, musí platiť aj teraz: súčet prúdov vtekajúcich do každého uzla bola nula, a keď sa všetky prúdy zc_1 -násobia, tak to bude stále nula. A Ohmov zákon o napätiach bude platiť naďalej tiež, pretože v rovniciach pre každú slučku vystupujú len členy typu „ U “, resp. typu „ RI “. Ak ich rovnosť platila pred tým, musí platiť aj teraz, keď sú U -čka aj I -čka c_1 -násobné.

Ďalej viem, že ak som na svorky pripojil napätia $\vec{\varphi}_2$, tak mi z nich tiekli prúdy $\vec{I}_2$, pričom na všetkých uzloch sa zase spravili nejaké konkrétne potenciály a tiekli medzi nimi nejaké konkrétne prúdy. Čo ak priložím na svorky potenciál $\vec{\varphi}_1 + \vec{\varphi}_2$? Naša hypotéza je, že potenciál v jednotlivých bodoch bude súčtom potenciálov v oboch situáciách a prúdy prechádzajúce každou

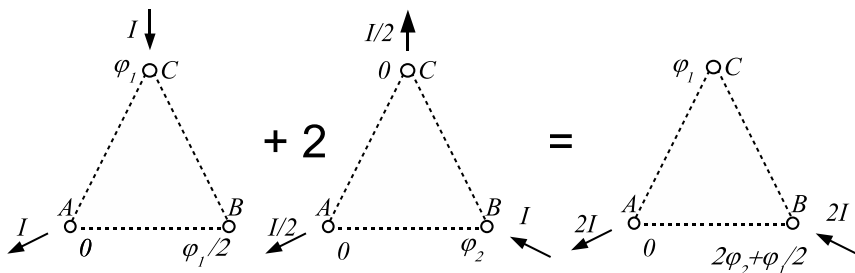
⁷⁰Vektorovú notáciu zavádzame len kvôli jej stručnosti. Pod vektorom potenciálu, resp. elektrického prúdu si predstavte len trojicu premenných. Nejde tu o nijaké magické priestory a čarovné šípky:-)

⁷¹Z Kirchhoffovho zákona o prúdoch priamo vyplýva, že jeden alebo dva z týchto prúdov sú podľa tejto definície záporné, pretože niektorou svorkou musí do obvodu elektrický prúd aj vchádzať. Nikde v obvode sa nemôže hromadiť elektrický náboj.

⁷²Pokiaľ sa vám nasledujúci odsek bude zdať po prvom prečítaní náročný alebo nebudaj nepochopiteľný, skúste si najprv v dôkaze nahradiť za c_1 konkrétne číslo 2. Potom si dôkaz prebehnite aj so všeobecným parametrom.

vetvou budú súčtami prúdov v oboch situáciach. Znova môžete skúsiť jednoducho nahliadnuť, že Ohmov aj oba Kirchhoffove zákony budú naďalej platiť v celej schéme.⁷³

Keď sme si princíp superpozície poriadne odôvodnili, skúsme ho aplikovať na náš problém. Situáciu, keď by sme merali odpor R_{AC} , si predstavme tak, že sme chceli nechať medzi bodmi A a C prechádzať prúd I a zisťovali sme, aký napäťový rozdiel φ_1 je na to potrebný (prvý obrázok). Pritom samozrejme vieme, že to bude $\varphi_1 = R_{AC}I$. Podobne, keď sme merali odpor R_{ABC} , zisťovali sme, aký napäťový rozdiel je potrebné vytvoriť, aby obvodom prechádzal rovnako veľký prúd I a zistili sme, že to je nejaké φ_2 (druhý obrázok), pričom zase vieme, že $\varphi_2 = R_{ABC}I$. V treťom prípade potrebujeme získať situáciu, kde z bodu C nevyteká žiaden prúd. Je práve jedna a je zobrazená v nasledujúcej schéme.⁷⁴



Zo schémy (a z Ohmovho zákona) vidno, že hľadaný odpor R_{AB} musí spĺňať rovnicu:

$$\begin{aligned} 2IR_{AB} &= 2\varphi_2 + \varphi_1/2 \\ 2IR_{AB} &= 2R_{ABC}I + R_{AC}I/2 \\ R_{AB} &= R_{ABC} + R_{AC}/4. \end{aligned}$$

Ak dosadíme za už spočítané odpory R_{AC} a R_{ABC} , dostávame

$$R_{AB} = \left(\frac{\sqrt{5} + \sqrt{21}}{4} - 1 \right) R.$$

Napokon ešte malá odozva k vašim riešeniam. Niektorí ste pri počítaní poslednej časti úlohy využívali trik, ktorému sme dali pracovný názov *čierna*

⁷³Iný pekný dôkaz možno nájsť napríklad v Príručke mladých fyzikov. Okrem neho sa v kapitole o superpozícii dočítate o vlnách na vode a Schrödingerovej mačke, ale aj o tom, ktoré krajiny majú najvýhodnejšiu geografickú polohu z hľadiska medzinárodného obchodu alebo o tom, ku ktorej pokladni v Tesco sa treba postaviť, aby sme čakali pokiaľ možno čo najkratší čas.

⁷⁴Správne vzaté, je to aj hocijaký násobok tejto situácie. Všetky sú charakteristické tým, že pomer namiešania situácií (a) a (b) je 1 : 2.

skrinka. Povedali ste si, že schému medzi bodmi A , B a C si možno predstaviť tak, akoby bol každý bod spojený s každým práve jedným odporom (zapojenie do trojuholníka) alebo že každý z týchto bodov je spojený s akýmsi uzlom uprostred práve jedným odporom (zapojenie do hviezdy). Potom ste si povedali, že zo symetrie sú dva z týchto odporov rovnaké, čím vám ostali v náhradnej schéme len dva neznáme parametre, ktorých hodnoty sa už dali určiť z častí (a) a (b) úlohy. Potom ste už ľahko dorátali odpor v časti (c). Tento trik naozaj funguje, ale vôbec nejde o triviálny fakt. Existuje dokonca sofistikovanejšie tvrdenie, ktoré vraví, že ak mám „čiernu skrinku“ s n svorkami, môžem si namiesto jej skutočného obsahu predstaviť náhradnú schému, kde je každá svorka spojená s každou práve jedným odporom. Pokiaľ ste tento trik používali a náležite ste jeho správnosť neodôvodnili, strhol som vám bod. Kto má záujem, môže si pozrieť korektný Kubusov dôkaz tohto tvrdenia na www.fks.sk/fx/zbierka/eos.pdf.

Aby som vás ešte trochu utíšil, poviem vám smutnú správu. Náhradná schéma ku „čiernej skrinke“ nie je až taká dokonale užitočná, pretože sa pri nej narátate ako draci pri určovaní jednotlivých odporov, ale úlohy sa pomocou nej dajú porátať práve vtedy, keď sa dajú vyrátať aj cez vo vzoráku použitú fintu so superpozíciou. Toľko k vám. Zostáva len popriať veľa dobrých nápadov v ďalšej sérii. Dohovoril som. Howgh!

FX C4 – BALVAN



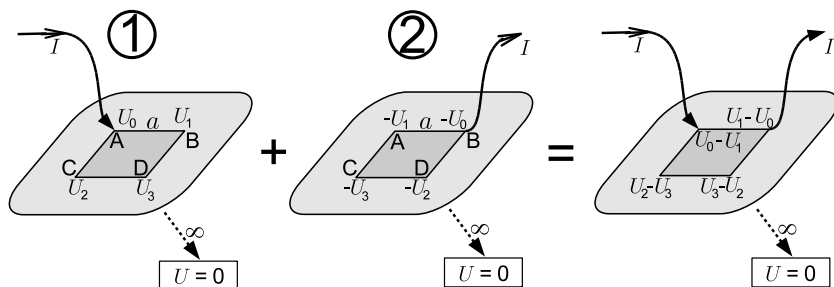
Kubík našiel v Tatrách veľký balvan. Našiel si na ňom veľkú hladkú plochu a na ňu si nakreslil malý štvorec $ABCD$ so stranou a . Keď medzi body A a B pustil prúd I , medzi bodmi C a D nameral napätie U . Aký je merný elektrický odpor balvanu?

Zdroj: Štandardné učebnice fyziky

✻ VZORÁK JAKUB ✻

Prvý krok je ujasnenie si podmienok, zvaný tiež idealizácia problému. Náš kameň budeme považovať za nekonečne veľký polpriestor, dokonale homogénny (s merným elektrickým odporom ρ všade rovnakým) a vzduch v druhom polpriestore za dokonale nevodivý a nepolarizovateľný (najlepšie nech to je rovno vákuum). To by bola tá ľahšia časť za nami. . .

Ďalej využijeme silný kaliber – *princíp superpozície*. Vďaka nemu nemusíme skúmať priloženie oboch kontaktov súčasne, ale môžeme si posvietiť na situáciu s jedným priloženým kontaktom, potom osobitne s druhým kontaktom (čo sú vďaka našej idealizácii rovnocenné situácie) a potom výsledné riešenie je superpozíciou (súčtom, resp. zložením) čiastočných výsledkov. Tu by som poznamenal, že princíp superpozície je čosi absolútne základné a Maxwellove rovnice (popisujúce kompletne celý elektromagnetizmus) tento princíp samozrejme umožňujú. V našom prípade ho „zneužijeme“ nasledovne:



SITUÁCIA 1: v mieste A mám priložený kontakt s potenciálom U_0 (meraným voči Zemi dostatočne ďaleko od A , inak povedané, nulovú hladinu potenciálu som umiestnil do nekonečna) takým, že mi cezeň do kameňa tečie práve prúd o veľkosti I . Potenciál v mieste B označím U_1 , v C U_2 a napokon potenciál D bude U_3 .

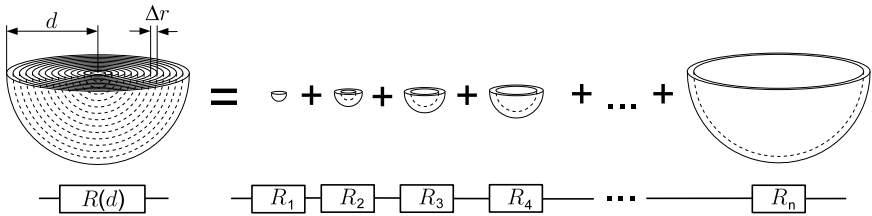
SITUÁCIA 2: v mieste B mám priložený kontakt a chcem, aby mi tadiaľ z kameňa tiekol práve prúd o veľkosti I . Teraz si ale spomeniem, že také čosi som už predsa niekedy videl, len v trochu odlišnom šate a trošku posunuté (čo vzhľadom na rozľahlosť nekonečného rozhrania balvan-vzduch nemôže na výsledku nič meniť). Je to presne rovnaká situácia ako v 1-tke, len s opačným smerom prúdu. Zrejme teda keď všetky potenciály z časti 1 dostanú mínusko a budem ich opäť merať voči nule v nekonečne (referenčnú hladinu som zachoval), tak to bude pracovať tak ako budem ja písať! Pre nás zaujímavé body sú síce zrkadlovo pretočené, ale to pri našej symetrickej úlohe nemôže hrať žiadnu rolu (zrkadlovo pretočená situácia 1 je stále 1 – lebo tam mám iba jeden význačný bod, ktorým do balvanu púšťam prúd). Takže môžem smelo povedať, že potenciál v B bude $-U_0$, v A $-U_1$, v C $-U_3$ a v D $-U_2$.

SUPERPOZÍCIA SITUÁCIÍ 1 A 2 (sčítam potenciál a prúd v každom mieste priestoru): v bode A mi kontaktom tečie prúd I do kameňa, v B mi tečie prúd I z kameňa do kontaktu. Potenciál (opäť meriam voči nekonečnu, kde je aj po superpozícii nulový potenciál) v A je $U_0 - U_1$, v B je $U_1 - U_0$, v C je $U_2 - U_3$ a v D je $U_3 - U_2$. Všimnime si, že táto superpozícia jednoduchých situácií 1 a 2 je presne náš zadaný problém, ktorý máme riešiť (lebo balvanom naozaj preteká prúd I medzi bodmi A a B , čo je jediná podmienka, ktorú musíme splniť, aby sme dostali ekvivalentnú situáciu). Ostáva nám teda určiť U_2 a U_3 v závislosti od I , ρ a a – potom napätie U zo zadania je rovné absolútnej hodnote rozdielu potenciálov v bodoch C a D , čiže $U = 2|U_2 - U_3|$. Očakávame teda, že cez U_2 a U_3 dostaneme závislosť U od I , ρ a a , z ktorej vyjadríme ρ pomocou známych veličín U , I a a .

Riešme teraz situáciu 1. Máme bod A , ktorým do balvanu „pumpujeme“ prúd I , merný elektrický odpor balvana je ρ a v nekonečne je nulový potenciál. Vidno, že situácia je rotačne symetrická, preto môžeme bez väčších okolov vyhlásiť, že $U_1 = U_2$. A to nie je všetko. Ak sa lepšie prizrieme, zbadáme, že situácia je dokonca v rámci kamenného polpriestoru sféricky symetrická – to znamená, že potenciál na ľubovoľnej polsfére (povrch polgule) so stredom v bode A je konštantný.

Teraz urobíme krok, ktorý sa vymyká predstavivosti bežných ľudí, hoci je zrejmé, že má zdravé jadro – konkrétne, ten náš balvan môžeme chápať ako vodič (drôt) medzi bodom A a „nekonečnom“, so zväčšujúcim sa prierezom $S = 2\pi r^2$, kde r značí vzdialenosť od bodu A . To môžeme preto, lebo prúd naozaj tečie vždy len smerom von z polgule so stredom v A . Skúsime určiť odpor takéhoto vodiča: Určite poznáte vzťah pre odpor R vodiča konštantného prierezu S , dĺžky d a s merným elektrickým odporom ρ v podobe $R = \rho \frac{d}{S}$. Tak my si náš polguľovitý vodič môžeme rozkúskovať na tenúcke škrupekiny hrúbky Δr a prierezu $S = 2\pi r^2$, ktoré sú zapojené sériovo za sebou. Môžeme to urobiť práve preto, lebo na povrchu každej takej škrupekiny bude konštantný potenciál.

Výsledný odpor nášho vodiča od počiatku A do bodu vo vzdialenosti d bude potom suma všetkých odporov škrupiniek až po tú škrupinku, ktorej polomer je práve d .



Nuž a keď prejdeme od škrupiniek malilínkej hrúbky k infinitezimálnej hrúbke, tak sa nám suma zmení na integrál, z Δr sa stane diferenciál dr a dostávame vzťah

$$R(d) = \int_0^d \rho \frac{dr}{2\pi r^2} = \left[-\frac{\rho}{2\pi r} \right]_0^d = -\frac{\rho}{2\pi d} + \frac{\rho}{2\pi 0}.$$

Toto je však trošku nepríjemné, lebo sme dostali v menovateli nulu (hovoríme, že integrál diverguje do plus nekonečna). Skúsime sa s tým nejako vyrovnáť. Najprv odstránime ideologický problém (skutočne by bolo nepríjemné, keby nám náš odpor vyšiel nekonečný, lebo by sme ním nemohli „pretlačiť“ žiaden prúd) tým, že kontakt nikdy nebude presne bodový. Každý rozumný kontakt má nejaký rozmer, označme ho α , a ten môžeme pri istej dávke predstavivosti považovať za veľmi dobre vodivý a polguľovitý. Potom by sme pri určovaní odporu vo vzdialenosti d od bodu A dostali ako výsledok integrálu $R(d) = \left[-\frac{\rho}{2\pi r} \right]_{\alpha}^d = -\frac{\rho}{2\pi d} + \frac{\rho}{2\pi \alpha}$, čo už je konečné. Praktický problém vyriešime ešte jednoduchšie, lebo my potrebujeme určiť len

$$\begin{aligned} U &= 2|U_2 - U_3| \\ &= 2I(R(\sqrt{2}a) - R(a)) \\ &= 2I \int_a^{\sqrt{2}a} \rho \frac{dr}{2\pi r^2} \\ &= 2I \left[-\frac{\rho}{2\pi r} \right]_a^{\sqrt{2}a} \\ &= \frac{I\rho(\sqrt{2} - 1)}{\pi\sqrt{2}a}, \end{aligned}$$

čo na rozmere kontaktu či jeho bodovosti vôbec nezávisí. Odtiaľ dostávam aj výsledok

$$\rho = \frac{U\pi\sqrt{2}a}{I(\sqrt{2} - 1)}.$$

Ešte dodám, že pre odpor nevelmi extravagantných vodičov sa skutočne používa vzorec na výpočet odporu $R = \int \rho \frac{dr}{S}$, ktorý má však obmedzenú platnosť pre vodiče, v ktorých je smer prúdu viac-menej rovnobežný s dĺžkou (t.j. so smerom, v ktorom uvažujeme dr). Táto požiadavka je splnená úplne len pre veľmi symetrické prípady: napríklad pre vodič konštantného prierezu alebo pre ľubovoľný výsek gule (napr. aj polguľu) – v takom prípade totiž prúd tečie kolmo na časti sféry a to je presne smer, v ktorom hovoríme o dĺžke (dr).

Ešte jedna poznámka o napätí potrebnom na pustenie prúdu I do zeme. Pre situáciu 1 musí platiť $U_0 = IR(\infty) = I[-\frac{\rho}{2\pi r}]_{\alpha}^{\infty} = \frac{I\rho}{2\pi\alpha}$. Čiže o veľkosti potrebného napätia rozhoduje okrem merného elektrického odporu kameňa ρ a požadovaného prúdu I aj veľkosť kontaktu (pri polguľovom kontakte napríklad jeho polomer α). Presne rovnako to platí aj pre situáciu 2. Takže napätie zdroja potrebné na vyvolanie prúdu I spomínaného v zadaní (za predpokladu rovnako veľkých kontaktov o polomere α) je

$$U_{\text{zdroj}} = 2|U_0 - U_1| = 2|U_0 - (U_0 - IR(a))| = \frac{I\rho}{\pi} \left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{a} \right).$$

Alternatívne riešenie zadanej úlohy využíva taktiež superpozíciu na také dve situácie ako sme mali aj my, avšak situáciu nepopisuje pomocou potenciálu, ale pomocou elektrickej intenzity $\mathbf{E}$. Táto je podľa Ohmovho zákona (zapísaného v diferenciálnom tvare) priamo úmerná plošnej hustote prúdu $\mathbf{i} = \frac{1}{\rho}\mathbf{E}$. Keďže prúd poznáme a náš problém je sféricky symetrický, tak vieme, že každou sférou musí tiecť práve prúd o veľkosti I a smerom kolmým na ňu. V reči formúl (nie tých motorových...) zapíšeme $\mathbf{i}(\mathbf{r}) = \frac{I}{2\pi} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_A}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_A|^3}$, kde $\mathbf{r}_A$ značí polohový vektor miesta A, kam púšťame prúd I ; a vektor $\mathbf{r}$ určuje miesto, v ktorom zisťujem plošnú hustotu prúdu $\mathbf{i}$. Spolu s Ohmovým vzťahom tak ale fakticky poznáme elektrickú intenzitu $\mathbf{E}$ v celej oblasti. Vieme aj to, že $U = \int_C^D \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r}$ (integrál po dráhe z bodu C do D). Ak si rozumne zavedieme súradnicovú sústavu, tak vyjde celkom slušný integrál, ktorý sa dá spočítať pomocou substitúcie. Výsledok je, ako inak, rovnaký.

FX C5 – ŠKRUPINA



Máme vodivú izolovanú guľovú škrupinu nabitú nábojom Q . Peťo má bodový náboj rovnakej veľkosti a chce si ho niekam odložiť. Nájdite všetky jeho možné polohy v priestore také, že naň nepôsobí žiadna sila.

Zdroj: Úlohu vymyslel Bzdušo

 VZORÁK KUBUS 

Zamyslime sa najprv, čo to vlastne znamená, že guľová škrupina je vodivá. Znamená to, že náboj sa po nej môže voľne pohybovať. Keď teda niekde do priestoru umiestnime bodový náboj Q aj s jeho príspevkom k elektrickému poľu, náboj na škrupine to bude cítiť a začne sa nejako hýbať. Bude sa premiestňovať po škrupine až dovtedy, kým ho k tomu elektrické sily neprestanú nútiť (nútiť hýbať sa po škrupine – môžu ho tlačiť von zo škrupiny, lebo tomu zabraňujú vnútorné sily v materiáli škrupiny). Elektrické pole na škrupine bude teda všade kolmé na jej povrch.

Toto je celkom užitočná informácia, ale zrátat' rozmiestnenie náboja na škrupine len z nej by bolo dosť zložité. Pozrime sa na jej inú formuláciu. Potenciál na celej škrupine musí byť rovnaký, pretože v opačnom prípade by náboj z miest s vyšším potenciálom tiekol na miesta s nižším potenciálom (až kým by sa to nevyrovnalo). Toto je už trochu krajšia podmienka, stále z nej však nevieme zrátat' rozmiestnenie náboja na škrupine. Poďme si ho teda istým spôsobom tipnúť.

Možno poznáte metódu zrkadlenia pri počítaní interakcie náboja a vodivej roviny, skúsme sa ňou inšpirovať. Keby sme vodivú škrupinu nahradili nejakým bodovým nábojom, ktorý by spôsoboval konštantný elektrický potenciál akurát v mieste pôvodnej škrupiny, a keby tá konštantná hodnota bola rovnaká ako v prípade pôvodnej škrupiny, vedeli by sme ju ním potom nahradiť a postupovať podobne ako v príklade s vodivou rovinou. Umiestnime teda náš náboj Q do počiatku súradnicovej sústavy a uvažujme druhý náboj q v bode $(a, 0)$. Elektrický potenciál v bode (x, y) bude potom

$$V = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{\sqrt{x^2 + y^2}} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{\sqrt{(x-a)^2 + y^2}},$$

kde pre potenciál bodového náboja používame štandardný vzťah $V = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{D}$, kde D je vzdialenosť od náboja, pričom v nekonečne položíme potenciál nulový. Skúsme nájsť všetky body, kde má potenciál nejakú pevnú hodnotu

V_0 . Vlastne, ak nahliadneme do nasledovných výpočtov, zistíme, že oveľa jednoduchšie sa nám budú hľadať body, kde bude mať potenciál hodnotu 0. (S nenulovým V_C by boli rovnice dosť škaredé.) Upravujeme a dostaneme

$$-\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{\sqrt{x^2 + y^2}} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{\sqrt{(x-a)^2 + y^2}} = 0$$

$$Q\sqrt{(x-a)^2 + y^2} = -q\sqrt{x^2 + y^2}$$

$$Q^2(x-a)^2 + Q^2y^2 - q^2x^2 - q^2y^2 = 0$$

$$x^2(Q^2 - q^2) - 2Q^2xa + Q^2a^2 + y^2(Q^2 - q^2) = 0$$

$$(Q^2 - q^2)(x^2 - 2\frac{Q^2a}{Q^2 - q^2}x + \frac{Q^4a^2}{(Q^2 - q^2)^2}) + y^2(Q^2 - q^2) = \frac{Q^4a^2}{Q^2 - q^2} - Q^2a^2$$

$$(x - \frac{Q^2a}{Q^2 - q^2})^2 + y^2 = \frac{Q^2q^2a^2}{(Q^2 - q^2)^2}.$$

Aha. Množina všetkých bodov (v rovine xy), v ktorých bude potenciál nulový, bude akurát kružnica so stredom v $[\frac{Q^2a}{Q^2 - q^2}, 0]$ a polomerom $\frac{Qqa}{Q^2 - q^2}$.⁷⁵ Ak by sme si to celé napísali v priestorových súradniciach, alebo ak si uvedomíme symetriu celej situácie podľa osi x , zistíme že v troch rozmeroch je táto množina guľová škrupina (sféra) s rovnakým stredom a polomerom. Ak teda potrebujeme mať nulový potenciál na škrupine s polomerom R a stredom vo vzdialenosti D od nášho náboja Q , pre parametre a a q pridaného náboja musí platiť

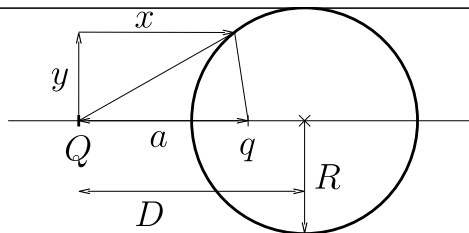
$$\frac{Q^2a}{Q^2 - q^2} = D \quad \text{a} \quad \pm \frac{Qqa}{Q^2 - q^2} = R.$$

Jednoduchým riešením týchto rovníc dostaneme

$$q = \pm Q \frac{R}{D} \quad \text{a} \quad a = D - \frac{R^2}{D},$$

pričom z $\pm$ si vyberieme $-$, pretože znamienko náboja q musí byť opačné ako náboja Q . Toto môžeme vidieť napríklad z druhej rovnice v predchádzajúcich úpravách, jej umocnením na druhú sa ďalej táto informácia stratila. Celá situácia bude vyzeráť napríklad ako na tomto obrázku:

⁷⁵Geometricky je to množina bodov s rovnakým podielom vzdialeností od dvoch daných bodov – Riešením je známa Apolóniova kružnica.

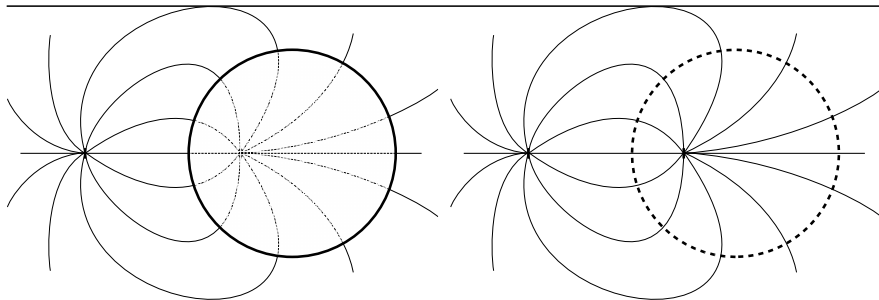


Zatiaľ nič zložité. Priam až veľmi pekné, všimnime si najmä to, že náboj q bude vo vzdialenosti $\frac{R^2}{D}$ od stredu guľovej škrupiny, na priamke spájajúcej stred škrupiny a náš náboj Q .⁷⁶ Ak bol Q vonku, q bude vnútri a naopak. Čím bližšie bude ku škrupine náboj Q , tým bližšie k nej bude q .

Ak má teda naša guľová škrupina práve nulový potenciál (čo mimochodom znamená, že sa správa akoby bola uzemnená), môžeme použiť „zrkadliaci trik“ podobne ako pri vodivej rovine. (Ak ste takýto príklad nevideli, skúste si potom spočítať silu, ktorou pôsobí nekonečná vodivá rovina na náboj vedľa nej.)

Takže trik: predstavme si dve situácie. V jednej máme náboj Q a vodivú guľovú škrupinu s nulovým potenciálom (nech je náboj vonku zo škrupiny – ak je vnútri, vieme argumentovať podobne). V druhej máme náboj Q a druhý náboj q vo vypočítanej polohe vzdialenej a tak, aby v mieste guľovej škrupiny bol nulový potenciál. V oboch situáciách máme v oblasti priestoru *mimo* našej guľovej škrupiny presne rovnaké tzv. okrajové podmienky: potenciál je nulový v nekonečne a na škrupine, okrem toho je všade prázdny priestor okrem bodového náboja Q . Z teórie elektrostatických rovníc (Poissonových, Laplaceových rovníc) vyplýva, že takáto situácia môže mať nanaajvýš jedno riešenie pre hodnotu potenciálu, a teda aj hodnotu elektrického poľa. Inými slovami, v oblasti mimo gule je nám jedno, či je nulový potenciál na jej okraji spôsobený vodivou škrupinou alebo nábojom q , všetky elektrostaticky merateľné veličiny budú rovnaké. Okrem iného bude rovnaká aj sila pôsobiaca na náš náboj Q :

⁷⁶Ak poznáte sférickú (kružnicovú) inverziu z geometrie, polohu náboja q nájdeme presne zobrazením polohy náboja Q sférickou inverziou.



Fúú. Viem, že toto vysvetlenie nie je ani náhodou úplné alebo korektné, ale bez sofistikovanejšej teórie elektrostatiky (o Poissonovej rovnici pre potenciál a podobne) sa nedá poriadnejšie formulovať, a bez pokročilej teórie diferenciálnych rovníc sa asi nedá rozumne dokázať. Ale snáď sa to intuitívne pochopiť dá, a je to celkom užitočný trik.⁷⁷ (Najmä v prípade už spomínanej vodivej roviny namiesto vodivej gule.)

Každopádne, ak by mala naša vodivá škrupina nulový potenciál, vieme silu pôsobiacu na náboj Q ľahko vypočítať – škrupinu jednoducho nahradíme nábojkom q a silu zrátame pomocou Coulombovho zákona. Lenže čo keď je jej potenciál nenulový? Alebo, inak povedané, čo ak musí mať iný celkový náboj, aby mala nulový potenciál? Nič jednoduchšie. Ak by škrupina musela mať celkový náboj Q' na to, aby mala nulový potenciál, stačí, keď na pôvodnú škrupinu rovnomerne rozmiestnime náboj $Q' - Q$, a je to. Alebo naopak, stačí, keď na škrupinu s nulovým nábojom rovnomerne rozmiestnime náboj $Q - Q'$, a máme našu škrupinu s nábojom Q .⁷⁸ (†)

Už len treba zistiť, aký náboj musí mať škrupina, aby mala nulový potenciál. Znova nateraz predpokladajme že Q je vonku. Spomeňme si, že ak sa pozeráme len na priestor okolo škrupiny s nulovým potenciálom, môžeme si ju nahradiť vypočítaným nábojom q . (Samozrejme, náboj Q musí byť tam, kde sme s ním rátali pri počítaní polohy a veľkosti q a a , nemôžeme prinášať nové náboje ani inak meniť situáciu – môžeme iba merať elektrické pole a podobne.) Ak teda obalíme našu škrupinu do myslenej uzavretej plochy a spočítame celkový tok elektrického poľa touto plochou, dostaneme rovnaký výsledok, ako keby sme to spravili pre náboj q . No ale z Gaussovho zákona bude tento tok presne $\frac{Q_{\text{dnu}}}{\epsilon_0}$, kde Q_{dnu} je celkový náboj vnútri plochy. Takže v oboch situáciach je celkový náboj vnútri plochy rovnaký, a teda celkový náboj na škrupine s nulovým potenciálom je presne q .

⁷⁷Záujemcom odporúčam si pozrieť si niečo o metóde zrkadlenia v literatúre, napríklad vo Feynmanových prednáškach z fyziky, 2. diel, 6. kapitola. Alebo na internete, v angličtine "method of images".

⁷⁸Uvedomme si, že škrupina má všade rovnaký potenciál, či už má hocikaký celkový náboj. Ak na ňu teda pridáme nejaký náboj navyše, tento sa rozmiestni homogénne po celej škrupine.

A máme to. Podľa úvahy (†) sa naša vodivá guľová škrupina bude správať ako superpozícia vypočítaného „náhradného“ náboja q a rovnako veľkej guľovej škrupiny *rovnomerne nabitaj* nábojom $Q - Q' = Q - q$. Keďže Q je z nej vonku, táto rovnomerne nabitá škrupina sa bude správať ako bodový náboj rovnakej veľkosti.⁷⁹ Náhradný náboj q bude vnútri škrupiny, čiže rovnakým smerom od Q ako stred škrupiny (sily sa preto budú sčítavať). Celková sila pôsobiaca na Q je teda

$$\begin{aligned} F &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Qq}{a^2} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q(Q-q)}{D^2} \\ &= -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q^2 \frac{R}{D}}{D^2 \left(1 - \frac{R^2}{D^2}\right)^2} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q^2 \left(1 + \frac{R}{D}\right)}{D^2} \end{aligned}$$

Ak má byť $F = 0$, potom

$$\begin{aligned} \frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0 D^2} \frac{\frac{R}{D}}{\left(1 - \frac{R^2}{D^2}\right)^2} &= \frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0 D^2} \left(1 + \frac{R}{D}\right) \\ 0 &= \left(1 + \frac{R}{D}\right) \left(1 - \frac{R^2}{D^2}\right)^2 - \frac{R}{D} \end{aligned}$$

Označme $\alpha = \frac{R}{D}$ a dostaneme rovnicu piateho stupňa pre α . Našťastie sa dá napísať ako súčin kvadratickej a kubickej rovnice,

$$\begin{aligned} 0 &= (1 + \alpha)(1 - \alpha^2)^2 - \alpha = \alpha^5 + \alpha^4 - 2\alpha^3 - 2\alpha^2 + 1 \\ &= (\alpha^2 + \alpha - 1)(\alpha^3 - \alpha - 1). \end{aligned}$$

Jej jediný kladný reálny koreň menší ako 1 (stále uvažujeme Q vonku zo škrupiny a teda $R < D$) je práve koreň $\alpha = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ prvého, kvadratického deliteľa. V tom prípade $D = \frac{R}{\alpha} = R \frac{\sqrt{5}+1}{2}$.

Pozor, keď je náboj Q vnútri škrupiny, nemôžeme použiť presne tú istú úvahu. Totiž jednoznačnosť riešenia a teda „rovnakosť situácie“ pre vodivú škrupinu a pre náhradný náboj je teraz zabezpečená iba vnútri škrupiny. S našou gaussovskou plochou sa teda nemôžeme hrať mimo škrupiny, a hranie sa vnútri nám na určenie náboja Q' škrupiny príliš nepomôže (rozmyslite si).

Náboj Q' však jednoducho zistíme inou úvahou. Keď je na škrupine nulový potenciál a mimo nej je len prázdny priestor, musí byť nulový potenciál aj všade okolo nej. (Spomeňte si napríklad na jednoznačnosť riešenia mimo nej, alebo si rozmyslite ako by mohol vzniknúť nenulový potenciál len tak v prázdnom priestore.) Takže Gaussova plocha okolo škrupiny nameria nulový celkový náboj (teraz sa vôbec nerozprávame o nahradzovaní nábojom

⁷⁹Podobne ako sa rovnomerne nabitá guľa správa ako bodový náboj s rovnakým celkovým nábojom.

q , len o pôvodnej situácii, takže nám nič nebráni hrať sa s gaussovskými plochami aj mimo škrupiny), čiže celkový náboj škrupiny Q' musí byť rovný $-Q$, aby vyrovnal náboj Q vnútri.⁸⁰

Teraz sa znova môžeme pustiť do výpočtov podľa úvahy (†). Máme teda Q vnútri škrupiny a vodivú škrupinu sme nahradili nábojom q a rovnomerne nabitou škrupinou s nábojom $Q - Q' = Q - (-Q) = 2Q$. Ale vlastne – táto rovnomerne nabitá škrupina na náboj Q nebude pôsobiť žiadnou silou, lebo tento je v jej vnútri!⁸¹ Takže sila na náboj Q bude pochádzať len od náhradného náboja,

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qq}{a^2}.$$

Toto nikdy nie je nula, keďže $q > 0$.

Okrem toho, že sme zabudli na špeciálny prípad $D = 0$ – vtedy a vôbec nie je definované a celé doterajšie riešenie nefunguje – ale vtedy je náboj Q v trede škrupiny a zo symetrie je jasné, že naň nebude pôsobiť žiadna sila. A tiež sme zabudli na špeciálny prípad $Q = 0$, keď naň zjavne nebude pôsobiť žiadna sila v ľubovoľnej polohe.

Na náboj teda nebude pôsobiť žiadna sila ak bude sám nulovej veľkosti, ak bude v strede škrupiny, alebo vo vzdialenosti $\frac{\sqrt{5}+1}{2}R$ od jej stredu.

⁸⁰Možno už tušíte, že na Q' nám nakoniec vôbec nebude záležať, ale chcel som ukázať aj túto úvahu.

⁸¹Spomeňte si napríklad na analogický fakt, že gravitačné pole vnútri homogénnej guľovej škrupiny je nulové.⁸²

FX C6 – ČIARA



Keď bola Marcelka na prednáške, Janka jej zo stavebnice s nábojmi zobrala dva rovnaké kladné náboje o veľkosti Q a priblížila ich do vzdialenosti d od seba. Potom si nakreslila siločiaru, ktorá vychádzala z jedného z týchto nábojov pod uhlom α ku spojnici oboch nábojov. Do akej najmensej vzdialenosti od roviny symetrie nábojov sa táto siločiara dostane?

Zdroj: Kvant



Nu, pištíci. Tento vzorák začnem veľmi stroho. Táto úloha je naozaj ťažká. Napriek tomu, naozaj má analytické riešenie. Hádám bude pre vás ponaučením, že niekedy si treba zvoliť naozaj bizarné súradnice, aby sa rovnice dali jednoducho vyriešiť. Mnohí ste istotne okúsili, že práca v kartézskej súradnicovej sústave je slepá alebo prinajmenšom veľmi trnistá ulička. Je lepšie vrátiť sa späť na začiatok a vymyslieť nejakú inú cestu.

A teraz už pekne a po poradi. Alfou a omegou nášho riešenia bude Gaussov zákon, bez ktorého by sa síce úloha riešiť dala, avšak jednoduchšie by bolo postaviť z hracích kariet Koloseum. Pre poriadok a čiste z pedagogických dôvodov si dovoľm malú vsuvku, ktorú môžu znalci s čistým svedomím preskočiť.

Gaussov zákon

Začneme krátkou reklamou:

Gaussov zákon je úplne super!

Aby ste mi ho kúpili, mal by som ho dobre predávať, a uvedený nápis vyzerá určite krajšie ako rovnica, ktorá sa za ním skrýva:

$$\oint_{\partial D} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_D \rho dV.$$

Gaussov zákon je pre elektrostatické situácie ekvivalentný Coulombovmu zákonu, len je zapísaný vo veľmi odlišnom tvare. Nebudem ho tu z Coulombovho zákona odvodzovať, len si poriadne vysvetlíme, čo jeho rovnica ukrýva. Začneme významom jednotlivých písmen:

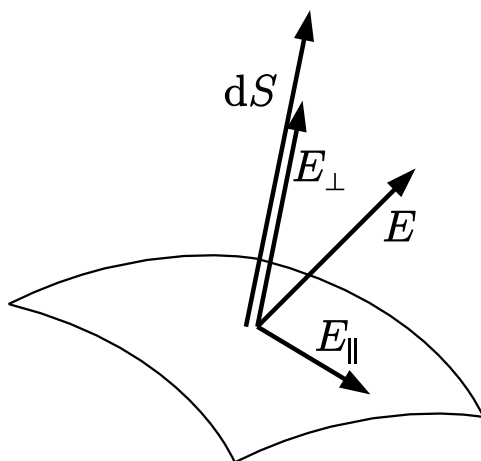
- D predstavuje nejakú (ľubovoľnú) myslenú uzavretú oblasť priestoru (napr. zemiak, vnútro balóna), ∂D predstavuje hranicu tejto oblasti (napr. zemiaková šupa, povrch balóna).

- dS predstavuje diferenciálny kúsok hranice myslenej oblasti, $d\mathbf{S}$ je tejto plôške prislúchajúci vektor. Má tú vlastnosť, že je kolmý na povrch hranice ∂D , smeruje von z oblasti D a pre jeho veľkosť platí $|d\mathbf{S}| = dS$.
- $\mathbf{E}$ je vektor elektrickej intenzity.
- ρ je hustota elektrického náboja.

Ostatné písmenká, ako napríklad permitivitu vákua ε_0 , by sme mohli v dave rozoznať.

Najprv si premyslime integrál na pravej strane rovnice. Integrujeme hustotu náboja cez nejakú oblasť. Výsledok bude analogický, ako keď zintegrujeme hustotu hmoty cez nejaký objem, tzn. dostaneme celkový náboj, ktorý je obklopený hranicou oblasti ∂D . Množstvo tohto náboja je ešte predelené bulharskou konštantou ε_0 .

Ľavá strana je o niečo komplikovanejšia. Je tam integrál akéhosi skalárneho súčinu cez akúsi plochu . . . jednoducho vec, ktorá si zaslúži nasledujúci obrázok. Je na ňom zakreslená diferenciálna plôška dS , ktorá je taká malá, že ju možno prakticky považovať za plochú, a ktorá tvorí drobný kúsok hranice ∂D :



Táto plôška je tiež dosť malá na to, aby sa elektrická intenzita $\mathbf{E}$ na jej povrchu prakticky nemenila. Ak si elektrickú intenzitu v tomto mieste rozložíme do smeru kolmého na povrch $\mathbf{E}_\perp$ a do smeru rovnobežného s povrchom $\mathbf{E}_\parallel$, je jasné, že ku skalárnemu súčinu $d\mathbf{S} \cdot \mathbf{E}$ prispieva práve $\mathbf{E}_\perp$.

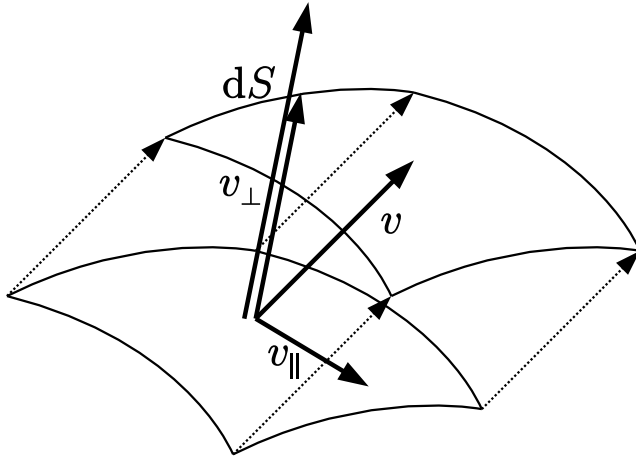
Aby sme sa s pochopením dostali o kúsok ďalej, zmeníme na krátky čas terč našej pozornosti. Skúsime si predstaviť inú, nasledovnú situáciu. Celý priestor je vyplnený vodou, ktorá vo svojom objeme nejako prúdi. Znova si predstavíme v priestore nejakú fixovanú oblasť D ohraničenú uzavretou

plochou ∂D . Ide len o myslenú oblasť priestoru, čo znamená, že prúdiaca voda o nej v princípe nevie a všelijako ňou môže prechádzať.

Takejto kvapaline možno priradiť rýchlostné pole $\mathbf{v}(x, y, z, t)$, ktoré hovorí, aký je vektor rýchlosti v jednotlivých bodoch kvapaliny v danom mieste a čase. Vezmime si nejaký konkrétny čas t a poďme skúmať, ako by sa dal interpretovať integrál

$$\oint_{\partial D} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S}.$$

Analogickým postupom sa dostaneme k riešeniu otázky na diferenciálnej plôške dS . Uvažujme, o koľko sa na takejto plôške posunie voda za veľmi malý čas dt . Voda sa posunie v smere vektora rýchlosti, ako to ukazuje nasledujúci obrázok:



Vieme si predstaviť, že v prípade veľmi malej oblasti dS by bol objem kvapaliny, ktorá vytekla cez túto plôšku, akýsi rovnobežnosten so základňou dS a s výškou $dh = |\mathbf{v}_{\parallel}|dt$. Objem vytečenej kvapaliny by bol $dV = dh dS$ a objemový prietok vody touto plôškou by bol

$$dQ = \frac{dV}{dt} = |\mathbf{v}_{\parallel}|dS,$$

pričom v prípade, že by voda prúdila dnu, bolo by tam ešte záporné znamienko. To sa dá formálne dať zapísať presne ako

$$dQ = \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S}.$$

Teraz porozmýšľajme nad tým, čomu sa bude rovnať integrál cez celú hranicu oblasti ∂D . Zrejme dostaneme

$$\oint_{\partial D} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S} = Q,$$

kde Q je celkový výtok vody zvnútra tejto oblasti. Ak predpokladáme, že voda je nestlačiteľná a vo vnútri sa nám nevytvárajú nijaké záhadné bublinky, tak hustota vody je všade v priestore konštantná a zrejme rovnaké množstvo vody, aké z našej oblasti D niekde vytečie, do nej musí v nejakej inej časti aj vtekať. To znamená, že celkové Q je rovné nule a platí

$$\oint_{\partial D} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S} = 0.$$

Táto rovnica sa dosť podobá na Gaussov zákon s nulovou hustotou náboja. Aby sme pochopili, že súvislosť tečenia vody s Gaussovým zákonom je omnoho silnejšia, rozmyšľajme ďalej. Predstavme si, že máme vnútri oblasti D zdroje vody. Nejaké rozprávkové vodovodné kohútiky, v ktorých sa voda vytvára z *ničoho*. Každý takýto kohútik bude mať nejaký objemový prietok Q_i ,⁸³ ktorý môže byť kladný alebo záporný podľa toho, či vodu do systému dodáva, alebo ju vyciciava. V takom prípade by sa náš Gaussov zákon pre tečúcu vodu zmenil na

$$\oint_{\partial D} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S} = \sum_i Q_i.$$

No ale počkať, táto rovnica má presne rovnaký tvar ako Gaussov zákon! Veď suma je tiež len „akoby integrál“. A takejto rovnici už celkom jedno-ducho rozumieme. Hovorí len o tom, koľko vody vyteká z nejakej uzavretej plochy, keď sú v nej nejaké zdroje a nejaké odberače vody. Skúsme nájsť nejaké analogické pochopenie elektrických veličín v Gaussovom zákone. Napíšme si ho ešte raz:

$$\oint_{\partial D} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_D \rho dV.$$

Čo takto predstaviť si, že aj elektrické pole *tečie*?⁸⁴ Smer a akási rýchlosť tečenia je vyjadrená elektrickou intenzitou $\mathbf{E}$. Náboje uzavreté oblasťou sa správajú ako vodovodné kohútiky s prietokom Q/ε_0 . Integrál na ľavej strane rovnice teda hovorí o tom, koľko elektrického poľa vyteká cez hranicu ∂D , a pravá strana hovorí o zdrojoch tohoto tečenia, ktorými sú elektrické náboje.

Predstava, že elektrické pole tečie, sa zdá na prvý pohľad dosť úchylná. Avšak tento pojem sa naozaj zaužíval. Keď si vezmem hocijakú (nie nutne uzavretú) plochu S , tak integrál

$$\Phi = \int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}$$

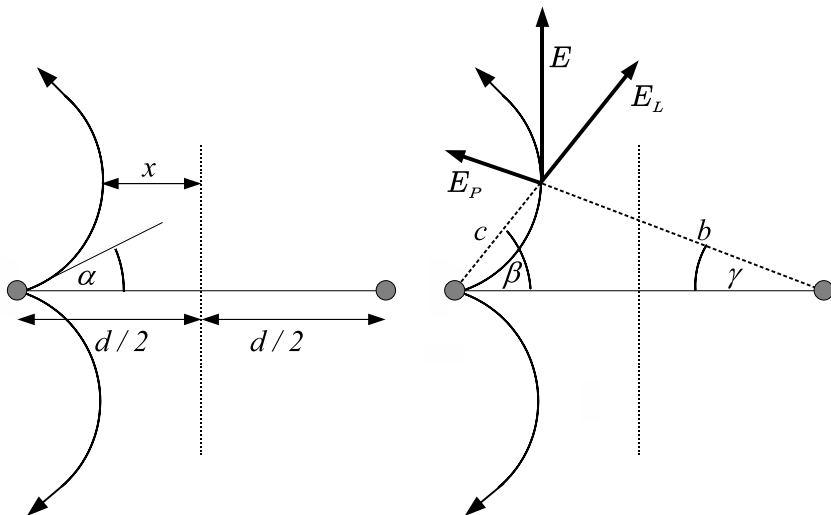
⁸³Je priam rozprávkový zázrak, že aj prietok vody, aj elektrický náboj sa zvyknú značiť rovnakým písmenom. V našich gaussovských úvahách majú až nápadne podobnú reprezentáciu.

⁸⁴Dokonca tečie ako nestlačiteľná kvapalina! Pri ďalšom štúdiu navyše zistíte, že elektromagnetické pole sa šíri priestorom rýchlosťou svetla, má vlastnú energiu, hybnosť a dokonca aj vlastný moment hybnosti. Myslíte si stále, že pole je len matematická predstava, alebo ho už považujete za akúsi formu hmoty?

sa nazýva *tok elektrického poľa* (resp. tok intenzity elektrického poľa $\mathbf{E}$) plochou S . No a podobné toky zohrajú jednu z kľúčových úloh pri riešení problému s našou siločiarou.

Po dlhšej odbočke samotné riešenie

Čo vieme povedať o mieste, kde sa siločiaru najviac priblíži k rovine symetrie? Napríklad to, že elektrická intenzita v tom mieste bude rovnobežná s touto rovinou, ako to zobrazuje pravý z nasledujúcej dvojice obrázkov.



Ak si zavedieme parametre b , c , β a γ tak ako na obrázku, túto podmienku si vieme napísať ako

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{c^2} \cos \beta = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{b^2} \cos \gamma,$$

odkiaľ dostávame

$$b^2 \cos \beta = c^2 \cos \gamma.$$

Z geometrie trojuholníka, konkrétne zo sínusovej vety, dostávame ďalšie rovnice:

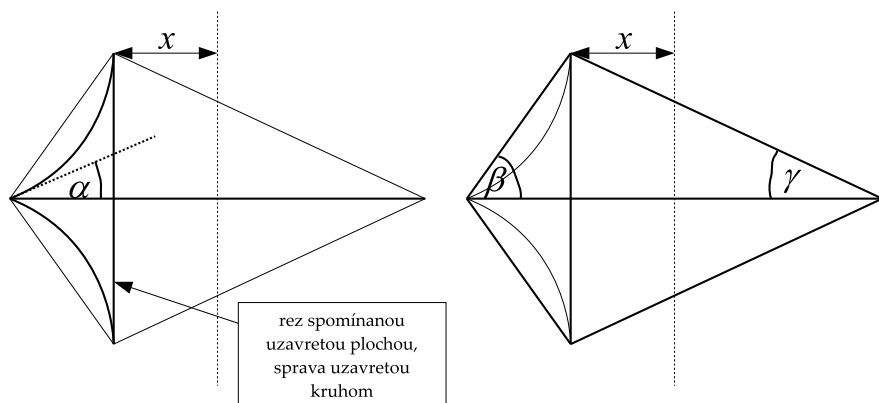
$$\frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = \frac{d}{\sin (\beta + \gamma)}.$$

Tieto tri rovnice nevyzerajú nijako zle, ale treba si uvedomiť, že je to práve vďaka dobre zvoleným parametrom.

Všimnite si, že zatiaľ máme tri rovnice o štyroch neznámych. Vidíme, že nám do systému zatiaľ nijako nevošiel uhol α . Zrejme množina riešení takejto sústavy rovníc vedie k nájdeniu množiny všetkých bodov, v ktorých

sa *nejaká* siločiaru najviac priblíži k rovine symetrie. Otázka teraz znie: aká dodatočná podmienka platí pre špeciálnu siločiaru, ktorá vychádza z náboja pod uhlom α ?

Teraz nadchádza ten kľúčový okamih, kedy po dobrom marketingovom ťahu konečne použijeme Gaussov zákon. Vezmeme si povrch, ktorý vznikne rotáciou našej siločiaru okolo spojnice nábojov,⁸⁵ a k tomuto povrchu sprava nalepíme rovinnú plochu. Napravo od náboja nám takto vznikne uzavretá oblasť tvaru akéhosi stlačeného kužeľa, ktorého plášť tvorí povrch sledujúci siločiaru a ktorého podstavu tvorí kruh prechádzajúci aj hľadaným bodom – bodom najbližšieho priblíženia našej siločiaru ku rovine symetrie nábojov. Celá situácia je znázornená v reze na nasledujúcom obrázku naľavo.



Podme si pre túto oblasť (a plochu danú jej povrchom) zapísať Gaussov zákon. Úplne najprv musíme určiť, koľko náboja je uzavretého vo vnútri. Aby sa nám to podarilo, nemôžeme si náboj predstavovať ako bodový, ale ako miniatúrnu guľôčku, ktorá je usídlená v ostrom rohu našej plochy. Aká časť tohto náboja je v jej vnútri?

Ak by bol napríklad náboj guľôčky rovnomerne rozložený po jej povrchu, s povrchovou hustotou $\sigma = \frac{Q}{4\pi r^2}$, dostaneme pre náboj Q^* uzavretý vnútri našej plochy

$$\begin{aligned}
 Q^* &= \int \sigma \, dS = \int_{r \cos \alpha}^r \sigma \underbrace{(2\pi r \sin \theta)}_O \underbrace{\frac{dx}{\sin \theta}}_{ds} = \\
 &= \int_{r \cos \alpha}^r 2\pi r \sigma \, dx = 2\pi r^2 \sigma (1 - \cos \alpha) = \frac{Q}{2} (1 - \cos \alpha),
 \end{aligned}$$

⁸⁵Ide zrejme o body všetkých siločiar, ktoré vychádzajú pod uhlom α v rôzne natočených rovinách.

kde sme si povrch guľôčky rozložili na množstvo prstencov s vrcholovým uhlom θ , ktoré vytínali na osi x interval šírky dx a pre ktorých povrch sme využili vzťah $dS = O \cdot ds$, kde O je obvod prstenca a s je jeho skutočná šírka. Nakreslite si k tomu obrázok!

Môžete si rozmyslieť, že rovnaký výsledok by sme dostali aj pre homogénne nabitú guľôčku, alebo vlastne hocikaké rozloženie náboja, ktoré by spôsobovalo rovnaké (vonkajšie) elektrické pole ako bodový náboj.⁸⁶

Ak sme teda našli celkový náboj Q^* vnútri našej gaussovskej plochy, vieme, že tok elektrického poľa touto plochou musí byť rovný Q^*/ε_0 . Navyše, a presne pre toto sme si zvolili plochu práve takto, **všetko pole vyteká len kruhovou podstavou**. V ostatných miestach je totiž gaussovská plocha tvorená siločiarami a preto tadiaľ žiadne pole nevyteká.⁸⁷ Tok kruhom budeme označovať Φ , a teda platí

$$\Phi = \frac{Q}{2\varepsilon_0} (1 - \cos \alpha).$$

Avšak, pre elektrické pole platí princíp superpozície, preto musí byť tento tok rovný súčtu tokov spôsobených jednotlivými bodovými nábojmi. Na určenie toku cez náš kruh v prítomnosti iba jedného z nábojov môžeme použiť podobný postup ako doteraz, keď sme tam mali náboje dva. Tentoraz budú dokonca siločiarly rovné, takže použité gaussovské plochy budú pekné kužeľovité – ale to nás vlastne vôbec netrápi, v konečnom dôsledku závisí len na uhle, pod ktorým vychádzajú z náboja. Ak sa zapozeralme do druhého z ostatnej dvojice obrázkov, prideme takto k rovnosti

$$\begin{aligned} \frac{Q}{2\varepsilon_0} (1 - \cos \alpha) &= \frac{Q}{2\varepsilon_0} (1 - \cos \beta) - \frac{Q}{2\varepsilon_0} (1 - \cos \gamma) \\ 1 - \cos \alpha &= 1 - \cos \beta - 1 + \cos \gamma \\ 1 - \cos \alpha &= \cos \gamma - \cos \beta. \end{aligned}$$

Ďalšia rovnica a opäť vyzerá pekne, ak sa zapíše pomocou uhlov β a γ . Určite preto už nejdeme filozofovať a v takto zvolených súradniciach⁸⁸ privedieme problém ku šťastnému koncu.

⁸⁶ Alebo, ak vám takýto postup nevoní, môžete si náboj nechať bodový, ale gaussovskej ploche odstrihnúť rožtek. Potom by bol celkový náboj vnútri plochy nulový, ale museli by sme vypočítať tok elektrického poľa cez plôšku, ktorá vznikla odstrihnutím. Ak si túto striháciu plôšku zvolíme správne, vôbec to nie je zložité, a dopracujeme sa k rovnakému výsledku.

⁸⁷ Skalárny súčin $\mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}$ je tam rovný nule.

⁸⁸ Hľadaný bod ležiaci na našej siločiare v rovine je týmito dvoma uhlami jednoznačne určený, preto si môžeme dovoliť termín *súradnice*

Zostáva problém, ako z týchto rovníc riešenie nejako vybúšiť. Vezmime si napríklad našu rovnicu z Coulombovho zákona a rovnicu zo sínusovej vety

$$b^2 \cos \beta = c^2 \cos \gamma \quad \text{a} \quad \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}.$$

Ich vhodným ponásobením sa zbavíme dĺžok b a c , a dostaneme

$$\sin^2 \beta \cos \beta = \sin^2 \gamma \cos \gamma.$$

Odtiaľ postupnými úpravami

$$\begin{aligned} (1 - \cos^2 \beta) \cos \beta &= (1 - \cos^2 \gamma) \cos \gamma \\ \cos^3 \gamma - \cos^3 \beta &= \cos \gamma - \cos \beta \\ (\cos \gamma - \cos \beta) (\cos^2 \gamma + \cos \gamma \cos \beta + \cos^2 \beta) &= \cos \gamma - \cos \beta \\ \cos^2 \beta + \cos \beta \cos \gamma + \cos^2 \gamma &= 1. \end{aligned}$$

V poslednej úprave sme využili fakt, že $\cos \beta \neq \cos \gamma$. To by totiž znamenalo, že siločiara sa dostane až k rovine symetrie, čo zrejme platí iba pre špeciálny prípad $\alpha = 0$.

Podarilo sa nám znížiť stupeň rovnice na 2, takže je už pre nás výrazne jednoduchšia. Ak si za niektorý z uhlov dosadím z rovnice získanej pre tok Φ , dostanem po úprave kvadratické rovnice

$$\begin{aligned} \cos^2 \beta + \cos \beta (1 - \cos \alpha) + (\cos^2 \alpha - 2 \cos \alpha) / 3 &= 0 \quad \text{resp.} \\ \cos^2 \gamma + \cos \gamma (\cos \alpha - 1) + (\cos^2 \alpha - 2 \cos \alpha) / 3 &= 0. \end{aligned}$$

Ich riešením⁸⁹ dostávame

$$\begin{aligned} \cos \beta &= \frac{\cos \alpha - 1 + \sqrt{(3 - \cos \alpha)(1 + \cos \alpha) / 3}}{2} \quad \text{resp.} \\ \cos \gamma &= \frac{1 - \cos \alpha + \sqrt{(3 - \cos \alpha)(1 + \cos \alpha) / 3}}{2}. \end{aligned}$$

Tým je kus škaredej roboty vyriešený. Keď poznáme kosínusy uhlov β a γ , vieme si vyjadriť aj sínusy. Vo výsledku ich teda využijem ako vhodnú

⁸⁹Vylúčime pri tom menšie z riešení, pretože vedú na záporné hodnoty kosínusov.

substitúciu. Pre hľadajú dĺžku x platí jednoducho

$$\begin{aligned} x &= \frac{d}{2} - c \cos \beta \\ &= \frac{d}{2} - \frac{c}{\sin \gamma} \sin \gamma \cos \beta \\ &= \frac{d}{2} - \frac{d}{\sin(\beta + \gamma)} \sin \gamma \cos \beta \\ &= \frac{d}{2} \left(1 - \frac{2 \sin \gamma \cos \beta}{\sin(\gamma + \beta)} \right). \end{aligned}$$

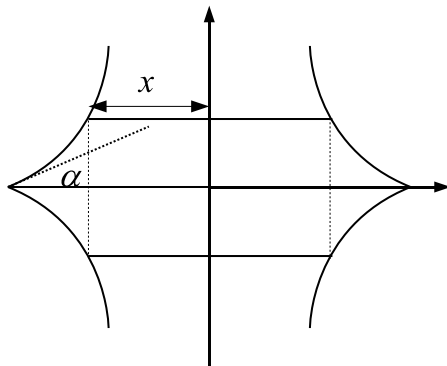
To je už výsledok v asi najkomprimovanejšom tvare. Za uhly dosádzať už nebudeme. Ozaj by to nevyzeralo pekne.

Riešenie podľa Dalimila Mazáča,

ktorý napriek tomu, ako som uvádzal tento vzorák, úlohu v kartézskych súradniciach vyriešil. Pri ukazovaní jeho postupu budem používať niektoré v predošlom texte nadobudnuté poznatky.

Zaveďme si súradnicovú sústavu s osou x zhodnou so spojnicou nábojov a s osou y v rovine ich symetrie. Vezmime si všetky siločiar, ktoré vychádzajú z jedného z nábojov pod uhlom α . Tvoria rotačne symetrické priestorové teleso, ktoré najprv vyzerá ako kužeľ, no potom sa rovnako ako siločiar stočí späť. Vezmime si takú istú plochu vychádzajúcu aj z druhého z nábojov.

Priestor medzi týmito dvoma plochami obsahuje na základe už popísaných úvah a výpočtov náboj $Q_{\text{vnútri}} = 2 \frac{Q}{2} (1 - \cos \alpha) = Q (1 - \cos \alpha)$. Napokon uzavrieme tento priestor valcom s rotačnou osou na spojnici nábojov. Polomer valca nech je y , a v rovine xy nech siločiar z nábojov pretnú valec v bodoch $[\pm x, \pm y]$. Polomer valca nevolíme nutne tak, aby jeho plášť prechádzal hľadaným bodom, ale úplne všeobecne.



Takto sme si vytvorili uzavretú plochu, ktorá na oboch koncoch sleduje smer siločiar (a teda tok poľa cez ňu je nulový) a uprostred, na intervale od $-x$ po x , má tvar valca s polomerom y . Plášťom valca musí podľa Gaussovho zákona pretekať tok $\Phi = \frac{Q}{\varepsilon_0} (1 - \cos \alpha)$.

My však vieme, že na povrchu plášťa je kolmá zložka intenzity elektrického poľa rovná

$$E_{\perp}(\hat{x}, y) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{y}{\left(y^2 + (\hat{x} + d/2)^2\right)^{3/2}} + \frac{y}{\left(y^2 + (\hat{x} - d/2)^2\right)^{3/2}} \right),$$

rovnosť pre jej tok Φ cez plášť valca nám teda udáva podmienku, ktorú musia spĺňať súradnice x a y :

$$\int_{-x}^x E_{\perp} dS = \frac{Q}{\varepsilon_0} (1 - \cos \alpha).$$

Pre stručnosť označme $(1 - \cos \alpha) = \Omega$. Ak si napíšeme $dS = 2\pi y, d\hat{x}$ a pri integrovaní zvolíme substitúciu $\hat{x} \pm \frac{d}{2} = y \sinh t$,⁹⁰ dostaneme po spočítaní integrálu rovnicu

$$\Omega = \frac{x + d/2}{\sqrt{y^2 + (x + d/2)^2}} + \frac{x - d/2}{\sqrt{y^2 + (x - d/2)^2}}.$$

Takto sme šikovnou fintou dostali rovnicu siločiar. Všetky dvojice bodov $[x, y]$, ktoré spĺňajú túto rovnicu, ležia na siločiare vychádzajúcej pod konkrétnym uhlom α . Teraz skúsime nájsť na tejto konkrétnej siločiare bod, ktorý je najbližšie k rovine symetrie.

Spravme si diferenciál obidvoch strán už získanej rovnice. Na pravej strane síce získame škaredý výraz,⁹¹ ale na ľavej strane bude nula, a v najb-

⁹⁰Hyperbolické funkcie sú definované ako

$$\begin{aligned} \cosh t &= \frac{1}{2} (e^t + e^{-t}) & \text{a} \\ \sinh t &= \frac{1}{2} (e^t - e^{-t}), \end{aligned}$$

pričom si môžete overiť rovnosť $\cosh^2 t - \sinh^2 t = 1$ a že navzájom je jedna derivácia druhej. V našom integráli potom dostaneme

$$\int \frac{dt}{\cosh^2 t} = \tanh t + C = \frac{\sinh t}{\cosh t} + C = \frac{\sinh t}{\sqrt{\sinh^2 t + 1}} + C.$$

⁹¹Nejdem ho tu vypisovať, skúste si to spočítať na papieri. Nezabudnite, že diferenciál treba robiť zo všetkých premenných, takže napríklad $d(x^2 + y^2) = 2x dx + 2y dy$.

ližšom bode siločiary k rovine symetrie navyše $dx = 0$.⁹² Ak získaný vzťah ešte vydělím $y dy$, zjednoduší sa na

$$0 = \frac{x + d/2}{(y^2 + (x + d/2)^2)^{3/2}} + \frac{x - d/2}{(y^2 + (x - d/2)^2)^{3/2}}.$$

Hľa, rovnica pre množinu bodov v rovine, ktoré sú na svojej siločiare jej najbližším bodom k rovine symetrie. Mám teda dve rovnice o dvoch neznámych, nás zaujíma hodnota x . Avšak, ako odtiaľto vyjadriť x ? Žiada si to mazané substitúcie⁹³ a veľa trpezlivosti. Pre jednoduchosť označme $d/2$ ako a . Pokiaľ vezmeme substitúciu

$$z = \frac{x^2 + y^2 + a^2}{2ax}$$

a dosadíme do našich dvoch rovníc, dajú sa tieto upraviť na tvar

$$\begin{aligned}\sqrt{2ax}\Omega &= \frac{x + a}{\sqrt{z + 1}} + \frac{x - a}{\sqrt{z - 1}} \\ 0 &= \frac{x + a}{(z + 1)^{3/2}} + \frac{x - a}{(z - 1)^{3/2}}.\end{aligned}$$

Z druhej z týchto rovníc ľahko prideme k vzťahom

$$z + 1 = \frac{2}{1 + \left(\frac{a-x}{a+x}\right)^{2/3}}, \quad z - 1 = \frac{2\left(\frac{a-x}{a+x}\right)^{2/3}}{1 + \left(\frac{a-x}{a+x}\right)^{2/3}}$$

Keď získané vzťahy dosadíme do prvej zo sústavy rovníc a poriadne upravíme, dostávame ju v tvare

$$2\sqrt{ax}\Omega = \sqrt{1 - \left(\frac{a-x}{a+x}\right)^{2/3}} \left((a+x) - (a+x)^{1/3} (a-x)^{2/3} \right).$$

Je rozumné hľadať riešenie rovnice v tvare $x(\Omega) = k(\Omega)a$. Po tomto dosadení a ďalšej úprave dostávame rovnicu do tvaru

$$2\sqrt{k}\Omega = \left((1+k)^{2/3} - (1-k)^{2/3} \right)^{3/2}.$$

⁹²Ak celkový diferenciál nie je váš kamarát, skúste sa na to pozrieť alternatívne. Výraz na pravej strane rovnice je pozdĺž siločiary konštantný (lebo ten na ľavej strane je) a v najbližšom bode ide siločiaru v smere y . Takže zderivovaním toho výrazu v najbližšom bode podľa y musíme dostať nulu.

⁹³od mazaného riešiteľa

Pokiaľ obe strany rovnice umocníme na druhú a roznásobíme zátvorku na pravej strane, môžeme postupne upravovať:

$$\begin{aligned} 4k\Omega^2 &= (1+k)^2 - 3(1+k)^{4/3}(1-k)^{2/3} + \\ &\quad + 3(1+k)^{2/3}(1-k)^{4/3} - (1-k)^2 \\ 4k(\Omega^2 - 1) &= 3(1+k)^{2/3}(1-k)^{2/3} \left((1-k)^{2/3} - (1+k)^{2/3} \right) \\ 4k(1 - \Omega^2) &= 3(1-k^2)^{2/3} \left(2\sqrt{k}\Omega \right)^{2/3} \end{aligned}$$

Poslednú rovnicu možno umocniť na $3/2$ a potom vydeliť $2\sqrt{k}$. Tak dostávame

$$4k(1 - \Omega^2)^{3/2} = 3\sqrt{3}(1 - k^2)\Omega,$$

čo je to isté ako

$$k^2 + k\sqrt{\frac{16(1 - \Omega^2)^3}{27\Omega^2}} - 1 = 0,$$

teda pekná kvadratická rovnica s jediným kladným, a teda hľadaným riešením

$$k = \sqrt{\frac{4(1 - \Omega^2)^3}{27\Omega^2}} + 1 - \sqrt{\frac{4(1 - \Omega^2)^3}{27\Omega^2}}.$$

Teraz stačí vrátiť všetky substitúcie a dostávame riešenie

$$x = d \left(\sqrt{\frac{1(1 - (1 - \cos \alpha)^2)^3}{27(1 - \cos \alpha)^2}} + \frac{1}{4} - \sqrt{\frac{1(1 - (1 - \cos \alpha)^2)^3}{27(1 - \cos \alpha)^2}} \right).$$

Nuž, je na vás aby ste sa rozhodli, ktoré riešenie je elegantnejšie a ktorý výsledok je v krajšom tvare... a vôbec, aby ste si overili, že oba výsledky sú naozaj rovnaké!⁹⁴

⁹⁴Čo je, zasa raz, úloha pre mazaný matematický softvér.

D GRAVITÁCIA

To show this diagram properly, I would really need a four dimensional screen. However, because of government cuts, we could manage to provide only a two dimensional screen.

STEPHEN HAWKING

FX D1 – PLOCHÁ ZEM



Je všeobecne známe, že Zem je guľa s polomerom R . Kedysi si však ľudia mysleli, že Zem je nekonečná homogénna platňa s hrúbkou h . Zistite, aká by musela byť táto hrúbka h , aby bolo na „plochej Zemi“ rovnaké gravitačné zrýchlenie, ako je teraz. Predpokladajte, že hustota „plochej Zeme“ by bola rovnaká, ako je priemerná hustota Zeme teraz.

Zdroj: Úlohu vymyslel Kubus



Kým sa dáme do práce, zopakujmesí dva známe fakty o gravitačnom poli.

- Hmotný bod s hmotnosťou dm vytvára v každom bode gravitačné pole dané Newtonovým vzťahom

$$d\mathbf{g} = G \frac{dm}{r^2} \hat{\mathbf{e}}_r,$$

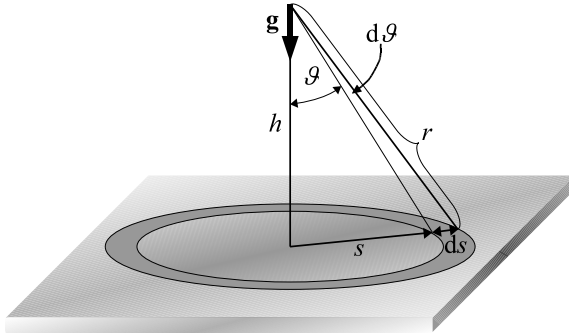
kde $\hat{\mathbf{e}}_r$ je jednotkový vektor smerujúci od hmotného bodu do miesta, v ktorom hľadáme gravitačné pole.

- Gravitačné pole od viacerých hmotných bodov získame jednoducho ako súčet gravitačných polí od jednotlivých hmotných bodov.

Ak sa zmierime so známym vzťahom pre gravitačné pole gule a potom integrovaním získame vzťah pre gravitačné pole rovnej dosky, úloha je vyriešená. To naozaj urobíme, ale vzápätí si ukážeme, ako sa dala úloha vyriešiť úplne bez integrovania.⁹⁵ Avšak počkaj času, ako hus hlasu! Aby sme docenili krásu spomínaného triku, najprv si ukážeme pracné riešenie s použitím integrálov.

Predstavme si nekonečnú dosku s hrúbkou dh a s hustotou ρ . Poďme zistiť, aké je gravitačné pole vo výške h nad ňou. Zavedme si označenia vzdialeností a uhlov, ako na nasledovnom obrázku:

⁹⁵ Aby som nezavádzal, jeden integrál v riešení zapíšeme, ale v skutočnosti integrovať nebudeme. Postačí nám znalosť, že *integrál* vyjadruje akýsi *súčet*.



Zo symetrie je jasné, že hľadané $\mathbf{g}$ bude smerovať kolmo na rovinu. Rovnako vzdialené časti roviny pritom prispievajú rovnako veľmi. Preto si ju rozdelíme na prstence s polomerom s a šírkou ds . Z geometrie vidno, že ak si ako súradnicu zvolíme uhol ϑ , tak

$$r = \frac{h}{\cos \vartheta}$$

a

$$\begin{aligned} s &= h \operatorname{tg} \vartheta \\ \Downarrow \\ ds &= \frac{h}{\cos^2 \vartheta} d\vartheta. \end{aligned}$$

Hmotnosť sústredená v jednom prstenci je

$$d^2m = 2\pi\rho s ds dh$$

a ku gravitačnému zrýchleniu vo zvolenom bode prispieva

$$\begin{aligned} d^2g_{\text{rovina}} &= G \frac{d^2m}{r^2} \cos \vartheta \\ &= 2\pi G\rho dh \frac{s ds}{r^2} \cos \vartheta \\ &= 2\pi G\rho dh \frac{\frac{h^2}{\cos^2 \vartheta} \operatorname{tg} \vartheta d\vartheta}{\frac{h^2}{\cos^2 \vartheta}} \cos \vartheta \\ &= 2\pi G\rho dh \sin \vartheta d\vartheta. \end{aligned}$$

Integráciou cez ϑ od 0 po $\pi/2$ dostaneme celkové pole od nekonečnej tenkej roviny

$$\begin{aligned} dg_{\text{rovina}} &= 2\pi G\rho dh \int_0^{\pi/2} \sin \vartheta d\vartheta \\ &= 2\pi G\rho dh. \end{aligned}$$

Vidíme, že pole od nekonečnej roviny *nezávisí od vzdialenosti* h . Je rovnaké v celej polrovine. Preto ak vezmeme množstvo takýchto tenkých rovín a poukladáme ich do jednej vrstvy s veľkou hrúbkou H , výsledné pole bude jednoducho

$$g_{\text{rovina}} = 2\pi G\rho H.$$

Tento výsledok stačí porovnať s gravitačným poľom gule, o ktorom *je známe*,⁹⁶ že

$$\begin{aligned} g_{\text{guľa}} &= G \frac{M}{R^2} \\ &= \frac{4\pi G\rho R}{3}. \end{aligned}$$

Porovnaním získaných výsledkov dostaneme, že gravitačné zrýchlenia budú rovnaké, ak

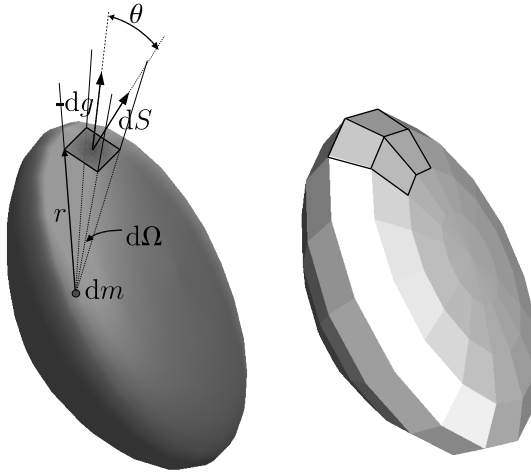
$$h = \frac{2}{3}R.$$

Trik – Gaussov zákon

Teraz si ukážeme, ako možno zapísať gravitačný zákon v inom tvare, ktorý je užitočný v niektorých špecifických situáciách.⁹⁷ Uvažujme ľubovoľnú uzavretú plochu v trojrozmernom priestore (napríklad plocha ohraničujúca zemiak, ale v našom prípade ide o nehmotnú, myslenú plochu). Nech sa niekde v jej vnútri nachádza hmotný bod s hmotnosťou dm . Poďme skúmať ním vytvorené gravitačné pole na našej myslenej *úplne hocijakej* uzavretej ploche.

⁹⁶Keď sa nad tým zamyslíte, vôbec *nie* je jasné, prečo by pole od homogénnej gule malo byť rovnaké, ako od hmotného bodu rovnakej hmotnosti umiestneného v strede tejto gule. Vezmime si napríklad bod v blízkosti povrchu gule: Vidno, že niektoré časti gule sú výrazne bližšie, než stred gule. Iné zas príliš ďaleko. Ďalšie dokonca pôsobia gravitačnou silou úplne zlým smerom! Napriek všetkému, *ono to tak naozaj je!* Ide však o netriviálny matematický výsledok.

⁹⁷Najmä v takých, ktoré sú nejakým spôsobom symetrické.



Ak sa budeme pozerat' z hmotného bodu smermi vnútri malého priestorového uhla s veľkosťou $d\Omega$, vymedzíme na povrchu plôšku s veľkosťou dS . Z ľahkej geometrie⁹⁸ nahliadneme, že

$$dS = r^2 d\Omega / \cos \theta,$$

kde θ je uhol, ktorý zvierajú spojnice plôšky s hmotným bodom a kolmica na plôšku. Malej plôške ešte priradíme normálový vektor, označme ho $\mathbf{dS}$. Ten je kolmý na našu plôšku a jeho veľkosť sa rovná veľkosti plôšky.

Ak si ešte spomenieme na vzťah pre gravitačné pole, môžeme sa pustiť do boja. Všimnime si záporne vzatý skalárny súčin

$$\begin{aligned} -\mathbf{dg} \cdot \mathbf{dS} &= dg dS \cos \theta \\ &= \frac{G dm}{r^2} \frac{r^2 d\Omega}{\cos \theta} \cos \theta \\ &= G dm d\Omega. \end{aligned}$$

Tento teraz zintegrujeme cez celý povrch (všetky plôšky $\mathbf{dS}$), tzn. cez celý priestorový uhol. Pre každý kúsok povrchu je však G aj dm konštantné, preto

⁹⁸Priestorový uhol je definovaný ako plocha, ktorú vybranými smermi vymedzíme na povrchu jednotkovej gule.

môžeme upravovať

$$\begin{aligned} - \oint \mathbf{dg} \cdot \mathbf{dS} &= \int_S G \, dm \, d\Omega \\ &= G \, dm \int_S d\Omega \\ &= 4\pi G \, dm, \end{aligned}$$

kde sme využili fakt, že celý priestorový uhol⁹⁹ je 4π .

Ešte nekončíme! Predstavte si vnútri našej plochy viacej (n) hmotných bodov a sami si rozmyslite nasledovné tvrdenia:

- Gravitačné pole na povrchu možno vyjadriť ako vektorový súčet jednotlivých polí, tj.

$$\mathbf{g} = \mathbf{dg}_1 + \dots + \mathbf{dg}_n.$$

- Skalárny súčin závisí od zložiek vektorov lineárne, preto

$$\mathbf{g} \cdot \mathbf{dS} = \mathbf{dg}_1 \cdot \mathbf{dS} + \dots + \mathbf{dg}_n \cdot \mathbf{dS}.$$

- Integrál cez celý povrch možno rozdeliť na súčet n integrálov, v ktorých už vystupuje len jedna hmotnosť a ktoré sú identické s integrálom o pár riadkov vyššie. Preto platí

$$- \oint \mathbf{g} \cdot \mathbf{dS} = 4\pi GM,$$

kde M je súčet hmotností všetkých hmotných bodov vnútri myslenej plochy.

Tiež si sami premyslite, prečo hmotné body *mimo* myslenej plochy do integrálu neprispievajú.¹⁰⁰

Späť k riešeniu

Dokážeme si, že gravitačné pole gule je identické s gravitačným poľom hmotného bodu. Zo symetrie je jasné, že hľadané gravitačné pole smeruje do stredu gule a závisí len od vzdialenosti (nie od smeru). Obklopmo teda našu guľu myslenu guľovou plochou s polomerom $r > R_{\text{guľa}}$. Vidíme, že

⁹⁹Tj. povrch jednotkovej gule.

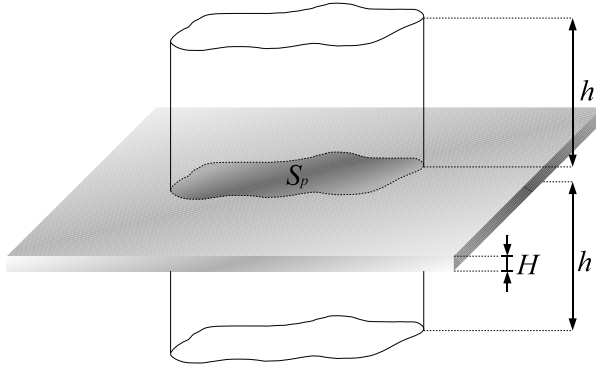
¹⁰⁰Hint: Nulový priestorový uhol. Teleso síce vidíme v istých smeroch, ale v každom jednom smere vidíme dva povrchy *opačne orientované*! Ich príspevky do integrálu sa navzájom vyrušia.

všade na tejto ploche je $\mathbf{g}$ rovnako veľké a navyše rovnobežné s $\mathbf{dS}$ (tj. kolmé na povrch). Preto možno písať

$$\begin{aligned} - \oint \mathbf{g} \cdot \mathbf{dS} &= g_{\text{guľa}} S = 4\pi GM \\ g_{\text{guľa}} 4\pi r^2 &= 4\pi GM \\ g_{\text{guľa}} &= \frac{GM}{r^2}. \end{aligned}$$

Vidíme, že polomer gule R do výsledku nevstupuje.¹⁰¹

Teraz gravitačné pole nekonečnej roviny (dosky). Zo symetrie je jasné, že $\mathbf{g}$ smeruje kolmo do roviny. Závislosť od vzdialenosti jasná nie je. Preto si šikovne zvolíme takú „gaussovskú“ plochu, aby sa nám integrál dobre počítal.



Táto uzavretá plocha pozostáva z dvoch podstáv toho istého, no inak ľubovoľného tvaru, ktoré sa nachádzajú v rovnakej vzdialenosti h na opačných stranách dosky. Plochu každej z nich označme S_p . Plocha sa uzatvára cez plášť spustený kolmo na rovinu.

Čomu je rovný integrál v tomto prípade? Všimnime si, že na každom kúsku plášťa je skalárny súčin $\mathbf{g} \cdot \mathbf{dS}$ rovný nule, teda plášť do hodnoty integrálu vôbec neprispieva. Stačí teda zrátať integrál cez podstavy. Tam je však $\mathbf{g}$ konštantné a navyše kolmé na povrch. A my už vieme, že to predsa nie je žiadne integrovanie! Môžeme hneď písať

$$\begin{aligned} - \oint \mathbf{g} \cdot \mathbf{dS} &= 2g_{\text{rovina}} S_p = 4\pi GM \\ 2g_{\text{rovina}} S_p &= 4\pi G \rho H S_p \\ g_{\text{rovina}} &= 2\pi G \rho H. \end{aligned}$$

¹⁰¹Znova pripomínam, že tento výsledok *nie* je samozrejmosťou, a že zaň vďačíme závislosti gravitačnej interakcie od $1/r^2$.

Opäť raz dostávame, že takéto pole nezávisí na vzdialenosti h od roviny. Aké jednoduché! Takto rýchlo sa dajú pomocou Gaussovho zákona odvodiť vzťahy pre $g_{\text{guľa}}$ a g_{rovina} . Dopracovať sa k výsledku je teraz už triviálna záležitosť.

POZNÁMKA 1: Skúste si ako cvičenie pomocou Gaussovho zákona dokázať, že gravitačné pole vnútri homogénnej škrupiny je nulové (iný dôkaz nájdete v poznámke pod čiarou vo vzorom riešení úlohy FX D3 POLGULE). Tiež si môžete dokázať, že vnútri homogénnej gule klesá gravitačné pole lineárne z hodnoty na povrchu na nulovú hodnotu v jej strede.

POZNÁMKA 2: Bohužiaľ, žiadnu *praktickú* úlohu na využitie Gaussovho zákona pre gravitačné pole nenájdeme. Gauss ho však v skutočnosti vôbec neformuloval pre gravitačné, ale pre *elektrické pole*. Naozaj, veď stačí spraviť záměny $M \rightarrow Q$, $\mathbf{g} \rightarrow \mathbf{E}$ a $G \rightarrow 1/4\pi\epsilon_0$ a dostávame

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{Q}{\epsilon_0}.$$

Ľal'a, konečne vidíme, prečo je v Coulombovom zákone hlúpy faktor $1/4\pi$. Aby žiadny hlúpy faktor nevystupoval v rovniciach vyššej fyziky.

Aplikácie tohto tzv. *Gaussovho zákona* sú ďalekosiahle. Ide o jednu zo štyroch Maxwellových rovníc, ktoré podávajú úplny popis elektromagnetických polí a ktoré v sebe kódujú aj špeciálnu teóriu relativity!

FX D2 – ASTEROID



Azag sa hral so svojím novým ďalekohľadom, keď zrazu spozoroval pohybujúci sa asteroid. Azag zistil, že tento asteroid sa práve nachádza vo vzdialenosti d od Slnka, jeho okamžitá rýchlosť je v , a smer jeho rýchlosti zvierá uhol α so spojnicou asteroid-Slnko. Aká je jeho perióda obehu okolo Slnka?

Zdroj: Úlohu vymyslel Bzdušo

 VZORÁK JAKUB 

Najprv si sformulujem úlohu tak, aby som ju bol schopný vyriešiť. To je základ :-). Ako prvé zabudneme na všetky telesá okrem Slnka a asteroidu. Ďalej sa uspokojíme s nerelativistickým riešením. To by ešte stále mohlo byť ťažké, takže sa uskrmníme s popisom Slnka a asteroidu pomocou modelu hmotného bodu. Ako jediná interakciu medzi Slnkom a asteroidom budem uvažovať newtonovskú gravitáciu (čiže žiaden tlak slnečného žiarenia, je mi ľúto). Celkovo sme situáciu maximálne sprehľadnili za cenu toho, že ignorujeme krásnu otvorenú hviezdokopu Plejády (pred svitaním je ju krásne vidieť) a okrem toho aj plejádu zaujímavých javov spojených s vplyvom okolitých planét (precesia perihélia a iné poruchy dráhy), relativistickými efektami (tiež precesia perihélia; pozorovaná najlepšie na dráhe Merkúru), rotáciou telies (precesia zemskej osi, nutácia), deformovateľnosťou telies (slapové javy: príliv/odliv, spomaľovanie rotácie Zeme) alebo slnečným vetrom (plachtenie kozmickej plachetnice). Vybrali sme si však tak, aby jav (pohyb po trajektórii), ktorý chceme študovať, ostal vcelku nedotknutý ustanovenými zjednodušeniami.

Úlohu veľmi efektívne vyriešime, ak si spomenieme na Keplerove zákony a zákon zachovania energie (mechanickej, pravdaže). Mali by sme si teda pripomenúť prvé dva Keplerove zákony v ich súčasnom znení - tie sa nám budú hodiť. Platia pre sústavu pozostávajúcu z dvoch hmotných bodov, ktoré na seba pôsobia prostredníctvom potenciálu tvaru $U(r) = -\frac{\kappa}{r}$ kde sa uvažuje $\kappa > 0$.¹⁰²

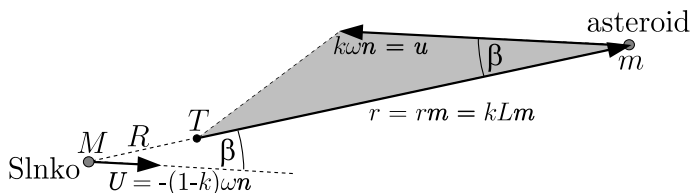
- Každé z telies sa pohybuje po elipse/parabole/hyperbole¹⁰³, v ktorej ohnisku (resp. v jednom z ohnísk) sa nachádza ťažisko sústavy.

¹⁰²Napr. pre gravitáciu podľa Newtona platí $\kappa = GmM$, kde G je gravitačná konštanta a m , M sú hmotnosti oboch telies.

¹⁰³Patologické prípady, keď sa telesá pohybujú iba po priamke k sebe alebo od seba sa dajú chápať ako limitný prípad týchto „slušných“ kuželosečiek.

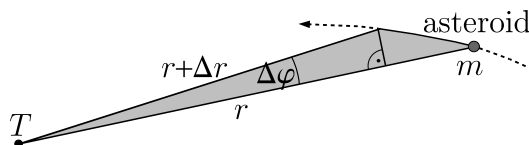
- Pre každé z telies platí zákon zachovania momentu hybnosti vzhľadom na ťažisko sústavy. Konkrétne pre zložku momentu hybnosti kolmú na rovinu pohybu telies¹⁰⁴ dostaneme známu formuláciu o konštantnosti plochy opísanej sprievodičom telesa za jednotku času.

Keďže náš asteroid je zrejme omnoho ľahší ako Slnko¹⁰⁵, tak ťažisko sústavy je veľmi blízko bodu, do ktorého sme skoncentrovali hmotu Slnka. Inak je počítanie bohatšie o jeden koeficient, avšak neposkytuje bohatší život... To sa hovorí. My sa o tom presvedčíme! Nech teda hmotnosť m je hmotnosť asteroidu a M je hmotnosť Slnka. Riešme problém z ťažiskovej sústavy. Tá je vďaka horeuvedeným predpokladom inerciálna.¹⁰⁶ Kvôli prehľadnosti zaviediem konštantu $k = \frac{M}{M+m}$. Potom ak L je vzdialenosť telies od seba, tak vzdialenosť asteroidu od ťažiska sústavy je $r = kL$. Vzdialenosť Slnka od ťažiska sústavy je $R = (1 - k)L$. Čitateľ by si mal premyslieť, že v ťažiskovej sústave platia aj vzťahy, ktoré vyčíta z nasledujúceho obrázka.



V obrázku je $\mathbf{n}$ jednotkový vektor v smere pohybu asteroidu, $\mathbf{m}$ je jednotkový vektor v smere od slnka k asteroidu, w je okamžitá relatívna (vzájomná) rýchlosť telies a uhol β je v zadaní spomínaný uhol, ktorý zvierá vektor rýchlosti $\mathbf{u}$ asteroidu (rýchlosť vzhľadom na ťažisko sústavy T) so sprievodičom. Vektor $\mathbf{U}$ je rýchlosť Slnka vzhľadom na T . Tu si treba premyslieť aj to, že uhlová rýchlosť pohybu oboch telies okolo ich spoločného ťažiska je jedna a tá istá ω .

Druhý Keplerov zákon nám dá rovnicu $L^2\omega = \text{kont.}$ Naše tvrdenie podporíme obrázkom



¹⁰⁴Každý by si mal dôkladne premyslieť, prečo sa pohyb dá umiestniť do 1 roviny!

¹⁰⁵Zvyčajne to tak býva, ale ktohovie, čoho sa ešte dožijeme...

¹⁰⁶Číže je v rovnomernom priamočiariom pohybe alebo v pokoji vzhľadom na všetky ostatné inerciálne vzťažné sústavy.

z ktorého vidíme, že plocha opísaná sprievodičom asteroidu (ktorý začína v ťažisku) za čas Δt je rovná $\frac{1}{2}r(r + \Delta r) \sin \Delta\varphi$.¹⁰⁷ Keďže časový interval Δt môžeme voliť ľubovoľne malý, tak aj Δr a $\Delta\varphi$ budú príslušne malé. Potom môžeme plným právom použiť aproximáciu $\sin \Delta\varphi \approx \Delta\varphi$. Keď sa obmedzíme na členy, ktoré závisia od Δt iba v prvej mocnine¹⁰⁸, tak nám ostane plocha $\frac{1}{2}r^2\Delta\varphi$. Teda rýchlosť opisovania¹⁰⁹ plochy sprievodičom asteroidu je $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{r^2\Delta\varphi}{2\Delta t} = \frac{1}{2}r^2\omega = \frac{1}{2}k^2L^2\omega$. Podľa prvého obrázka vidíme, že rýchlosť opisovania plochy sprievodičom asteroidu je $\frac{1}{2}|\mathbf{r} \times \mathbf{u}| = \frac{1}{2}k^2Lw \sin \beta$. Porovnaním vzťahov dostávame $L\omega = w \sin \beta$. Hneď teda vidíme, že podmienka (I) $L^2\omega = \text{kon} + t = vd \sin \alpha \stackrel{\text{ozn.}}{=} K$ nám zaručí konštantnosť „opisovania“ na prijateľnej úrovni. :-)

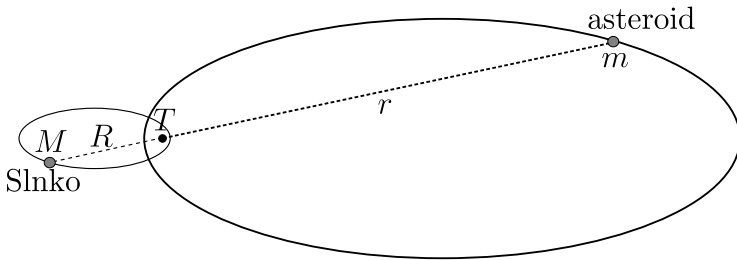
Zákon zachovania (mechanickej) energie nám dá rovnicu (II)

$$\begin{aligned} E_{\text{mech}} &= \frac{1}{2}mu^2 + \frac{1}{2}MU^2 - \frac{GMm}{L}, \\ &= \frac{1}{2}\mu w^2 - \frac{GMm}{L}, \\ &= \frac{1}{2}\mu \frac{L^2\omega^2}{\sin^2 \beta} - \frac{GMm}{L}, \end{aligned}$$

kde $\mu = \frac{Mm}{M+m}$ je takzvaná redukovaná hmotnosť. Pritom zo zadania vieme, že

$$E_{\text{mech}} = \frac{1}{2}\mu v^2 - \frac{GMm}{d}.$$

Prvý Keplerov zákon nám dá obraz toho, ako situácia vyzerá. Ak telesá obiehajú po uzavretých krivkách (elipsách), tak pohyb vyzerá zhruba ako na obrázku.



¹⁰⁷ Ak zanedbáme oblúkovitost trajektórie, čo však regulérne môžeme, lebo nás zaujíma $\Delta t \rightarrow 0$.

¹⁰⁸ Vyššie členy nás nezaujímajú, lebo plochu opísanú sprievodičom dostanem tak, že plochu, ktorú opíše za čas Δt predelím týmto časom a urobím limitný prechod $k \Delta t \rightarrow 0$.

¹⁰⁹ To vzniklo spontánne! :-)

Tento obrázok nám hneď aj dáva návod, ako zistiť význačné charakteristiky pohybu. Totiž, hľadáme také body trajektórie asteroidu, v ktorých je sprievodič kolmý na rýchlosť (a teda aj dotyčnicu a platí $\beta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \sin \beta = 1 \Rightarrow w = L\omega$) - pohľadom na možné kuželosečky zistíme, že takto celkom určite získame údaje o vrcholoch¹¹⁰ dráhy. Ukáže sa, že iné body túto vlastnosť nemajú. Dosadením za ω z rovnice (I) do (II) dostanem kvadratickú rovnicu pre L

$$E_{\text{mech}} = \frac{\mu K^2}{2L^2} - \frac{GMm}{L},$$

ktorej diskriminant je (dosadím za K a E_{mech} a upravím)

$$\begin{aligned} D &= (GMm)^2 + 2\mu K^2 E_{\text{mech}} \\ &= (GMm)^2 - 2GMm\mu dv^2 \sin^2 \alpha + \mu^2 d^2 v^4 \sin^2 \alpha \\ &= (GMm - \mu dv^2 \sin \alpha)^2 + 2\mu dv^2 \sin \alpha (1 - \sin \alpha) > 0. \end{aligned}$$

Riešenie rovnice je $L_{1,2} = \frac{-GMm \pm \sqrt{D}}{2E}$ pre $E \neq 0$.

Zrejme nás interesujú iba kladné riešenia.

- Dá sa priamo ukázať¹¹¹, že ak $E_{\text{mech}} < 0$, tak obe riešenia sú kladné. Súvisí to s tým, že telesá nemajú dost energie na to, aby sa od seba mohli vzdialiť ľubovoľne ďaleko¹¹². Jediná so „slušných“ kuželosečiek s takouto vlastnosťou je elipsa a tá má 2 vrcholy.
- Pre $E_{\text{mech}} = 0$ je riešená rovnica lineárna a jej riešenie je $L = \frac{\mu d^2 v^2 \sin^2 \alpha}{2GMm}$. Trajektória je parabola. V limite pre $L \rightarrow \infty$ sa telesá prestanú hýbať. Pohyb nie je periodický.
- Pre $E_{\text{mech}} > 0$ sa dá ukázať, že kladné riešenie je práve jedno. Trajektória je hyperbola. V limite pre $L \rightarrow \infty$ sa telesá neprestanú hýbať. Pohyb nie je periodický.

Riešenie

Zrejme ak $E_{\text{mech}} \geq 0$, tak pohyb nie je periodický, čo formálne môžeme zapísať $T = \infty$. Ak $E_{\text{mech}} < 0$, tak trajektória je elipsa, u ktorej poznám vzdialenosti L_1, L_2 oboch vrcholov od jedného z ohnísk. Potom veľkosť hlavnej polosi elipsy asteroidu je $a = k \frac{L_1 + L_2}{2}$ a excentricita je $e = k \frac{|L_1 - L_2|}{2}$. Veľkosť vedľajšej polosi je $b = \sqrt{a^2 - e^2}$. Teraz už viem ľahko vyjadriť periódu

¹¹⁰Vrchol kuželosečky nazývam bod, v ktorom má krivka najväčšiu krivosť.

¹¹¹Čítaj: „Odporúčam prekonať odpor, sadnúť si za stôl a presvedčiť sa o tom ručne-
stručne. A kto s tým bude mať problém, nech sa ozve! (Aj tak sa nikdy nikto neozve...)“

¹¹²Na to by museli mať celkovú energiu nezápornú, lebo ak by sa aj v limite nekonečnej relatívnej (vzájomnej) vzdialenosti nepohybovali, tak by museli mať potenciálnu energiu pre $L \rightarrow \infty$ a tá je nulová.

obeu, lebo plocha elipsy asteroidu je $S = \pi ab$ a rýchlosť opisovania plochy sprievodičom asteroidu je $\frac{1}{2}k^2K = \frac{1}{2}k^2dv \sin \alpha = \text{kont}$, teda

$$T = \frac{\pi ab}{\frac{1}{2}k^2dv \sin \alpha} = \dots = 2\pi G(M + m) \left(\frac{d}{2G(M + m) - dv^2} \right)^{3/2}$$

$$T \approx 2\pi GM \left(\frac{d}{2GM - dv^2} \right)^{3/2}.$$

Zrejme naozaj ak $m \ll M$, tak môžeme výraz $M + m$ nahradiť hmotnosťou Slnka M . Všimnite si, že výsledok nezávisí od uhla α .

Ešte jeden malý detail sme si nechali na záver. Totiž ak $\alpha = 0 \vee \alpha = \pi$, tak sa pohyb realizuje po priamke. Ak v našom priblížení hmotných bodov ignorujeme možnosť prípadnej zrážky, tak by sme mali riešiť diferenciálnu rovnicu

$$F = m \frac{d^2 r}{dt^2} = -\frac{GMm}{L} = F_g,$$

$$\text{čiže rovnicu} \quad L^2 \frac{d^2 L}{dt^2} = -\frac{GM}{k}$$

$$\text{s podmienkami} \quad L(0) = d, \quad k \frac{dL(0)}{dt} = v.$$

Táto rovnica by podľa takej našej fyzikálnej intuície mala mať riešenie až po okamih prvej zrážky (t.j. situáciu, keď $L = 0$) zhodné s riešením keplerovským v limite pre $\alpha \rightarrow 0$. Neskôr je to už celkom obskurná záležitosť, keďže rovnica má v bode $L = 0$ singularitu. Snáď nemá veľmi zmysel hovoriť o tom, čo by bolo, keby sa naše hmotné body predsalen nezrazili a preleteli cez seba. Fyzikálne je oveľa zaujímavejšie uvažovať pohyb eliptický a zvážiť limitu, keď $b \rightarrow 0$ (resp. $\alpha \rightarrow 0$). Totiž pohyb presne po priamke má praktický nulovú pravdepodobnosť. Tým sme hotoví!

FX D3 – POLGULE



V rámci ekonomických opatrení pred oslavou jubilejného roku 3000 sa byrokracia rozhodla skrátiť výdavky tým, že odstrániť polovicu Zeme. Výkonná čata najprv rozrezala Zem na dve polgule a potom jednu z nich vymazala (príkazom delete, samozrejme).

- (a) *Akou silou sa tieto dve polgule priťahovali?*
- (b) *Po vymazaní druhej polgule, aké bolo gravitačné zrýchlenie v mieste, kde sa kedysi nachádzal stred Zeme?*

Zdroj: KôMaL

✂ VZORÁK KUBUS ✂

Časť (a)

Prvým kľúčovým osvietením je, že ak sa odhodláme integrovať túto silu cez malé objemové elementy jednej polgule, nemusíme pri tom počítať iba s gravitačným poľom druhej polgule. Môžeme pokojne uvažovať gravitačné pole *celej* Zeme. Veď ono tam aj naozaj je. Príspevky pôsobenia uvažovanej polgule na samú seba sa nám vyrušia.¹¹³

Takisto si spomeňme, že homogénna guľová škrupina pôsobí na svoje útroby celkovo nulovou gravitačnou silou.¹¹⁴ Ešte predpokladajme, že Zem je homogénna, t.j. má všade rovnakú hustotu ρ , jej hmotnosť je M a polomer R .

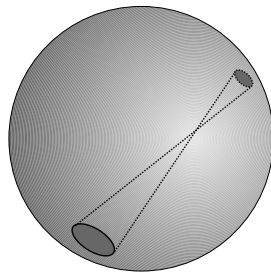
¹¹³Dôkaz je jednoduchý. Ide len o princíp akcie a reakcie.

¹¹⁴Tu je dôkaz komplikovanejší:

Predstavme si homogénnu škrupinku, hociktorý jej vnútorný bod a z neho dva náprotívne smery. Z jednoduchšej geometrie sa dá ukázať, že ak si okolo nich urobíme infinitesimálne priestorové uhly $d\Omega$, tak nimi vymedzená plocha bude priamo úmerná štvorcu vzdialenosti škrupinky v danom smere, konštantu úmernosti označme C . Každá z týchto plôšok vytvára vo zvolenom bod gravitačnú intenzitu

$$g = G \frac{m}{r^2} = G \frac{\sigma S}{r^2} = G \frac{\sigma C r^2}{r^2} = G \sigma C = \text{konšt}$$

Každé dva protifaľhé kúsky vytvárajú vo zvolenom bode rovnakú intenzitu ale opačného smeru, dovedna teda nulovú. A keďže každý kúsok povrchu má svoj náprotivok, súčet všetkých príspevkov do $\mathbf{g}$ ostáva nula. Takúto úvahu možno spraviť pre každý bod vnútri škrupinky, takže v celom jej vnútri je nulové gravitačné pole.



Potom veľkosť sily pôsobiacej na kúsok Zeme dm vo vzdialenosti r od stredu bude

$$dF = \frac{r^3}{R^3} \frac{GM}{r^2} dm = \frac{GM}{R^3} r dm. \quad (30)$$

Všímajúc si symetriu celej situácie je nám jasné, že všetky zložky sily rovnobežné s rovinou rezu sa vyrušia. Stačí nám teda sčítavať iba tie kolmé. Z podobnosti trojuholníkov máme $F/F_\perp = r/x$, kde x je kolmá vzdialenosť elementu dm od roviny rezu. Potom

$$\begin{aligned} dF_\perp &= \frac{GM}{R^3} x dm \\ F_\perp &= \int_{\text{polguľa}} \frac{GM}{R^3} x dm = \frac{GM}{R^3} \int_{\text{polguľa}} x dm. \end{aligned} \quad (31)$$

Predtým, než sa bezhlavo vrhneme do integrovania, zamyslime sa, čo vlastne znamená $\int x dm$. Toto je vlastne kolmá vzdialenosť ťažiska našej polgule od roviny rezu vynásobená jej hmotnosťou! (Ľaľa, definícia ťažiska!) Vedia, že vzdialenosť ťažiska polgule od roviny rezu je $\frac{3}{8}R$ môžeme priamo písať

$$\begin{aligned} F_\perp &= \frac{GM}{R^3} \frac{3R}{8} \frac{M}{2} = \frac{3}{16} \frac{GM^2}{R^2} \approx 1,1 \cdot 10^{25} \text{ N} \\ \text{alebo} \quad F_\perp &= \frac{G\pi^2 \rho^2 R^4}{3}. \end{aligned} \quad (32)$$

Ak nevieme, kde je ťažisko polgule alebo chceme silou-mocou integrovať, rovnicu (31) si môžeme prepísať (zoskupiť dm -ká, ktoré majú rovnaké x , do tenkých valcov s polomerom $\sqrt{R^2 - x^2}$ a hrúbkou dx):

$$\begin{aligned} F_\perp &= \frac{GM}{R^3} \int_{\text{polguľa}} x dm = \frac{GM}{R^3} \int_0^R x \rho \pi (R^2 - x^2) dx \\ &= \frac{G \frac{4}{3} \pi \rho R^3 \rho \pi}{R^3} \int_0^R (R^2 x - x^3) dx \\ &= \frac{4}{3} G \pi^2 \rho^2 \left[\frac{R^2 x^2}{2} - \frac{x^4}{4} \right]_0^R \\ &= \frac{G \pi^2 \rho^2 R^4}{3}. \end{aligned}$$

Aby toho nebolo dosť, ukážme si ešte jeden pekný prístup, tentoraz energetický (resp. cez virtuálnu prácu). Predstavme si, že tieto dve polgule posunieme od seba o malú vzdialenosť $b \ll R$. Sila, ktorou sa budú tieto polgule priťahovať, sa veľmi nezmení, preto môžeme napísať, že sme vykonali prácu $W_1 = F_\perp b$.

Teraz príde finta fň. Na to, aby sme polgule od seba odsunuli, teda dosiahli ten istý efekt, ako pri odsunutí o vzdialenosť b , môžeme urobiť aj toto. Vykopeme všetku zeminu v okolí roviny rezu tak, aby medzi polgúlami vznikla medzera šírky b , a túto zeminu porozotierame po povrchu Zeme tak, aby obe časti znova vyzerali ako polgule. Všimnime si, že i keď túto zeminu nebudeme po celom povrchu rozotierať rovnomerne, hrúbka pridanej vrstvy bude v každom mieste oveľa menšia než R .

Akú prácu sme vykonali tentoraz? Valec zeminy o „výške“ b a polomere R sme vyťažili na povrch Zeme. Podľa rovnice (30) pre gravitačnú silu vnútri Zeme potrebujeme na vytiahnutie kusu zeminy o hmotnosti dm zo vzdialenosti r od stredu Zeme prácu

$$\begin{aligned} dW_m &= \int_r^R F(x) dx = \int_r^R \frac{GM dm}{R^3} x dx \\ dW_m &= \frac{GM dm}{2R^3} (R^2 - r^2). \end{aligned}$$

Zeminy vo vrstvičke hrubej dr , širokej b , vo vzdialenosti r od stredu Zeme je presne $2\pi r b \rho dr$. Celková práca na vytiahnutie všetkej zeminy bude teda

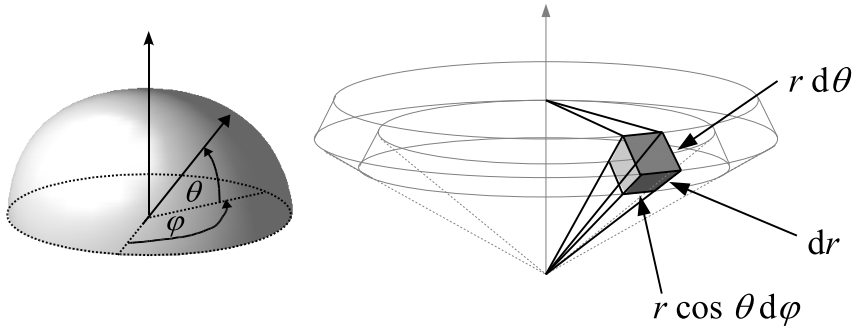
$$\begin{aligned} W_2 &= \int_0^R \frac{GM \rho 2\pi r b}{2R^3} (R^2 - r^2) dr \\ W_2 &= b \frac{4}{3} G \pi^2 \rho^2 \int_0^R (R^2 r - r^3) dr \\ W_2 &= \frac{G \pi^2 \rho^2 R^4}{3} b. \end{aligned} \tag{33}$$

Keďže toto natieranie má rovnaký efekt ako odsunutie polgúl, muselo nás stáť rovnako veľa energie. A hľa, položením $W_1 = W_2$ získavame starý známy vzťah (32) pre príťažlivú silu medzi polgúlami $F_{\perp}$.

Časť (b)

Ako v predošlom príklade, aj tu môžeme slepo integrovať. Napríklad si zavedieme sférické súradnice r , φ a θ – tieto si môžeme predstaviť tak, že ak sme Zem rezali pozdĺž rovníku, potom $\varphi \in (0, 2\pi)$ je zemepisná dĺžka, $\theta \in (0, \pi/2)$ zemepisná šírka a r jednoducho vzdialenosť od stredu. Potom objem malého kúsku Zeme popísaného týmito súradnicami bude

$$dV = (r d\theta) \cdot (r \cos \theta d\varphi) \cdot dr = r^2 \cos \theta dr d\varphi d\theta.$$



Ešte si všimnime symetriu celej situácie – stačí, ak budeme počítat zložky gravitačného zrýchlenia kolmé na rovinu rezu, pretože ostatné sa sčítajú do nuly:

$$g = g_{\perp} = \int_V dg_{\perp} = \int_V \sin \theta dg \quad (34)$$

$$g = \int_V \sin \theta \frac{G dM}{r^2} = \int_V \sin \theta \frac{G \rho dV}{r^2}$$

$$g = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \int_0^R \sin \theta \frac{G \rho r^2 \cos \theta}{r^2} dr d\theta d\varphi \quad (35)$$

$$g = \int_0^{\pi/2} \int_0^R G \rho 2\pi \sin \theta \cos \theta dr d\theta$$

$$g = \int_0^R G \rho \pi dr$$

$$g = G \pi \rho R \quad (36)$$

alebo
$$g = G \pi \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3} R = \frac{3}{4} \frac{GM}{R^2} = \frac{3}{4} g_0 \approx 7,36 \text{ m.s}^{-2}.$$

To by však nebolo FX, keby sme si neukázali ešte jeden postup. Najprv si všimnime, že každá polškrupinka s hrúbkou dr prispieva ku g rovnako, pretože g je úmerné jej hmotnosti, čiže ploche, čiže r^2 , ale je takisto úmerné $1/r^2$ z gravitačného zákona, ako je zrejmé z rovnice (35).¹¹⁵ Preto sa môžeme pozrieť len na jednu polškrupinku (napríklad tú s polomerom R) a potom

¹¹⁵Pozor, v tomto štádiu silne zvädza povedať si, že keďže polškrupinky každého polomeru prispievajú rovnako, nafúkne ich všetky na polomer R a stačí nám rátať gravitačné pole jednej polškrupiny o polomere R a hmotnosti $M/2$. To však nie je pravda, pretože pri „ekvivalentnom nafukovaní“, kde sa nemení hrúbka dr škrupinky sa nám nutne mení jej objem a teda i hmotnosť!

výsledná sila bude toľkokrát väčšia, koľko polškrupiniek sme mali – teda R/dr krát.

Každý kus dM' tejto polškrupinky pôsobí na dačo o hmotnosti m v strede Zeme silou kolmou na povrch polškrupinky. Veľkosť tejto sily je priamo úmerná veľkosti plochy tohoto kusu škrupinky, pretože hmotnosť je úmerná ploche:

$$|d\mathbf{F}'| = \frac{Gm dM'}{R^2} = \frac{Gm\rho dr dS}{R^2}$$

Podľa predchádzajúcej úvahy bude z tohto smeru sila od všetkých škrupiniek R/dr krát väčšia ako sila od tejto škrupinky:

$$|d\mathbf{F}| = \frac{R}{dr} \frac{Gm\rho dr dS}{R^2} = \frac{Gm\rho}{R} dS \quad (37)$$

Teraz by sme to chceli integrovať cez povrch najväčšej škrupinky. Zastavme sa však na chvíľu a zistíme, že *celý tento výraz až príliš nápadne pripomína tlakovú silu!* Ak si predstavíme celú polguľu v nádobe s vodou, kde je všade tlak $p = \frac{Gm\rho}{R}$, naše $d\vec{F}$ bude mať veľkosť i smer presne rovnaké ako tlaková sila pôsobiaca na plôšku dS . Takže celková sila F bude rovná celkovej tlakovej sile pôsobiacej na plášť polgule.¹¹⁶

Pozorný čitateľ si všimne, že zatiaľ sme sa ešte nikam nedostali, iba sme si problém pretransformovali na iný, ekvivalentný. Ešte pozornejší čitateľ si však všimne, že na spočítanie tlakovej sily na plášť polgule nepotrebujeme nič integrovať. Na našu polguľu ponorenú vo vode totiž pôsobia „dve“ sily: Tlaková sila na plášť a tlaková sila na podstavu. Keďže všade naokolo je rovnaký tlak p , polguľa sa nemá prečo hýbať a tieto dve sily musia mať rovnakú veľkosť. Ha! Ale tlakovú silu na podstavu vieme spočítať ľavou zadnou, je to predsa

$$\begin{aligned} F_{\text{podst.}} &= pS_{\text{podst.}} = p(\pi R^2) \\ |F| &= |F_{\text{podst.}}| = \frac{Gm\rho}{R} \pi R^2 = Gm\rho R. \end{aligned} \quad (38)$$

Veľkosť tiažového zrýchlenia už vypočítame jednoducho ako

$$g = \frac{F}{m} = G\pi\rho R, \quad (39)$$

dostávajúc rovnaký výsledok ako (36).¹¹⁷

¹¹⁶Pod plášťom sa myslí len zakrivená časť povrchu, t.j. bez roviny rezu.

¹¹⁷Úvahy v poslednom riešení môžeme matematicky zapísať aj takto (podľa konvencie normálový vektor smeruje von z uzavretej plochy):

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= \int_{\text{plášť}} -\frac{Gm\rho}{R} d\mathbf{S} \\ &= \oint_{\text{polguľa}} -\frac{Gm\rho}{R} d\mathbf{S} \quad - \quad \int_{\text{podstava}} -\frac{Gm\rho}{R} d\mathbf{S} \end{aligned}$$

FX D4 – HMOTA



Marián si kúpil asteroid s objemom V z plastickej hmoty o hustote ρ , a v priestore si vyznačil bod B . Ako má tento asteroid vytvarovať a kam ho má umiestniť, aby bolo v bode B čo najväčšie gravitačné pole? Aká by bola veľkosť tohto gravitačného poľa, ak by parametre V a ρ asteroidu boli zhodné s týmito parametrami Zeme?

Zdroj: BAUPC



Úlohu si rozdelíme na dve časti, ktorým sa poriadne venujeme. Najprv musíme nájsť tvar telesa, v čom nie je nijaká ťažká matematika. Keď sa vysporiadáme s ním, zistíme veľkosť gravitačného zrýchlenia v bode B , čo nám dá priestor si z chuti zacvičiť integrovanie.

Vložme si bod B do počiatku súradnicovej sústavy a požadujeme, aby výsledné pole v tomto bode bolo rovnobežné s osou x .¹¹⁸ Aby sme boli

Posledný integrál je jednoducho

$$\int_{\text{podstava}} -\frac{Gm\rho}{R} \mathbf{dS} = G\pi\rho R \hat{\mathbf{e}}_z.$$

Z Gaussovej rovnice sa dá odvodiť rovnosť

$$\begin{aligned} \oint_S p \mathbf{dS} &= \int_V (\nabla p) dV \\ &\Downarrow \\ \oint_{\text{polguľa}} -\frac{Gm\rho}{R} \mathbf{dS} &= \int_V 0 dV = 0 \\ &\Downarrow \\ \mathbf{F} &= -G\pi\rho R \hat{\mathbf{e}}_z \end{aligned} \tag{40}$$

Skúste si ako cvičenie odvodiť Archimmedov zákon! Pre záujemcov ešte dodatok o odvodení rovnosti (40). Uvažujme ľubovoľný nenulový vektor $\mathbf{a}$ a upravujeme výraz

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \cdot \oint_S p \mathbf{dS} &= \oint_S (p\mathbf{a}) \cdot d\mathbf{S} = \int_V \nabla \cdot (p\mathbf{a}) dV \stackrel{(1)}{=} \int_V (p \nabla \cdot \mathbf{a} + \mathbf{a} \cdot (\nabla p)) dV \\ &\stackrel{(2)}{=} \int_V \mathbf{a} \cdot (\nabla p) dV = \mathbf{a} \cdot \int_V (\nabla p) dV. \end{aligned}$$

Kde v úprave (1) sme využili identitu $\nabla \cdot (p\mathbf{a}) = p(\nabla \cdot \mathbf{a}) + \mathbf{a} \cdot (\nabla p)$ a v úprave (2) skutočnosť, že $\mathbf{a}$ je konštantný vektor. Keďže rovnosť platí pre ľubovoľný vektor $\mathbf{a}$, zrejme aj integrály na začiatku a na konci musia byť rovnaké.

¹¹⁸Premyslite si, že symetria situácie vyžaduje aby hľadaný tvar asteroidu bol symetrický okolo osi x .

dohodnutí úplne jednoznačne, tak nech pole v B smeruje doprava a teda aj asteroid sa bude nachádzať napravo od osi y .

Predstavme si, že v rukách držíme nejaký asteroid. Ak by sa dala jeho hmota nejakým spôsobom popresúvať tak, aby sa v B zväčšilo pole, tak by sme ju presunuli. Ak budeme v ruke držať správny asteroid, akýkoľvek presun hmoty bude pole v danom bode len zmenšovať. Znamená to, že povrch asteroidu musí byť tvorený bodmi, ktoré prispievajú k x -ovej zložke gravitačného zrýchlenia v B rovnakou mierou. Inak by sme predsa mohli odlepiť kus hmoty odniekiaľ, kde prispieva menej, a pridať ju niekam, kde prispieva viac.

Ak si vezmeme rez telesa rovinou xy , tak hmotnosť dm v nejakom mieste $[x, y, 0]$, vytvára v bode B pole veľkosti

$$dg = \frac{G}{x^2 + y^2} dm,$$

kde G je gravitačná konštanta. Pre nás je dôležitá x -ová zložka tohto gravitačného zrýchlenia,

$$dg_x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} dg = \frac{Gx}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} dm.$$

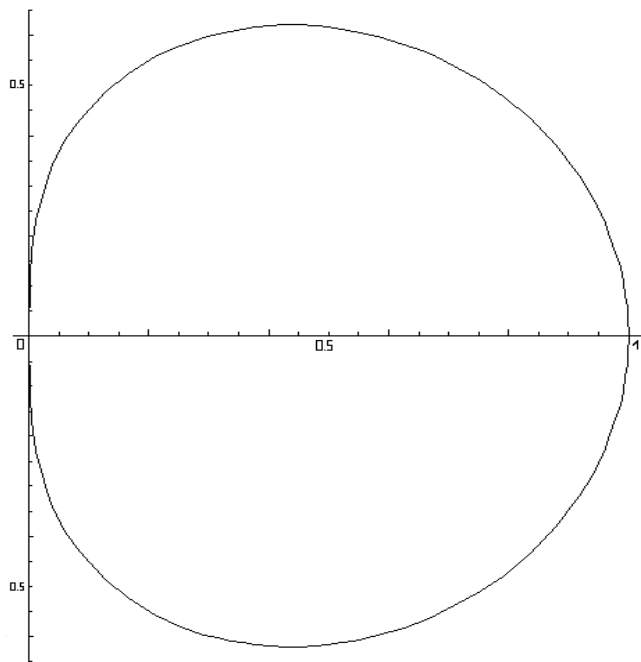
Vieme, že hustota hmoty je konštantná, preto aby rovnako veľký kus hmoty na ľubovoľnom mieste povrchu prispieval k poľu v bode B rovnako, musí pre celý povrch asteroidu platiť

$$\frac{x}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} = C,$$

kde C je akási konštanta, o ktorej zatiaľ nič bližšie nevieme. Keď si tento výraz vhodne upravíme, dostaneme rovnicu pre povrch asteroidu v tomto reze.

$$y = \sqrt{Ax^{\frac{2}{3}} - x^2}$$

Nová konštanta A je rovná $C^{-\frac{2}{3}}$. Pripomínam, že asteroid je rotačne symetrický okolo osi x . Ak cheme získať predstavu, ako ten asteroid vyzerá, môžeme využiť dáky mazaný softvér:



Teraz je ten správny čas na zvrhlé integrovanie. Aké silné pole vytvorí takýto asteroid s objemom V na svojom povrchu?¹¹⁹

Rozriešme najprv problém normovacej konštanty, tj. aké musí byť A v našom výraze pre y , aby objem asteroidu bol naozaj V ? Rozsekajme si pozdĺž osi x asteroid na nespočet diskov s hrúbkou dx . Každý z nich bude mať objem

$$dV = \pi y^2 dx.$$

Celkový objem určíme integrovaním. Dolná medza integrálu je zrejme nula.¹²⁰ Ak položíme $y = 0$, dostaneme aj hornú medzu $x = A^{\frac{3}{4}}$. Ak to všetko spojíme dokopy, postupne dostávame

$$V = \int_0^{A^{\frac{3}{4}}} \pi y^2 dx = \pi \int_0^{A^{\frac{3}{4}}} (Ax^{\frac{2}{3}} - x^2) dx = \pi \left[\frac{3}{5} Ax^{\frac{5}{3}} - \frac{1}{3} x^3 \right]_{x=0}^{x=A^{\frac{3}{4}}},$$

po dosadení a úprave dostaneme

$$V = \frac{4\pi}{15} A^{\frac{9}{4}}, \quad \text{čiže} \quad A = \left(\frac{15V}{4\pi} \right)^{\frac{4}{9}}.$$

¹¹⁹Čitateľovi odporúčam vziať si do rúk ceruzku a papier a všetky integrály si skúsiť predstaviť na vlastnom obrázku.

¹²⁰Zaviedli sme to ešte pri odvádzaní rovnice povrchu asteroidu

Konečne sa môžeme pozrieť na vytvorené gravitačné pole. Aby sme mali výsledok s čím porovnať, spočítajme si vopred, aké je tiažové zrýchlenie Zeme vyjadrené pomocou jej hustoty ρ a jej objemu V . Zem vytvára gravitačné pole ako hmotný bod,¹²¹ preto na jej povrchu bude

$$g_Z = \frac{GM_Z}{R_Z^2}.$$

Ak si vezmeme $M_Z = \rho V$, kde objem V je $\frac{4}{3}\pi R_Z^3$, dostávame

$$g_Z = \frac{4\pi\rho GR_Z}{3} = \rho G \sqrt[3]{\left(\frac{4}{3}\pi R_Z^3\right) \left(\frac{4}{3}\pi\right)^2} = \rho G V^{\frac{1}{3}} \left(\frac{16\pi^2}{9}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

Teraz sa pozrime na gravitačné pole nášho asteroidu. Opäť si asteroid rozsekáme na márne kúsky. Konkrétne znova na tenučké disky s polomerom y , ktoré ale ešte budú samé poskladané z akýchsi prstencov so stredom na osi x . Označme príspevok jedného konkrétného disku vo vzdialenosti x a hrúbky dx od počiatku súradnicovej sústavy ako dg . Ten získame integrovaním príspevkov od spomínaných prstencov. Označme preto ešte príspevok jedného konkrétného prstenca s polomerom r , hrúbkou dr ako d^2g . K výslednému poľu v bode B budú prispievať len zložky d^2g v smere osi x , kolmé zložky sa zo symetrie vyrušia. Keď si ešte uvedomíme, že hmotnosť dm takéhoto prstenca bude rovná $dm = \rho 2\pi r dr dx$,¹²² dostaneme

$$d^2g_x = \frac{2\pi r dr dx \rho G}{r^2 + x^2} \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 + r^2}}.$$

Pre spomínaný disk dostávame

$$\begin{aligned} dg &= \int_{r=0}^{r=y(x)} d^2g_x \\ &= \int_0^{\sqrt{Ax^{\frac{2}{3}} - x^2}} 2\pi\rho Gx dx \frac{r dr}{(x^2 + r^2)^{\frac{3}{2}}} \\ &= 2\pi\rho Gx dx \left[-\frac{1}{(x^2 + r^2)^{\frac{1}{2}}} \right]_{r=0}^{r=\sqrt{Ax^{\frac{2}{3}} - x^2}} \\ &= 2\pi\rho Gx dx \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^{\frac{1}{3}}\sqrt{A}} \right) = 2\pi\rho G \left(1 - \frac{1}{\sqrt{A}} x^{\frac{2}{3}} \right) dx. \end{aligned}$$

¹²¹Aby tento fakt platil úplne presne, musela by byť Zem homogénnou guľou, alebo by sa jej hustota v závislosti od vzdialenosti od stredu musela meniť vo všetkých smeroch rovnomerne, čo je do rozumnej miery splnené.

¹²²Predstavte si ho ako slížik tvaru kvádra so stranami dr , dx a $2\pi r$, ktorý sme zatočili do kruhu a konce spojili. Ak je dosť tenký (dr dosť malé), pri tejto operácii sa objem príliš nezmení.

Výsledné pole v bode B dostaneme integrovaním dg od 0 po $x_{\max} = A^{\frac{3}{4}}$.¹²³ Postupne dostávame

$$\begin{aligned}
 g &= \int_0^{x_{\max}} dg \\
 &= 2\pi\rho G \int_0^{A^{\frac{3}{4}}} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{A}}x^{\frac{2}{3}}\right) dx \\
 &= 2\pi\rho G \left[x - \frac{3}{5\sqrt{A}}x^{\frac{5}{3}} \right]_{x=0}^{x=A^{\frac{3}{4}}} \\
 &= 2\pi\rho G \left(A^{\frac{3}{4}} - \frac{3}{5} \left(A^{\frac{3}{4}} \right)^{\frac{5}{3}} A^{-\frac{1}{2}} \right) \\
 &= \frac{4\pi}{5} \rho G A^{\frac{3}{4}}.
 \end{aligned}$$

Ak si spomenieme, že konštantu A sme si vyjadrili pomocou objemu V , môžeme ju zaň nahradiť a po pár úpravách dostať tvar

$$g = \rho G V^{\frac{1}{3}} \left(\frac{48\pi^2}{25} \right)^{\frac{1}{3}}.$$

Konečne sme došli k riešeniu. Stačí už len porovnať gravitačné zrýchlenie vytvorené Zemou na jej povrchu a pole vytvorené našim asteroidom v bode B . Pre podiel ich veľkostí dostaneme

$$\frac{g}{g_Z} = \sqrt[3]{\frac{27}{25}} \approx 1,026.$$

Vidno, že to nie je veľký rozdiel a že guľa je vcelku optimálny tvar. Všetky integrály sa dali samozrejme počítať aj v sférických súradniciach, výsledky sú však tie isté, tak sa s tým nebudeme trápiť. Dúfam tiež, že všetky hladné otázky, ktoré bolo treba zodpovedať, sú zodpovedané a zvyšné si zodpovie každý aj sám.

¹²³Rovnosť sme odvodili pri počítaní objemu asteroidu z podmienky $y = 0$.

E

Mechanika II.

Does a one-legged duck swim in circles?

R. MORGAN

FX E1 – GULA



Víla Amálka si svoju krištáľovú guľu položila na veľký stôl pokrytý obrusom. Keď mala slávnostnú náladu, veľkolepo strhla obrus zo stola (vodorovným pohybom). Aká bude rýchlosť gule po tom, ako na stole prestane prešmykovať? Môžete predpokladať, že toto sa stane ešte predtým, ako spadne zo stola, a že guľa pri strhnutí obrusu neposkakuje. Polomer gule je R , hmotnosť M , koeficient trenia o obrus f_1 a o stôl f_2 .

Zdroj: Úlohu vymyslel Bzdušo

 VZORÁK JAKUB 

V nasledovnom texte budem našu krištáľovú guľu považovať za dokonale homogénne teleso. Moment zotrvačnosti homogénnej gule vzhľadom na ťubovoľnú os prechádzajúcu jej stredom (ktorý je tiež ťažiskom) je $I = \frac{2}{5}MR^2$, kde M a R sú veličiny známe zo zadania. Popisovať ju budem pomocou modelu tuhého telesa. Sústava spojená so stolom bude pre mňa inerciálna.

Počas trhnutia, ak je dostatočne prudké, bude guľa zrejme prešmykovať. Ak je však trhnutie iba také relatívne pomalé potiahnutie, tak sa môže stať, že guľa prešmykovať nebude. Neprešmykovaníu sa dá tiež pomôcť zvýšením koeficientu trenia f_1 . Keďže bez konkrétnych údajov nevieme povedať, ktorá z možností sa bude realizovať, tak by sme mali rozobrať všetky možnosti. Avšak tých je mnoho, lebo zadanie žiaden konkrétny priebeh zrýchlenia obrusu nepredpisuje. Takže obrus môžeme najprv trhnúť a ďalej už len pomaly zrýchľovať. A celé to nemusí prebiehať len v jednom smere – môžeme najprv trhnúť jedným smerom a potom ešte aj smerom kolmým naň, napríklad. Podrobná analýza všelijakých prípadov by bola značne komplikovaná a ošemetná, a ako ukážeme, aj zbytočná. My sa pokúsime vyriešiť všetky prípady súčasne. Zvládneme to pre ľubovoľné trhnutie v rovine obrusu (s ľubovoľným priebehom vektora zrýchlenia obrusu) a ešte aj pre ľubovoľný zákon trenia. Čitateľovi predkladáme dve rôzne riešenia:

- A. Riešenie na základe dynamiky tuhého telesa inšpirované Michalom Spišákom.
- B. Formálna analýza situácie z pohľadu zákona zachovania momentu hybnosti.

Výstraha! V ďalšom texte sa to bude hemžiť vektormi. Budeme ich značiť tučným písmom (napríklad vektor rýchlosti $\mathbf{v}$ o veľkosti v), a budeme s nimi

operovať najmä pomocou vektorových, resp. skalárnych súčinov. Odporúčam čitateľovi pripomenúť si základné vlastnosti týchto vektorových operácií. Taktiež sa tu vyskytnú derivácie a integrály vektorových veličín, ktoré sú zavedené veľmi prirodzeným spôsobom, hľa:

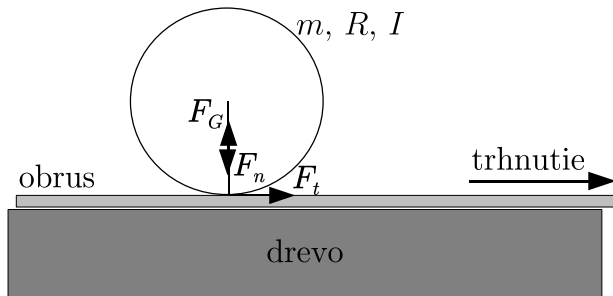
$$\frac{d\mathbf{F}(t)}{dt} = \left(\frac{dF_x(t)}{dt}, \frac{dF_y(t)}{dt}, \frac{dF_z(t)}{dt} \right),$$

$$\int_B^A \mathbf{F}(t)dt = \left(\int_B^A F_x(t)dt, \int_B^A F_y(t)dt, \int_B^A F_z(t)dt \right).$$

A. Riešenie na základe dynamiky tuhého telesa inšpirované Michalom Spišiakom.

Úlohu budeme riešiť v inerciálnej vzťažnej sústave spojenej so stolom.

Na guľu pôsobia počas celého pohybu (až pokiaľ neprestane prešmykovať) práve 3 sily: tiažová sila $\mathbf{F}_G$, normálová sila od podložky $\mathbf{F}_n$ a trecia sila od podložky $\mathbf{F}_t$. Keďže guľka podľa zadania nenadskakuje, tak v každom okamihu musí platiť, že zvislá zložka výslednice pôsobiacich síl ju nulová (teda tiažová sila je vždy kompenzovaná normálovou silou)¹²⁴. Vodorovná zložka výslednice je potom samotná trecia sila a teda zrýchlenie ťažiska guľky je $\mathbf{a}_T(t) = \frac{\mathbf{F}_t(t)}{m}$ (tu treba upozorniť na to, že trecia sila je vo všeobecnosti funkcia času – čím vyriešime súčasne prešmykovanie i neprešmykovanie – môže meniť veľkosť i smer, vždy však leží v rovine stola).



Ďalej zisťujeme, čo sa bude diať s otáčaním guľičky. To je celkom jednoduché, lebo v našom jednoduchom prípade (guľa je tzv. sférický zotrvačník, ktorý je charakteristický tým, že má moment zotrvačnosti I vzhľadom na každú os prechádzajúcu ťažiskom rovnaký) platí pre moment sily $\mathbf{M}_{celk}(t)$

¹²⁴Úprimne povedané, platí to tak skoro vždy. Keď guľička schádza z obrusu, tak zrejme trochu mení svoju výšku. Ďalej sa ukáže, že tento prístup riešenia je však vo svojej podstate voči zvislým silám úplne necitlivý. Postačujúce je, ak trecia sila je vodorovná.

a moment hybnosti $\mathbf{L}(t)$ počítaný vzhľadom na ťažisko tuhého telesa **úplne všeobecne** (dôkaz možno nájsť v **B.** časti)

$$\mathbf{M}_{celk}(t) = \frac{d}{dt} \mathbf{L}(t) = \frac{d}{dt} (I \boldsymbol{\omega}(t)) = I \boldsymbol{\varepsilon}(t).$$

V tomto vzťahu $\mathbf{M}_{celk}(t)$ značí celkový moment síl pôsobiacich na dané teleso určený vzhľadom na stred (ťažisko) guľičky v čase t ; $\mathbf{L}(t)$ je moment hybnosti telesa počítaný tiež vzhľadom na stred guľičky; I je moment zotrvačnosti telesa vzhľadom na os prechádzajúcu ťažiskom; vektor $\boldsymbol{\omega}(t) = \omega(t) \mathbf{n}(t)$ (kde $\mathbf{n}(t)$ je jednotkový vektor) je vektor uhlovej rýchlosti otáčania, pričom jeho veľkosť $\omega(t)$ je to, čo sa bežne pod pojmom uhlová rýchlosť myslí, a jeho smer daný vektorom $\mathbf{n}(t)$ určuje os otáčania; $\boldsymbol{\varepsilon}(t)$ je prvá časová derivácia $\boldsymbol{\omega}(t)$, čiže vektor uhlového zrýchlenia a v prípade, že smer má totožný so smerom $\boldsymbol{\omega}(t)$, tak jeho veľkosť je nám bežne známe uhlové zrýchlenie.

V prípade zobrazenom na obrázku vyššie je vektor $\mathbf{M}_{celk}$ a s ním aj $\boldsymbol{\varepsilon}$ kolmý na obrázok (to je dané tým, že trecia sila leží v rovine obrázka). Celkový pôsobiaci moment vzhľadom na ťažisko guľky je daný len momentom trecej sily (ostatné sily ležia na priamke prechádzajúcej ťažiskom). Platí $\mathbf{M}_{celk}(t) = \mathbf{r}_0 \times \mathbf{F}_t(t)$, kde vektor $\mathbf{r}_0$ je zvislý vektor o dĺžke R z ťažiska guľičky do jej dotykového bodu (v každom čase rovnaký). Tento moment jej teda udeľuje uhlové zrýchlenie $\boldsymbol{\varepsilon}(t) = \frac{\mathbf{M}_{celk}(t)}{I}$.

Je zrejmé, že guľka v nejakom konečnom čase (označím ho T) prestane prešmykovať. Ďalej sa bude pohybovať rovnomerne priamočiaro. Trenie na ňu potom už nebude pôsobiť. Keď sa to stane, tak dotykový bod bude voči stolu nehybný, čo zapíšeme rovnicou

$$\mathbf{v}_{dotykovbod}(T) = \mathbf{v}_T(T) + \mathbf{v}_{obv}(T) = \mathbf{v}_T(T) + \boldsymbol{\omega}(T) \times \mathbf{r}_0 = \mathbf{0},$$

ktorá vyjadruje, že rýchlosť dotykového bodu vzhľadom na stôl napísaná ako vektorový súčet rýchlosti ťažiska vzhľadom na stôl a obvodovej rýchlosti dotykového bodu okolo osi prechádzajúcej ťažiskom (to si už každý na prstoch overí, že to je presne ten druhý člen) je nulová. Pritom ale vieme, že

$$\mathbf{v}_T = \int_0^T \mathbf{a}_T(t) dt = \frac{1}{M} \int_0^T \mathbf{F}_t(t) dt$$

a tiež vieme (posledná úprava využíva fakt, že vektory $\mathbf{F}_t(t)$ a $\mathbf{r}_0$ sú na seba v každom čase t kolmé)

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_{obv}(T) &= \boldsymbol{\omega}(T) \times \mathbf{r}_0 \\ &= \left\{ \int_0^T \boldsymbol{\varepsilon}(t) dt \right\} \times \mathbf{r}_0 \\ &= \int_0^T \left(\frac{\mathbf{r}_0 \times \mathbf{F}_t(t)}{I} \times \mathbf{r}_0 \right) dt \\ &= \frac{R^2}{I} \int_0^T \mathbf{F}_t(t) dt.\end{aligned}$$

Vnímavejší čitateľ už iste vidí, čo príde ďalej. Totiž, vieme že

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_{dotykovbod}(T) &= \mathbf{v}_T(T) + \mathbf{v}_{obv}(T) \\ &= \left(\frac{1}{M} + \frac{R^2}{I} \right) \int_0^T \mathbf{F}_t(t) dt \\ &= \frac{7}{5M} \int_0^T \mathbf{F}_t(t) dt = \mathbf{0}.\end{aligned}$$

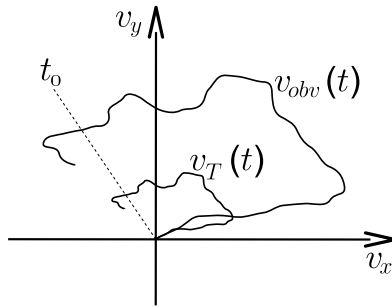
To ale znamená, že v čase, keď guľka prestane prešmykovať, je celkový impulz trecej sily $\int_0^T \mathbf{F}_t(t) dt$ a s ním aj rýchlosti $\mathbf{v}_T(T)$, $\mathbf{v}_{obv}(T)$ a nutne aj uhlová rýchlosť otáčania $\boldsymbol{\omega}(T)$ nulová. Guľka zastane.

Slovne sa to dá okomentovať tak, že trecia sila $\mathbf{F}_t$ v každom okamihu spôsobuje zrýchlenie ťažiska $\mathbf{a}_T = \frac{\mathbf{F}_t}{M}$ v smere pôsobenia trecej sily a súčasne zrýchlenie obvodovej rýchlosti dotykového bodu gule $\mathbf{a}_{obv} = \frac{5\mathbf{F}_t}{2M}$ v **rovnakom** smere. Pomer týchto zrýchlení je v každom čase konštantný (konkrétne $\frac{5}{2}$). Fakt, že guľa v čase T neprešmykuje, je ekvivalentný s rovnosťou $\mathbf{v}_T(T) = -\mathbf{v}_{obv}(T)$. Potom je už jednoduché nahliadnuť, že ak

$$\begin{aligned}\mathbf{a}_T(t) &= \frac{2}{5} \mathbf{a}_{obv}(t) \quad \text{pre všetky } t \in [0, T], \\ \mathbf{v}_T(0) &= \mathbf{v}_{obv}(0) = \mathbf{0} \quad \text{a zároveň} \\ \mathbf{v}_T(T) &= -\mathbf{v}_{obv}(T),\end{aligned}$$

potom nutne

$$\mathbf{v}_T(T) = \mathbf{0}.$$



Ešte lepšiu predstavu si človek môže urobiť pomocou ilustračného obrázku, ktorý zachytáva krivku rýchlosti ťažiska a obvodovej rýchlosti dotykového bodu. Je tam vyznačený stav v čase t_0 . Pri pohľade na tento obrázok by už každému malo byť jasné, že ak požadujeme rovnosť $\mathbf{v}_T(T) = -\mathbf{v}_{obv}(T)$ v nejakom čase T , tak to nutne v našej situácii znamená $\mathbf{v}_T(T) = \mathbf{0}$.

Rezultát: Guľa ostane naveky nehybná za predpokladu, že sa správa ako tuhé teleso a trecia sila (inak ľubovoľná) leží vždy v rovine stola.

B. Formálna analýza situácie z pohľadu zákona zachovania momentu hybnosti.

V tejto časti sa na situáciu pozerám z inerciálnej vzťažnej sústavy sporej stoly. Jej počiatok umiestnim do ľubovoľného bodu na povrchu stola, ktorý označím A .

Začnem zľahka prípravou aparátu. Bude to zahŕňať dôkladné odvodnenia známych vzorcov otáčavej mechaniky tuhého telesa. Nerobíme to zbytočne – totiž, tie známe vzorce platia zvyčajne iba v špeciálnych prípadoch.

Oboznámme sa najprv s modelom tuhého telesa. Tuhé teleso je absolútne nedoformovateľné, so stálymi vzájomnými vzdialenosťami všetkých jeho bodov. Samotné teleso si predstavím ako sústavu N (predstav si mnoho) hmotných bodov s hmotnosťami m_i nachádzajúcimi sa v mieste danom polohovým vektorom $\mathbf{r}_i(t)$. Potom vektor do ťažiska viem určiť ako vážený priemer

$$\mathbf{r}_T(t) = \frac{\sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}_i(t)}{\sum_{i=1}^N m_i} = \frac{\sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}_i(t)}{M}.$$

Ďalej si definujem polohový vektor i -tej častice s počiatkom v ťažisku ako $\boldsymbol{\rho}_i(t) = \mathbf{r}_i(t) - \mathbf{r}_T(t)$. Je jasné, že vďaka nedeformovateľnosti tuhého telesa sa jeho dĺžka nebude meniť. Tiež je ľahko nahliadnuť, že

$$\sum_{i=1}^N m_i \boldsymbol{\rho}_i(t) = \sum_{i=1}^N m_i [\mathbf{r}_i(t) - \mathbf{r}_T(t)] = \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}_i(t) - M \mathbf{r}_T(t) = \mathbf{0}.$$

Ak máme teleso, ktoré sa otáča okolo osi prechádzajúcej ťažiskom, tak rýchlosť i -tej častice bude (dá sa ľahko preveriť)

$$\mathbf{v}_i(t) = \mathbf{v}_T(t) + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}_i(t).$$

Teraz spočítame moment hybnosti tuhého telesa vzhľadom na ľubovoľný bod:

$$\begin{aligned} \mathbf{L}(t) &= \sum_{i=1}^N \mathbf{L}_i = \sum_{i=1}^N \mathbf{r}_i(t) \times \mathbf{p}_i(t) = \sum_{i=1}^N \mathbf{r}_i(t) \times m_i \mathbf{v}_i(t) \\ &= \sum_{i=1}^N \mathbf{r}_i(t) \times m_i [\mathbf{v}_T(t) + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}_i(t)] \\ &= \left[\sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}_i(t) \right] \times \mathbf{v}_T(t) + \sum_{i=1}^N \mathbf{r}_i(t) \times m_i [\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}_i(t)] \\ &= M \mathbf{r}_T(t) \times \mathbf{v}_T(t) + \sum_{i=1}^N [\mathbf{r}_T(t) + \boldsymbol{\rho}_i(t)] \times m_i [\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}_i(t)] \\ &= M \mathbf{r}_T(t) \times \mathbf{v}_T(t) + \mathbf{r}_T(t) \times \left\{ \boldsymbol{\omega} \times \left[\sum_{i=1}^N m_i \boldsymbol{\rho}_i(t) \right] \right\} \\ &\quad + \sum_{i=1}^N m_i \boldsymbol{\rho}_i(t) \times [\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}_i(t)] \\ &= M \mathbf{r}_T(t) \times \mathbf{v}_T(t) + \mathbf{r}_T(t) \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{0}) \\ &\quad + \boldsymbol{\omega} \sum_{i=1}^N m_i \boldsymbol{\rho}_i(t) \times [\mathbf{n} \times \boldsymbol{\rho}_i(t)]. \end{aligned}$$

Nuž, prvý člen je už v konečnom tvare, druhý je nulový. Ostáva tretí, s ktorým vybabreme jednoducho, lebo máme teleso, ktoré je symetrické voči osi prechádzajúcej jeho stredom (a to dokonca ľubovoľnej). Totiž ten člen pre teleso symetrické voči osi určenej vektorom $\mathbf{n}$ nadobudne tvar

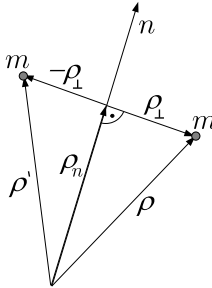
$$\left\{ \sum_{i=1}^N m_i [\mathbf{n} \times \boldsymbol{\rho}_i(t)]^2 \right\} \boldsymbol{\omega} = \left\{ \sum_{i=1}^N m_i [\boldsymbol{\rho}_{i\perp}(t)]^2 \right\} \boldsymbol{\omega} = I \boldsymbol{\omega}.$$

Prečo to tak je? Majme teleso symetrické okolo osi danej jednotkovým vektorom $\mathbf{n}$, ktorého súčasťou v nejakom čase t je bod o hmotnosti m . Jeho polohový vektor z ťažiska si rozložme ako $\boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{\rho}_\mathbf{n} + \boldsymbol{\rho}_\perp$, kde $\boldsymbol{\rho}_\mathbf{n} = (\boldsymbol{\rho} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n}$ je vektor v smere osi $\mathbf{n}$ a $\boldsymbol{\rho}_\perp$ je kolmý naň. Vďaka symetrii vieme, že v danom

čase t je určite súčasťou telesa aj bod naproti nášmu bodu (výnimkou by bol bod, ktorý leží na osi, čo je triviálny prípad) s polohovým vektorom z ťažiska

$$\boldsymbol{\rho}' = \boldsymbol{\rho}_n - \boldsymbol{\rho}_\perp = \boldsymbol{\rho}_n - (\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}_n) = 2(\boldsymbol{\rho} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n} - \boldsymbol{\rho}$$

a rovnakou hmotnosťou m .



Podme spočítať, ako vyjde ten tretí člen (označím ho $\mathbf{L}'$) pre tieto dva hmotné body nášho telesa:

$$\begin{aligned} \mathbf{L}' &= \omega \sum_{i=1}^N m_i \boldsymbol{\rho}_i(t) \times [\mathbf{n} \times \boldsymbol{\rho}_i(t)] \\ &= m\omega \{ \boldsymbol{\rho} \times [\mathbf{n} \times \boldsymbol{\rho}] + \boldsymbol{\rho}' \times [\mathbf{n} \times \boldsymbol{\rho}'] \} \\ &= m\omega \{ \boldsymbol{\rho} \times [\mathbf{n} \times \boldsymbol{\rho}] + [2(\boldsymbol{\rho} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n} - \boldsymbol{\rho}] \times [\mathbf{n} \times [2(\boldsymbol{\rho} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n} - \boldsymbol{\rho}]] \} \\ &= m\omega \{ \boldsymbol{\rho} \times [\mathbf{n} \times \boldsymbol{\rho}] - [2(\boldsymbol{\rho} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n} - \boldsymbol{\rho}] \times [\mathbf{n} \times \boldsymbol{\rho}] \} \\ &= 2m\omega \{ [\boldsymbol{\rho} - (\boldsymbol{\rho} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n}] \times [\mathbf{n} \times \boldsymbol{\rho}] \} = 2m\omega \{ \boldsymbol{\rho}_\perp \times [\mathbf{n} \times \boldsymbol{\rho}] \}. \end{aligned}$$

Na čitateľa nechávam dôkaz (stačí preveriť, že veľkosť, smer a orientácia výsledných vektorov je zhodná; resp. preveriť analyticky, že jednotlivé zložky sa rovnajú), že sa to rovná

$$\mathbf{L}' = 2m\omega [(\boldsymbol{\rho} \times \mathbf{n})^2 \mathbf{n}] = 2m |\boldsymbol{\rho}_\perp|^2 \omega.$$

Potom ale pre symetrické teleso platí skutočne to, čo sme tvrdili vyššie. Výsledný moment hybnosti tuhého telesa symetrického voči osi, okolo ktorej sa točí, teda je

$$\mathbf{L}(t) = M \mathbf{r}_T(t) \times \mathbf{v}_T(t) + I\omega.$$

Ďalej poďme zderivovať moment hybnosti $\mathbf{L}$ podľa času:

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt}\mathbf{L}(t) &= \frac{d}{dt} \left[\sum_{i=1}^N \mathbf{L}_i(t) \right] = \frac{d}{dt} \left[\sum_{i=1}^N \mathbf{r}_i(t) \times m_i \mathbf{v}_i(t) \right] \\
 &= \sum_{i=1}^N \left[\frac{d\mathbf{r}_i(t)}{dt} \times m_i \mathbf{v}_i(t) + \mathbf{r}_i(t) \times m_i \frac{d\mathbf{v}_i(t)}{dt} \right] \\
 &= \sum_{i=1}^N [\mathbf{v}_i(t) \times m_i \mathbf{v}_i(t) + \mathbf{r}_i(t) \times m_i \mathbf{a}_i(t)] \\
 &= \sum_{i=1}^N [\mathbf{0} + \mathbf{r}_i(t) \times \mathbf{F}_i(t)] \\
 &= \sum_{i=1}^N \mathbf{M}_i(t) = \mathbf{M}_{celk}(t).
 \end{aligned}$$

Dúfam, že výsledok nikoho neprekvapil. Hoci to z rovníc vidno, napíšem ešte po ľudsky, že ten celkový moment $\mathbf{M}_{celk}(t)$ pôsobiacich síl nám vyjde vzhľadom na rovnaký bod, vzhľadom na ktorý sme mali určený moment hybnosti $\mathbf{L}(t)$. Tiež treba povedať, že celkový moment sily pôsobiaci na tuhé teleso je determinovaný iba silami pôsobiacimi na teleso zvonku. Ak by to tak nebolo, tak by sa tuhé teleso mohlo samo od seba roztočiť, čo by bolo prinajmenšom čudné.

Spojme posledné dva vzťahy dokopy. Zamerajme sa nejaký fixovaný čas t (a preto závislosť veličín od neho nebudem v tomto odseku explicitne písať). Uvažujme pritom moment hybnosti a celkový moment síl určený vzhľadom na ťažisko. Potom $\mathbf{r}_T = \mathbf{0}$ a v rovnici pre $\mathbf{L}$ bude prvý člen nulový. Pre teleso, ktoré má moment zotrvačnosti I vzhľadom na ťažisko rovnaký okolo ľubovoľne natočenej osi, je potom I konštanta (to je prípad našej guľe). Dostávame vzorec, ktorý sa nám zišiel v časti **A**.

$$\mathbf{M}_{celk} = I\boldsymbol{\varepsilon}$$

Čo však v prípade, že máme iba teleso symetrické okolo aktuálnej osi otáčania?¹²⁵ Potom platí $\mathbf{L} = I\boldsymbol{\omega}\mathbf{n}$. Nuž, ak by sme vedeli zaručiť, že sa nám os otáčania nebude meniť, tak potom by to snáď mohlo fungovať, no nie? No áno! Predpokladajme, že máme celkový moment sily $\mathbf{M}_{celk}$ v smere osi otáčania¹²⁶ $\mathbf{n}$. Potom vektor zmeny momentu hybnosti má tiež smer $\mathbf{n}$. Vďaka

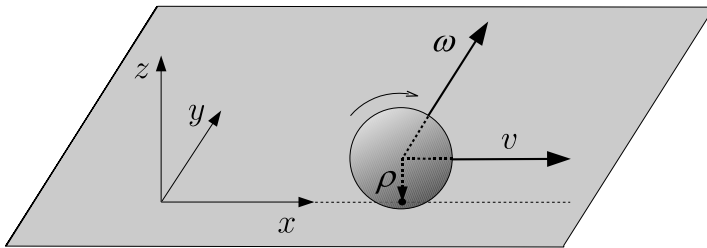
¹²⁵Ideme odvodiť rovnicu pre tie najbežnejšie stredoškolské prípady!

¹²⁶V prípade fixovanej osi vzniknú v úchytoch sily, ktoré zabezpečia, že celkový moment síl na teleso bude v požadovanom smere (čo pre teleso nesymetrické voči osi otáčania nemusí byť smer osi otáčania).

tomu zotrvá aj moment hybnosti v tomto smere. S ním ostane v tomto smere, samozrejme, aj os otáčania a teda aj zmena vektoru uhlovej rýchlosti je v tomto smere. Sumárne môžeme konštatovať, že rovnica $\mathbf{M}_{celk} = I\boldsymbol{\varepsilon}$ platí aj v tomto prípade.

Teraz konečne prišiel čas, keď sa od teórie vrátime k nášmu prachom zapadnutému príkladu. Totiž, počas celého deja je moment síl pôsobiacich na guľu vzhľadom na bod A (pripomínam, že je to bod na povrchu stola a situáciu skúmame z inerciálnej vzťažnej sústavy) nulový! Potom ale moment hybnosti gule musí byť konštantný (jeho časová zmena je nulová) a konkrétne nulový (lebo pred trhnutím je nulový). Preverme to podrobnejšie: obrusom môžem trhať ľubovoľne rýchlo, akýmkoľvek smerom – ak sa mi spodok gule bude držať v rovine stola, tak trecia sila bude ležať v nej a jej moment sily vzhľadom na A bude celý čas nulový. Zároveň to implikuje, že výška ťažiska gule je nemenná a teda nutne vertikálne zložky všetkých pôsobiacich síl sa vzájomne kompenzujú. To je ale ekvivalentné s tým, že celý čas je tiažová sila rovnako veľká ako normálová. Keďže ležia na jednej priamke (ich pôsobiská sú presne nad sebou, posunuté v smere ich pôsobenia), tak ich momenty sa akurát rušia.

Predpokladajme, že guľka sa po trhnutí a prešmykovaní na stole dopracuje do stavu, keď sa jej ťažisko hýbe rýchlosťou $\mathbf{v}$ a ona neprešmykuje. Aby sme sa neprepracovali, tak si vyberme bod A (môžem si zvoliť predsa ľubovoľný bod povrchu stola) tak, aby ležal na priamke danej polohou guľky v ľubovoľnom čase, keď už doprešmykovala, a smerom $\mathbf{v}$. Ďalej si sústavu natočím tak, aby sa mi guľka hýbala po x -ovej osi. Os z nech je zvislá orientovaná nahor a os y bude potom kolmá na os x ležiaca v rovine stola s orientáciou takou, aby sústava bola pravotočivá. Viď obrázok nižšie. Potom platí $\mathbf{v} = (v, 0, 0)$, $\boldsymbol{\omega} = (0, \omega, 0) = \omega \hat{\mathbf{e}}_2$ ¹²⁷ a $\mathbf{r}_T(t) = (r_x(t), 0, R)$.



Dotykový bod guľky (v každom okamihu iný) daný polohovým vektorom $\mathbf{z}$ ťažiska $\boldsymbol{\rho} = (0, 0, -R)$ musí byť nehybný, čo zapíšeme rovnicou

$$\mathbf{v} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho} = \mathbf{0} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} R.$$

¹²⁷Kde $\hat{\mathbf{e}}_2 = (0, 1, 0)$ je len prepychové pomenovanie pre jednotkový vektor v smere osi y .

A náš tromf, moment hybnosti:

$$\begin{aligned} \mathbf{L}(t) &= M\mathbf{r}_T(t) \times \mathbf{v}_T(t) + I\boldsymbol{\omega} \\ &= MRv\hat{\mathbf{e}}_2 + I\omega\hat{\mathbf{e}}_2 \\ &= (MR^2 + I)\omega\hat{\mathbf{e}}_2 = \mathbf{0}, \end{aligned}$$

z čoho $\omega = 0$.

Odpoveď: Nech trháme ako chceme, pokiaľ guľa nezačne poskakovať, tak po istom čase na stole zastane. To by bolo všetko. Výsledok je úplne exaktný, avšak len pre tuhé teleso a aproximáciu nulovej hrúbky obrusu¹²⁸. Opäť môžeme konštatovať, že **trecia sila** môže byť **úplne ľubovoľná** – nemusí rešpektovať vzťah $F_t = fF_n$, ktorý je síce veľmi jednoduchý, ale zato značne neseriózný!¹²⁹

PS1: Ak by naša guľa nebola tuhé teleso, ale deformovateľné teleso, tak to radšej neriešim. To je už skutočná fyzika. Toto je FX. :-)

PS2: Všimnite si drobný rozdiel v podmienkach platnosti v jednotlivých častiach! V časti **A.** sme požadovali, aby trecia sila bola v každom čase vodorovná. V **B.** sme žiadali, aby guľa nenadskakovala a zároveň sme potrebovali nulovú hrúbku obrusu.

¹²⁸Čo sme ticho predpokladali celý čas v **B.** časti. Inak by trecia sila na stole alebo podložke mala nenulový moment sily.

¹²⁹Pre informáciu: o čosi slušnejší a presnejší vzťah $F_t = f(v)F_n$ používajú technici; tu je koeficient trenia pre dvojicu styčných materiálov nejaká (zvyčajne jednoduchá) funkcia rýchlosti v .

FX E2 – KOLIESKA



Marcel sa rád hrá s kolieskami. Minule vzal dve homogénne kolieska s hmotnosťou M a polomerom R a pripojil ich na opačné konce spoločnej ľahkej osky dĺžky $2L$ tak, aby sa mohli otáčať nezávisle od seba. Potom toto čudo položil na vodorovnú podložku a kolieska roztočil tak, aby sa oska otáčala uhlovou rýchlosťou ω okolo zvislej osi prechádzajúcej jej stredom. Aká je celková kinetická energia tohto čuda, ak kolieska neprešmykujú?

Zdroj: KôMaL

 VZORÁK JAKUB 

Najprv si úlohu skonkretizujeme, aby bola primerane ľahká/ťažká:

- Kolieska budem považovať za dokonale tuhé teleso v podobe nekonečne tenkého homogénneho disku (keby to bol homogénny valec, tak by sa to dalo riešiť presne rovnako, len by sa zmenil tenzor zotrvačnosti).
- Spájajúca oska je dokonale tuhá a nehmotná (jej kinetická energia je nulová).
- Podložku považujem za inerciálnu vzťažnú sústavu a v tejto sústave budem počítat kinetickú energiu toho zadaného čuda.¹³⁰

Taktiku boja zvolíme „priamočiaru“. Dôsledne odvodíme formuly pre kinetickú energiu tuhého telesa a následne ich aplikujeme na danú úlohu.

Varovanie! V tomto riešení sa budú vyskytovať vo veľkom počte vektorové veličiny, písané tučne. Operovať s nimi budeme adekvátne ich povahe. Hojne sa bude používať skalárny a vektorový súčin. Ako cvičenie si skúste dokázať platnosť identity (ako roznásobiť štvorec dvojčlena)

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b})^2 \equiv (\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} + 2(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) + \mathbf{b} \cdot \mathbf{b} \equiv a^2 + 2(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) + b^2.$$

Na začiatok rýchle opakovanie o tuhom telese. Tuhé teleso s celkovou hmotnosťou M si predstavím ako sústavu N (predstav si mnoho, veľa) hmotných bodov s hmotnosťami m_i nachádzajúcich sa v miestach daných polohovými vektormi $\mathbf{r}_i(t)$. Potom vektor do ťažiska viem určiť ako vážený priemer

$$\mathbf{r}_T(t) = \frac{\sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}_i(t)}{\sum_{i=1}^N m_i} = \frac{\sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}_i(t)}{M}.$$

¹³⁰Niektor veľmi prefikáný by totiž mohol rátať kinetickú energiu tej našej hračky v sústave rotujúcej s uhlovou rýchlosťou ω okolo nehybnej zvislej osi prechádzajúcej stredom osky koliesok. Potom by šmahom ruky povedal, že $E_{kin} = 2\frac{1}{2}J\Omega^2$, kde $J = \frac{MR^2}{2}$ je moment zotrvačnosti plného homogénneho disku okolo jeho rotačnej osi a $\Omega = \frac{L}{R}\omega$ je uhlová rýchlosť otáčania koliesok okolo svojej rotačnej osi.

Ďalej definujem polohový vektor i -tej častice s počiatkom vo vybranom bode danom vektorom $\mathbf{r}_0(t)$ ako $\boldsymbol{\rho}_i(t) = \mathbf{r}_i(t) - \mathbf{r}_0(t)$. Je jasné, že ak je bod $\mathbf{r}_0(t)$ fixovaný v telese, vďaka nedeformovateľnosti tuhého telesa sa dĺžka vektora $\boldsymbol{\rho}_i(t)$ nebude meniť. Tiež je ľahko nahliadnuť, že

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N m_i \boldsymbol{\rho}_i(t) &= \sum_{i=1}^N m_i [\mathbf{r}_i(t) - \mathbf{r}_0(t)] \\ &= \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}_i(t) - M \mathbf{r}_0(t) = M [\mathbf{r}_T(t) - \mathbf{r}_0(t)]. \end{aligned}$$

Zamyslime sa nad tým, aký najvšeobecnejší pohyb môže tuhé teleso vykonávať! Keďže tuhé teleso má v každom okamihu vzájomné vzdialenosti všetkých jeho bodov rovnaké, tak žiadame, aby zobrazenie telesa v čase t_1 na teleso v čase t_2 bolo zhodné.¹³¹ To nám však nestačí, lebo žiadne reálne teleso neviem zozrkadliť.¹³² Preto žiadam ešte aj, aby to bolo priame zhodné zobrazenie. Nuž a priame izometrie v priestore sú len posunutie a otočenie okolo osi a ich kombinácia. Dopracovali sme sa k tomu, že najdivejšie ródeo, ktorého je tuhé teleso schopné, pozostáva z translačného pohybu spojeného s rotáciou okolo nejakej okamžitej osi.

Ako popísať pohyb tuhého telesa? Transláciu viem popísať polohovým vektorom $\mathbf{r}_0(t)$, ktorým sledujem ľubovoľne vybraný „bod 0“ nami sledovaného tuhého telesa. Znalosť polohy bodu 0 mi dovoľuje myšlienkovy zafixovať tento bod a následne uvažovať rotáciu telesa upevneného v bode 0. Smer osi rotácie¹³³ popíšem jednotkovým vektorom $\mathbf{n}(t)$ a rýchlosť rotácie okolo tejto osi nie je nič iné ako uhlová rýchlosť $\boldsymbol{\omega}(t)$. Vektoro môžem celú informáciu o rotácii zapísať pomocou vektora $\boldsymbol{\omega}(t) = \omega(t)\mathbf{n}(t)$. Pri takomto popise platí, že rýchlosť i -tej častice viem vyjadriť rovnicou

$$\mathbf{v}_i(t) = \mathbf{v}_0(t) + \boldsymbol{\omega}(t) \times \boldsymbol{\rho}_i(t),$$

kde druhý člen vyjadruje obvodovú rýchlosť otáčania i -teho bodu okolo bodu 0; dá sa o tom ľahko presvedčiť (samozrejme, iba ak si čitateľ spomenie na vlastnosti vektorového súčtu).¹³⁴

¹³¹Inými slovami, zobrazenie má byť izometria.

¹³²Alebo stredovo zosúmerniť.

¹³³Orientáciu volíme tak, aby prsty pravej ruky ukazovali smer otáčania ak palec má smer a orientáciu vektora $\mathbf{n}$.

¹³⁴Tu si treba uvedomiť, že rôzni pozorovatelia považujú za os rotácie rôzne navzájom rovnobežné osi. Napr. pre rovnomerne sa kotúľajúce koleso by nehybný pozorovateľ povedal, že koleso sa v každom okamihu otáča okolo osi prechádzajúcej dotykovým bodom, kdežto kamarát idúci na bicykli zarovno s kolesom by povedal, že koleso rotuje okolo osi prechádzajúcej stredom kolesa. Každopádne, náš popis je v poriadku nech bod 0 leží kde-

Teraz spočítame kinetickú energiu tuhého telesa v nejakom čase t (závislosť veličín na čase už ďalej nebudem písať)

$$\begin{aligned}
 E_{kin} &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{v}_i^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i (\mathbf{v}_0 + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}_i)^2 \\
 &= \frac{1}{2} M \mathbf{v}_0^2 + \sum_{i=1}^N m_i [\mathbf{v}_0 \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}_i)] + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}_i)^2 \\
 &= \frac{1}{2} M \mathbf{v}_0^2 + \mathbf{v}_0 \cdot \left\{ \boldsymbol{\omega} \times \left[\sum_{i=1}^N m_i \boldsymbol{\rho}_i \right] \right\} + \frac{1}{2} \omega^2 \sum_{i=1}^N m_i (\mathbf{n} \times \boldsymbol{\rho}_i)^2 \\
 &= \frac{1}{2} M \mathbf{v}_0^2 + \mathbf{v}_0 \cdot \{ \boldsymbol{\omega} \times [M(\mathbf{r}_T - \mathbf{r}_0)] \} + \frac{1}{2} \omega^2 \sum_{i=1}^N m_i r_i^2 \\
 &= \frac{1}{2} M \mathbf{v}_0^2 + M \mathbf{v}_0 \cdot \{ \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{r}_T(t) - \mathbf{r}_0(t)) \} + \frac{1}{2} J_0(\mathbf{n}) \omega^2,
 \end{aligned}$$

kde veličina $r_i = |\boldsymbol{\rho}_i \sin \alpha| = |\mathbf{n} \times \boldsymbol{\rho}_i|$ (viď obr. nižšie) je vzdialenosť i -teho bodu od osi rotácie prechádzajúcej bodom 0; $J_0(\mathbf{n}) = \sum_{i=1}^N m_i r_i^2 = \sum_{i=1}^N m_i (\mathbf{n} \times \boldsymbol{\rho}_i)^2$ je moment zotrvačnosti telesa vzhľadom na bod 0 pre otáčanie okolo osi prechádzajúcej bodom 0 v smere $\mathbf{n}$. Vidno, že stredný člen môžeme ľahko znulovať. Stačí, ak vyberieme za bod 0 taký bod, ktorý stojí,¹³⁵ alebo ak zoberieme za bod 0 ťažisko. Nám sa bude hodiť vyjadrenie pomocou ťažiska ako referenčného bodu. Vektor $\boldsymbol{\rho}_i$ bude v nasledovnom texte chápaný výlučne ako vektor idúci z ťažiska tuhého telesa do jeho i -teho bodu. Potom platí

$$\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}_T \quad \Rightarrow \quad \sum_{i=1}^N m_i \boldsymbol{\rho}_i = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad E_{kin} = \frac{1}{2} M \mathbf{v}_T^2 + \frac{1}{2} J_T(\mathbf{n}) \omega^2.$$

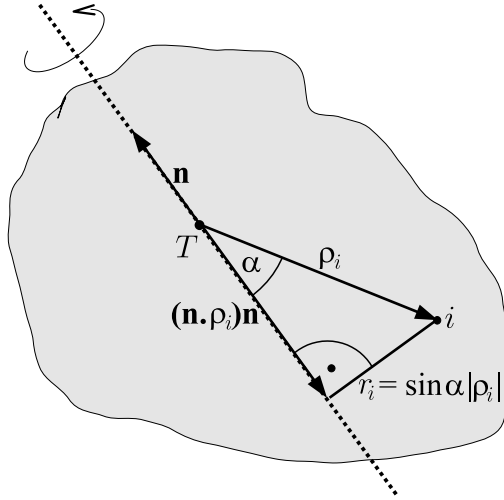
Našou ďalšou snahou bude vyšetriť moment zotrvačnosti vzhľadom na ťažisko okolo ľubovoľnej osi $J_T(\mathbf{n})$. Výchádzame z rovnice

$$J_T(\mathbf{n}) = \sum_{i=1}^N m_i r_i^2,$$

kde r_i je vzdialenosť i -teho bodu od osi otáčania prechádzajúcej ťažiskom. Pomôžeme si obrázkom,

koľvek. Totiž, ak by neležal na samotnej osi otáčania (nech na nej leží bod S), tak jeho rýchlosť bude $\mathbf{v}_0(t) = \mathbf{v}_S(t) + \boldsymbol{\omega}(t) \times [\mathbf{r}_0(t) - \mathbf{r}_S(t)]$, čiže $\mathbf{v}_i(t) = \mathbf{v}_0(t) + \boldsymbol{\omega}(t) \times \boldsymbol{\rho}_i(t) = \mathbf{v}_S(t) + \boldsymbol{\omega}(t) \times [\mathbf{r}_0(t) + \boldsymbol{\rho}_i(t) - \mathbf{r}_S(t)] = \mathbf{v}_S(t) + \boldsymbol{\omega}(t) \times [\mathbf{r}_i(t) - \mathbf{r}_S(t)]$. Čo je presne to, čo chceme.

¹³⁵Vzhľadom na sústavu, v ktorej počítam kinetickú energiu môjho tuhého telesa.



z ktorého hneď vidíme, že

$$r_i^2 = \rho_i^2 - (\mathbf{n} \cdot \rho_i)^2,$$

lebo $\mathbf{n} \cdot \rho_i$ je veľkosť priemetu vektora ρ_i do smeru jednotkového vektora $\mathbf{n}$.¹³⁶ Inak je to čistá Pytagova veta.

Uvažujme nejakú pravouhlú pravotočivú súradnicovú sústavu s počiatkom v ťažisku, pevne spojenú s telesom. Vyjadrime pomocou nej vektor $\rho_i \equiv (x_i, y_i, z_i)$ a tiež jednotkový vektor smeru osi otáčania $\mathbf{n} = (n_x, n_y, n_z)$. Potom môžem písať

$$\begin{aligned} J_T(\mathbf{n}) &= \sum_{i=1}^N m_i r_i^2 = \sum_{i=1}^N m_i [\rho_i^2 - (\mathbf{n} \cdot \rho_i)^2] \\ &= \sum_{i=1}^N m_i [(x_i^2 + y_i^2 + z_i^2) - (n_x x_i + n_y y_i + n_z z_i)^2]. \end{aligned}$$

Teraz roznásobíme druhú zátvorku a prvú rafinovane prenášobím jednotkou v tvare $1 = \mathbf{n}^2 = n_x^2 + n_y^2 + n_z^2$:

$$\begin{aligned} J_T(\mathbf{n}) &= \sum_{i=1}^N m_i [(n_x^2 + n_y^2 + n_z^2)(x_i^2 + y_i^2 + z_i^2) - \\ &\quad - (n_x^2 x_i^2 + n_y^2 y_i^2 + n_z^2 z_i^2 + 2n_x x_i n_y y_i + 2n_x x_i n_z z_i + 2n_y y_i n_z z_i)] \end{aligned}$$

¹³⁶Teda vektor $(\mathbf{n} \cdot \rho_i)\mathbf{n}$ je samotný priemet vektora ρ_i do smeru jednotkového vektora $\mathbf{n}$.

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^N m_i [n_x^2(y_i^2 + z_i^2) + n_y^2(x_i^2 + z_i^2) + n_z^2(x_i^2 + y_i^2) - \\
&\quad - 2n_x n_y x_i y_i - 2n_x n_z x_i z_i - 2n_y n_z y_i z_i] \\
&= n_x^2 \sum_{i=1}^N m_i (y_i^2 + z_i^2) + n_y^2 \sum_{i=1}^N m_i (x_i^2 + z_i^2) + n_z^2 \sum_{i=1}^N m_i (x_i^2 + y_i^2) - \\
&\quad - 2n_x n_y \sum_{i=1}^N m_i x_i y_i - 2n_x n_z \sum_{i=1}^N m_i x_i z_i - 2n_y n_z \sum_{i=1}^N m_i y_i z_i \\
&= n_x^2 J_{xx} + n_y^2 J_{yy} + n_z^2 J_{zz} + 2n_x n_y J_{xy} + 2n_x n_z J_{xz} + 2n_y n_z J_{yz},
\end{aligned}$$

čo sa dá prehľadne zapísať pomocou maticového zápisu

$$J_T(\mathbf{n}) = \begin{pmatrix} n_x & n_y & n_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_{xx} & J_{xy} & J_{xz} \\ J_{yx} & J_{yy} & J_{yz} \\ J_{zx} & J_{zy} & J_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix},$$

pričom matica s J -čkami sa nazýva tenzor zotrvačnosti telesa. Pre jeho komponenty platia vzťahy

$$\begin{aligned}
J_{xx} &= \sum_{i=1}^N m_i (y_i^2 + z_i^2) & J_{xy} &= J_{yx} = - \sum_{i=1}^N m_i x_i y_i \\
J_{yy} &= \sum_{i=1}^N m_i (x_i^2 + z_i^2) & J_{xz} &= J_{zx} = - \sum_{i=1}^N m_i x_i z_i \\
J_{zz} &= \sum_{i=1}^N m_i (x_i^2 + y_i^2) & J_{yz} &= J_{zy} = - \sum_{i=1}^N m_i y_i z_i.
\end{aligned}$$

Lepší pohľad na diagonálne komponenty nám odhalí, že sa jedná o momenty zotrvačnosti telesa okolo jednotlivých osí.¹³⁷ Nediagonálne členy sú pre pekne symetrické a homogénne telesá nulové.

Teraz prichádza taká malá fakultatívna odbočka. Bude sa týkať Steinerovej vety a je tu uvedená len kvôli tematickej spriaznenosti. Na výpočet príkladu ju nebudeme potrebovať. Uvažujme, že poznáme $J_T(\mathbf{n})$ a chceme určiť $J_O(\mathbf{n})$ pre nejaký iný bod O . Označím vektor z ťažiska do bodu O ako $\overrightarrow{TO} = \mathbf{R}$. Potom vektor z bodu O do i -teho bodu telesa bude $\boldsymbol{\rho}_i - \mathbf{R}$. Rozpísané na drobné platí

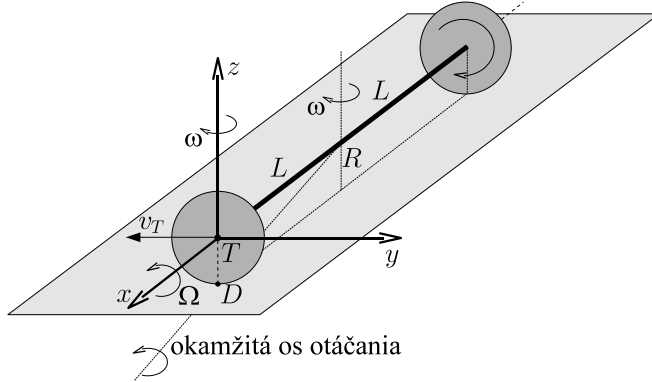
$$\begin{aligned}
J_O(\mathbf{n}) &= \sum_{i=1}^N m_i [\mathbf{n} \times (\boldsymbol{\rho}_i - \mathbf{R})]^2 = \sum_{i=1}^N m_i [(\mathbf{n} \times \boldsymbol{\rho}_i) - (\mathbf{n} \times \mathbf{R})]^2 \\
&= \sum_{i=1}^N m_i [(\mathbf{n} \times \boldsymbol{\rho}_i)^2 - 2(\mathbf{n} \times \boldsymbol{\rho}_i) \cdot (\mathbf{n} \times \mathbf{R}) + (\mathbf{n} \times \mathbf{R})^2]
\end{aligned}$$

¹³⁷Inak to ani byť nemôže, lebo keď pre $\mathbf{n} = (1, 0, 0)$ dostaneme $J_T(\mathbf{n}) = J_{xx}$, čo musí byť práve moment zotrvačnosti telesa vzhľadom na x -ovú os.

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^N m_i (\mathbf{n} \times \boldsymbol{\rho}_i)^2 - 2 \left\{ \mathbf{n} \times \left[\sum_{i=1}^N m_i \boldsymbol{\rho}_i \right] \right\} \cdot (\mathbf{n} \times \mathbf{R}) + \\
&\quad + \sum_{i=1}^N m_i (\mathbf{n} \times \mathbf{R})^2 \\
&= J_T(\mathbf{n}) - \mathbf{0} + M(\mathbf{n} \times \mathbf{R})^2,
\end{aligned}$$

čo je skutočne známa Steinerova veta, lebo $|\mathbf{n} \times \mathbf{R}|$ je vzdialenosť bodu O od osi rotácie prechádzajúcej ťažiskom. (Pretože $\mathbf{n}$ je jednotkový vektor v smere tejto osi.) Všimnite si, že stredný člen v predposlednom riadku vypadol kvôli sume $m_i \boldsymbol{\rho}_i$.

Konečne prišiel čas riešiť náš príklad. Zo zadania sa dá vyrozumiť, že ťažisko celého čuda sa vzhľadom na podložku nehýbe. Avšak naše čudo nie je tuhé teleso, keďže jednotlivé kolesá sa môžu otáčať vďaka bombastickým vlastnostiam nehmotnej a dokonale tuhej osky úplne nezávisle na sebe. Zrejme atomistický problém bude kinetická energia jedného kolesa a je jasné, že kinetická energia druhého kolesa bude rovnaká ako toho prvého. Pozrieme sa na problém z inerciálnej vzťažnej sústavy spojenej s podložkou. Ako súradnicovú sústavu si zvolím pravouhlú pravotočivú bázu takú, že v nejakom čase t_0 problém vyzerá tak ako je vyobrazený na obrázku.



Budem počítať kinetickú energiu predného kolesa v tomto fixovanom čase t_0 .¹³⁸ Toto koleso koná tri základné pohyby: jeho ťažisko sa pohybuje rýchlosťou $\mathbf{v}_T = -L\omega\hat{\mathbf{e}}_2$, otáča sa uhlovou rýchlosťou $-\omega\hat{\mathbf{e}}_3$ (okolo zvislej osi) a uhlovou rýchlosťou $\Omega\hat{\mathbf{e}}_1$ (okolo x -ovej osi). Podmienka je, že koleso neprešmykuje na stole, čo je ekvivalentné tomu, že rýchlosť bodu D je nulová, resp.

$$\mathbf{v}_D(t_0) = \mathbf{v}_T(t_0) + (-\omega\hat{\mathbf{e}}_3) \times (-R\hat{\mathbf{e}}_3) + (\Omega\hat{\mathbf{e}}_1) \times (-R\hat{\mathbf{e}}_3) = \mathbf{0},$$

¹³⁸Očividne E_{kin} nezávisí explicitne od času, ale iba od ω .

keďže vektor z ťažiska T do dotykového bodu D je $\overrightarrow{TD} = -R\hat{\mathbf{e}}_3$. Druhý člen je nulový a teda priamo dostávame

$$-L\omega\hat{\mathbf{e}}_2 + R\Omega\hat{\mathbf{e}}_2 = \mathbf{0}, \quad \text{teda} \quad \Omega = \frac{L}{R}\omega.$$

Potom ľubovoľný bod i kola určený vektorom z ťažiska $\boldsymbol{\rho}_i$ sa pohybuje v čase t_0 rýchlosťou

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_i(t_0) &= \mathbf{v}_T(t_0) + (-\omega\hat{\mathbf{e}}_3) \times \boldsymbol{\rho}_i(t_0) + (\Omega\hat{\mathbf{e}}_1) \times \boldsymbol{\rho}_i(t_0) \\ &= \mathbf{v}_T(t_0) + (\Omega\hat{\mathbf{e}}_1 - \omega\hat{\mathbf{e}}_3) \times \boldsymbol{\rho}_i(t_0), \end{aligned}$$

čo znamená, že vektor uhlovej rýchlosti otáčania kola v čase t_0 je

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\phi} &= \Omega\hat{\mathbf{e}}_1 - \omega\hat{\mathbf{e}}_3 = \omega \left(\frac{L}{R}\hat{\mathbf{e}}_1 - \hat{\mathbf{e}}_3 \right) \\ &= \omega \sqrt{\left(\frac{L}{R}\right)^2 + 1} \left(\frac{\frac{L}{R}}{\sqrt{\left(\frac{L}{R}\right)^2 + 1}}\hat{\mathbf{e}}_1 - \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{L}{R}\right)^2 + 1}}\hat{\mathbf{e}}_3 \right). \end{aligned}$$

Prečítané do ľudskej reči to znamená, že koleso rotuje uhlovou rýchlosťou $\boldsymbol{\phi} = \omega \sqrt{\left(\frac{L}{R}\right)^2 + 1}$ okolo osi danej jednotkovým vektorom¹³⁹

$$\mathbf{n} = (n_x, n_y, n_z) = \left(\frac{\frac{L}{R}}{\sqrt{\left(\frac{L}{R}\right)^2 + 1}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{L}{R}\right)^2 + 1}} \right).$$

Potrebujem ešte určiť jednotlivé komponenty tenzora zotrvačnosti. To by som mal urobiť v nejakej pravouhlej báze pevne spojennej s telesom. V tej istej báze mám potom určiť komponenty jednotkového vektora $\mathbf{n}$ osi rotácie v čase t_0 . Nuž, môžem využiť bázu, ktorá je v zakreslená v obrázku vyššie. V čase t_0 ju totiž naozaj môžem chápať ako pevne spojenú s kolesom.¹⁴⁰ Keďže koleso považujem za rovinné,¹⁴¹ tak zjavne

$$J_{xy} = -\sum_{i=1}^N m_i x_i y_i = 0 \quad \text{a} \quad J_{xz} = -\sum_{i=1}^N m_i x_i z_i = 0.$$

¹³⁹Táto os je znázornená v obrázku – Spája stred osky (ktorý môžem chápať ako nehmotnú súčasť sledovaného predného kola) a bod D . Oba sú v čase t_0 nehybné, takže ležia na jeho okamžitej osi rotácie.

¹⁴⁰Fakt, že báza pevne spojená s kolesom je rotujúca a pohybujúca sa báza neinerciálnej vzťažnej sústavy nás netrápi, lebo skúmame iba stav vo fixovanom čase t_0 , v ktorom potrebujem v danej báze vyjadriť komponenty jednotkového vektora $\mathbf{n}$, čo už mám dokonca hotové.

¹⁴¹Pre homogénny valec s hrúbkou H by sme dostali komponenty $J_{xx} = \frac{1}{2}MR^2$; $J_{yy} = J_{zz} = \frac{1}{4}MR^2 + \frac{1}{12}MH^2$; $J_{xy} = J_{xz} = J_{yz} = 0$.

Vďaka symetrii kola vzhľadom na y -ovú os (rovnako dobre by poslúžila aj z -ová) dostaneme

$$J_{yz} = - \sum_{i=1}^N m_i y_i z_i = 0.$$

Napokon diagonálne členy budú pre homogénny disk

$$J_{xx} = \sum_{i=1}^N m_i (y_i^2 + z_i^2) = \frac{1}{2} M R^2,$$

čo je moment zotrvačnosti plného disku vzhľadom na jeho stred pre otáčanie okolo rotačnej osi, resp.

$$\begin{aligned} J_{yy} &= \sum_{i=1}^N m_i (x_i^2 + z_i^2) = \sum_{i=1}^N m_i z_i^2 = \frac{1}{4} M R^2, \\ J_{zz} &= \sum_{i=1}^N m_i (x_i^2 + y_i^2) = \sum_{i=1}^N m_i y_i^2 = \frac{1}{4} M R^2, \end{aligned}$$

čo sú momenty zotrvačnosti plného disku vzhľadom na jeho stred pre otáčanie okolo osi ležiacej v rovine disku.¹⁴²

Pre väčšiu preľadnosť rovníc si označme $\sqrt{\left(\frac{L}{R}\right)^2 + 1}$ ako C . Potom kinetická energia jedného kola je

$$\begin{aligned} E_{kin} &= \frac{1}{2} M \mathbf{v}_T^2 + \frac{1}{2} J_T(\mathbf{n}) \phi^2 \\ &= \frac{1}{2} M (L\omega)^2 + \frac{1}{2} (n_x^2 J_{xx} + n_z^2 J_{zz}) (\omega C)^2 \\ &= \frac{1}{2} M L^2 \omega^2 + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{L}{RC} \right)^2 \frac{1}{2} M R^2 + \left(-\frac{1}{C} \right)^2 \frac{1}{4} M R^2 \right] \omega^2 C^2 \\ &= \frac{1}{2} M L^2 \omega^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} M L^2 + \frac{1}{4} M R^2 \right) \omega^2 \\ &= M \omega^2 \left(\frac{3}{4} L^2 + \frac{1}{8} R^2 \right). \end{aligned}$$

Dostávame riešenie (kinetická energia celej sústavy – čiže oboch kolies)

$$E = M \omega^2 \left(\frac{3}{2} L^2 + \frac{1}{4} R^2 \right).$$

¹⁴²Malo by byť jasné, že platí $J_{xx} = 2J_{yy} = 2J_{zz}$, lebo sumy $\sum_{i=1}^N m_i y_i^2$ a $\sum_{i=1}^N m_i z_i^2$ sú zhodné a suma $\sum_{i=1}^N m_i x_i^2$ je nulová.

Alternatívne riešenie využije vyššie dokázanú skutočnosť, že kinetickú energiu tuhého telesa (ale to sa dá dokázať aj pre ľubovoľnú sústavu hmotných bodov) môžeme určiť ako súčet translačnej kinetickej energie ťažiska ($\frac{1}{2}M\mathbf{v}_T^2$) a rotačnej kinetickej energie. Nuž, a tá rotácia je, ako sme už spomínali, rotácia okolo x -ovej osi uhlovou rýchlosťou Ω a súčasná rotácia okolo z -ovej osi uhlovou rýchlosťou ω . Označme si vektorom $\mathbf{u}_i$ rýchlosť i -teho bodu telesa vzhľadom na ťažisko. Môžeme si všimnúť, že rotácia okolo osi x spôsobí, že body kola majú nenulové zložky rýchlostí $(\mathbf{u}_i)_y$ a $(\mathbf{u}_i)_z$. Rotácia okolo osi z však vďaka nulovej hrúbke kola dá bodom kola rýchlosť len v smere osi x , čiže spôsobí nenulové $(\mathbf{u}_i)_x$. Takže rýchlosti jednotlivých bodov kola $\mathbf{u}_i$ za tieto dve rotácie sú na seba kolmé. To nám umožňuje rotačnú energiu veľmi jednoducho rozdeliť na dva členy, z ktorých prvý člen musí byť kinetická energia rotácie okolo osi z a druhý člen kinetická energia rotácie okolo osi x :

$$\begin{aligned}
 E_{rot} &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{u}_i^2 \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i [(\mathbf{u}_i)_x^2 + (\mathbf{u}_i)_y^2 + (\mathbf{u}_i)_z^2] \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i (\mathbf{u}_i)_x^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i [(\mathbf{u}_i)_y^2 + (\mathbf{u}_i)_z^2] \\
 &= \frac{1}{2} J_{zz} \omega^2 + \frac{1}{2} J_{xx} \Omega^2.
 \end{aligned}$$

Tým je hlavná potiaž tejto úlohy prekonaná bez vyjadrovania vektoru okamžitej osi rotácie, veľkosti uhlovej rýchlosti a momentu zotrvačnosti vzhľadom na os okamžitej rotácie. Dopotávanie spočíva len na určení $\mathbf{v}_T$, Ω , J_{xx} a J_{zz} a dosadení do rovnice

$$E_{kin} = M\mathbf{v}_T^2 + J_{zz}\omega^2 + J_{xx}\Omega^2.$$

FX E3 – STRUNA



Tina sa učí hrať na gitare. Okrem jej podmanivého zvuku ju však zaujala aj skutočnosť, že keď si gitaru naladí v teple domova a potom s ňou vyjde von do chladnej zasneženej noci, gitara už neladí. Aby ste Tine vysvetlili, ako je to možné, tak

- (a) odvodte vlnovú rovnicu pre strunu;
- (b) nájdite závislosť základnej frekvencie struny v závislosti od jej predĺženia ΔL ;
- (c) zistite, ako sa zmení základná frekvencia struny, ak s gitarou zájdeme do treskúcej zimy s teplotou o ΔT menšou.

Struna má dĺžku $L = 0,8\text{ m}$ (jej časť na kobylke zanedbávame), priemer $d = 0,6\text{ mm}$, je zhotovená z ocele s hustotou $\rho = 8000\text{ kg/m}^3$, modulom pružnosti $E = 220\text{ GPa}$ a tepelnou rozťažnosťou $\alpha = 11 \cdot 10^{-6}\text{ K}^{-1}$ a na začiatku hrá s frekvenciou f_0 .

Zdroj: Úlohu vymyslel Bzdušo

 VZORÁK BZDUŠO 

Časť (a)

Odvodenie vlnovej rovnice struny urobíme formálne, aby sa dalo ľahko zopakovať pri odvodení vlnovej rovnice v mnohých iných situáciách. Budem pritom zdôrazňovať všetky zanedbania, ktorých sa dopúšťame.

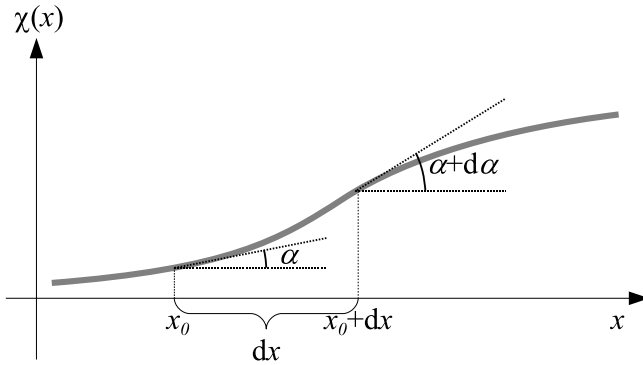
Označme výchylku struny v jednotlivých miestach ako χ .¹⁴³ To bude bude závisieť od polohy x i času t , teda je správne písať $\chi(x, t)$. Z praktických dôvodov budem väčšinou časový argument, či dokonca oba argumenty, vynechávať. V súvislosti s týmto si pripomeňme skrátané označenia pre časové a súradnicové derivácie

$$\frac{\partial \chi}{\partial x} = \chi' \quad \text{a} \quad \frac{\partial \chi}{\partial t} = \dot{\chi},$$

v prípade druhých derivácií napíšeme dve čiarky, resp. dve bodky.

Nakreslime si prehľadný obrázok, aby sme sa mali od čoho odraziť.

¹⁴³V prípade pozdĺžnych vĺn by x malo význam súradnice daného bodu na nedeformovanom telese a χ jeho posunutie z tejto polohy do okamžitej polohy.



Budeme uvažovať len malé uhly α , aby sme mohli používať aproximáciu $\sin \alpha \approx \alpha \approx \operatorname{tg} \alpha$. V tom prípade zrejme môžeme písať $\chi'(x) = \alpha(x)$.

Teraz poďme riešiť dynamiku úlohy. Aké sily pôsobia na vybraný infinitesimálny kúsok struny? Struna je napínaná nejakou silou T . Tá je určite konštantná pozdĺž struny, ak struna nie je deformovaná. Pri veľmi malých deformáciach bude zrejme aj zmena T pozdĺž struny malá a preto ju zanedbáme. Sily ťahajúce konce vybraného kúska sú teda rovnako veľké a odlišujú sa len smerom, akým pôsobia. Výslednica síl vo vertikálnom smere je preto

$$\begin{aligned} dF_y &= T \sin(\alpha + d\alpha) - T \sin \alpha \\ &= T \chi'(x + dx) - T \chi'(x) \\ &= T \chi''(x) dx. \end{aligned}$$

Z Newtonovho pohybového zákona máme $dF_y = dm a_y$, kde dm je hmotnosť kúska struny $dm = \rho S dx$ a kde $a_y = \ddot{\chi}$ je jeho zrýchlenie vo zvislom smere. Dosadením za F_y dostávame

$$\begin{aligned} S \rho \ddot{\chi}(x, t) dx &= T \chi''(x, t) dx \\ \frac{\partial^2 \chi(x, t)}{\partial t^2} &= \frac{T}{S \rho} \frac{\partial^2 \chi(x, t)}{\partial x^2}. \end{aligned}$$

To je hľadaná vlnová rovnica. Ale prečo sa tak nazýva? *Vlnová* rovnica má popisovať *vlnu*, tj. profil pohybujúci sa určitou rýchlosťou v . V tomto prípade má teda výchylka χ závisieť od času a súradnice cez argument $(x \pm$

$vt)$.¹⁴⁴ Derivovaním $\chi(x \pm vt)$ ľahko odvodíme¹⁴⁵

$$\begin{aligned}\frac{\partial \chi}{\partial t} &= \pm v \frac{\partial \chi}{\partial x} \\ \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} &= v^2 \frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2}.\end{aligned}$$

To znamená, že rovnica, ktorej riešením je pohybujúci sa profil (vlna), musí spĺňať práve odvodený vzťah. Preto sa uvedená rovnica volá vlnová,¹⁴⁶ hoci má aj množstvo iných riešení.¹⁴⁷

Porovnaním dostávame

$$v = \sqrt{\frac{T}{S\rho}} = \sqrt{\frac{\sigma}{\rho}},$$

kde $\sigma = T/S$ štandardne označuje mechanické napätie v pascaloch.

Časť (b)

Na to, aby sa na strune mohla šíriť vlna, musí byť struna napnutá. Pnutie súvisí s predĺžením podľa Hookovho zákona

$$\sigma = \varepsilon E = \frac{\Delta L}{L} E,$$

kde E je zadaný Youngov modul pružnosti v ťahu.

Teraz prejdime k samotnej vlne. Pri základnej frekvencii platí $\lambda = 2L$. V prípade každej vlny sú (fázová) rýchlosť, frekvencia a vlnová dĺžka viazané vzťahom $v = \lambda f$.¹⁴⁸ Dosadením dostávame

$$f_0 = \frac{v}{2L} = \frac{1}{2L} \sqrt{\frac{\varepsilon E}{\rho}}.$$

¹⁴⁴Znamienko určuje smer pohybu vlny. Premyslite si, prečo voľba *mínus* znamená pohyb v kladnom smere osi x !

¹⁴⁵Možno to derivovať napríklad ako zloženú funkciu, tj.

$$\begin{aligned}\frac{\partial \chi(x \pm vt)}{\partial x} &= \frac{d\chi(x \pm vt)}{d(x \pm vt)} \cdot \frac{\partial(x \pm vt)}{\partial x} \\ \frac{\partial \chi(x \pm vt)}{\partial t} &= \frac{d\chi(x \pm vt)}{d(x \pm vt)} \cdot \frac{\partial(x \pm vt)}{\partial t}.\end{aligned}$$

¹⁴⁶Takéto pekné vysvetlenie ma naučil docent Martin Mojžiš, za čo som mu vďačný.

¹⁴⁷Ľahko si môžete overiť princíp superpozície, tj. že ak $\chi_1(x \pm vt)$ a $\chi_2(c \pm vt)$ sú riešením istej vlnovej rovnice, tak aj $c_1\chi_1(x \pm vt) + c_2\chi_2(x \pm vt)$ je riešením tej istej vlnovej rovnice pre hocikaké $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

¹⁴⁸Predstavme si sínusovú vlnu. Nech v istom bode struny sa v istý okamih nachádza vrch kopčeka. Vrch ďalšieho kopčeka sa sem dostane za čas $1/f$. Za ten istý čas sa prvý kopček stihol posunúť práve o vlnovú dĺžku λ . Jeho rýchlosť je teda $v = s/t = \lambda f$.

Aby sme boli v obraze, nájdime predĺženie potrebné k vylúdeniu komorného a, ktoré má frekvenciu $f_0 = 440$ Hz. Dostávame

$$\varepsilon = \frac{\rho}{E} (2f_0 L)^2 \approx 0,018.$$

To znamená, že nami vybratá konkrétna struna je na naladenej gitare natiahnutá o 1,8% oproti svojej pôvodnej dĺžke.

Časť (c)

Zanedbávame rozťažnosť gitary, takže vlnová dĺžka základnej frekvencie ostáva rovnaká. Rýchlosť vlny sa zmení, pretože sa zmení napätie σ . Ochladením sa zrejme zväčší, preto nové napätie označíme ako $\sigma + \Delta\sigma$. Ako sa tým zmení základná frekvencia? Postupne upravujeme

$$\begin{aligned} f_0 + \Delta f &= \frac{1}{2L} \sqrt{\frac{\sigma + \Delta\sigma}{\rho}} \\ &= \frac{1}{2L} \sqrt{\frac{\sigma}{\rho}} \sqrt{1 + \frac{\Delta\sigma}{\sigma}} \\ &\approx \frac{1}{2L} \sqrt{\frac{\sigma}{\rho}} \left(1 + \frac{\Delta\sigma}{2\sigma}\right) \\ \Delta f &= f_0 \frac{\Delta\sigma}{2\sigma}, \end{aligned}$$

kde sme v jednom kroku využili, že pre malé x platí $(1+x)^n \approx 1 + nx$.¹⁴⁹

V získanom vzťahu by sme radi videli hmatateľnejšie veličiny, než akési mechanické napätie a jeho zmenu. Mechanické napätie si vyjadrím pomocou f_0 . Platí

$$\sigma = \rho (2f_0 L)^2.$$

A ako sa vlastne pri ochladení zmení mechanické napätie? Aby sme určili $\Delta\sigma$, treba si uvedomiť, ako to s tými predĺženiami funguje.

Majme strunu, ktorá ma pri istej teplote a pri nulovom mechanickom napätí dĺžku L_0 . Ak ju schladíme¹⁵⁰ o ΔT , skráti sa na $(1 - \alpha\Delta T)L_0$. Ak ju natahujeme napätím σ , predlži sa na $(1 + \frac{\sigma}{E})L_0$. Ak predpokladáme, že koeficienty α a E sú pre malé natiahnutia a malé zmeny teploty konštantné,

¹⁴⁹Priamočiarejší postup cez derivácie je

$$\Delta f = \left. \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right|_{f_0} \Delta\sigma = \frac{f_0}{2\sigma} \Delta\sigma.$$

¹⁵⁰Schladíme.

tak môžeme písať

$$\begin{aligned} L &= (1 - \alpha\Delta T) \left(1 + \frac{\sigma}{E}\right) L_0 \\ &\approx (1 - \alpha\Delta T + \frac{\sigma}{E}) L_0, \end{aligned}$$

teda pri oboch efektoch súčasne platí pre predĺženie

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} - \alpha\Delta T.$$

Gitara, ktorá predstavuje akési neroztiahnuteľné médium, ponechá celkovú dĺžku struny po ochladení rovnakú, ako pred ochladením. Predĺženie ε sa teda ochladením nezmení. Ak ma zaujíma zmena mechanického napätia, dostávam rovnosť

$$\begin{aligned} \frac{\sigma}{E} &= \frac{\sigma + \Delta\sigma}{E} - \alpha\Delta T \\ \Delta\sigma &= E\alpha\Delta T. \end{aligned}$$

Po dosadení σ a $\Delta\sigma$ do vzťahu pre Δf dostávame po úprave

$$\frac{\Delta f}{\Delta T} = \frac{E\alpha}{8\rho f_0 L^2}.$$

V súlade so skúsenosťou gitaristov dostávame výsledok, že najviac sa zmení frekvencia pri malých hodnotách f_0 , tzn. pri hlbokých tónoch.

POZNÁMKA 1: Rýchlosť šírenia vlny možno vždy vyjadriť v závislosti od lokálnych parametrov (v prípade priečných vĺn struny to bolo mechanické napätie a hustota). Lokálnych parametrov väčšinou nie je veľa, preto možno rýchlosť šírenia vlny až na číselnú konštantu veľmi rýchlo odvodiť z rozmerovej analýzy. Číselná konštantka je v drvivej väčšine prípadov rovná 1. Výnimkou je šírenie zvuku v plynch, kde sa rovná odmocnine z Poissonovej konštanty κ .

POZNÁMKA 2: Je veľmi zaujímavé, že dva súčasne znejúce tóny znejú čisto, ak pomer ich frekvencií je zlomok malých celých čísel. Ladenie nástrojov v našich končinách je založené na tom, že pomer frekvencií poltónu, tj. dvoch najbližších kláves, je $1 : \sqrt[12]{2}$. Rozdiel n poltónov zodpovedá pomeru frekvencií $1 : (\sqrt[12]{2})^n$. Jedna oktava (12 poltónov) zodpovedá pomeru frekvencií $1 : 2$. Kvarte (5 poltónov) a kvitne (7 poltónov) zodpovedajú približne pomery frekvencií $3 : 4$, resp. $3 : 2$. To možno brať ako vysvetlenie, prečo znejú čistejšie než ostatné intervaly.

Zostaňme však pri čísle $\sqrt[12]{2}$. S jeho pomocou vieme zistiť, o aký počet N poltónov sa vlastne gitare pri ochladení rozladila. Ak predpokladáme malú

zmenu frekvencie, tak máme

$$\begin{aligned}
 N &= \log \sqrt[12]{2} \left(\frac{f_0 + \Delta f}{f_0} \right) \\
 &= \frac{\ln \left(1 + \frac{\Delta f}{f_0} \right)}{\ln \sqrt[12]{2}} \\
 &\approx \frac{12 \Delta f}{f_0 \ln 2} \\
 &= \frac{3 E \alpha}{2 \rho f_0^2 L^2 \ln 2} \Delta T.
 \end{aligned}$$

Ak si vezmeme frekvenciu najnižšej (82 Hz) a najvyššej (330 Hz) struny na gitare, ľahko dopočítame príslušné rozladenie 0,15, resp. 0,0094 poltónu na °C. V literatúre¹⁵¹ možno nájsť, že citlivosť ľudského ucha je asi 0,05 poltónu. Chce to ale dobre nastražené uši. Najhrubšia struna sa rozladí o celý poltón pri ochladení o 7°C.

¹⁵¹Napríklad [http://en.wikipedia.org/wiki/Pitch_\(music\)](http://en.wikipedia.org/wiki/Pitch_(music)).

FX E4 – ŽĽAB

☆☆☆☆☆

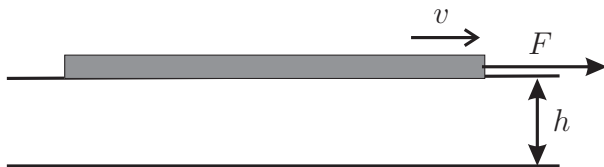
Baša si na záhrade postavila dlhý žlab na odvod vody. Jeho šírka je b a sklon α . Keď sa raz rozpršalo, v žlabe tiekla voda prúdom o výške h (meranej kolmo na dno žlabu). Aký bol prietok vody žlabom, ak jej prúdenie považujeme za laminárne? Môžete predpokladať $h \ll b$.

Zdroj: Úlohu vymyslel Tomáš

✻ VZORÁK MARCELKA ✻

Najprv si povieme niečo o viskozite. Ak kvapalina nemá vo všetkých miestach rovnakú rýchlosť, vznikajú v nej trecie sily – kvapalina sa „bráni“ pohybu. Zo skúsenosti vieme, že niektoré kvapaliny sa bránia pohybu viac, iné menej: napríklad med tečie veľmi pomaly, ale voda tečie rýchlo. Viskozita je vlastnosť kvapaliny, ktorá hovorí, aké veľké sú vnútorné trecie sily v pohybujúcej sa kvapaline. Preto veta „med tečie pomaly“ sa dá nahradiť slovami „med má veľkú viskozitu“.

Predstavme si nasledujúci experiment: zoberieme si dosku s plochou S , položíme ju na vodu s hĺbkou h a začneme ju ťahať tak, aby doska mala rýchlosť v . Môžeme si odmerať silu F , ktorá je potrebná na takéto ťahanie. Je očakávateľné, že čím väčšou rýchlosťou chceme dosku ťahať, tým väčšiu silu na to budeme potrebovať. Naproti tomu, čím tenšia je vrstvička vody, tým to pôjde ľahšie (ťahat' nejakú platňu v bazéne je ľahšie ako ťahať ju po milimetrovej vrstvičke vody). Potrebná sila tiež závisí od plochy dosky – čím väčšia doska, tým väčšia sila.



Zoberme ako experimentálny fakt, že sila závisí od daných veličín ako

$$F = \eta S \frac{v}{h},$$

čo súhlasí s intuíciou. V tomto vzťahu sa okrem spomínaných veličín objavilo písmenko η . To je konštanta, ktorú voláme dynamická viskozita kvapaliny.¹⁵²

¹⁵²Pozor, existuje aj konštanta nazývaná kinematická viskozita. Medzi oboma viskozitami je jednoduchý vzťah, ale netreba si ich popliesť, lebo to môže spôsobiť rádovo zlé výsledky.

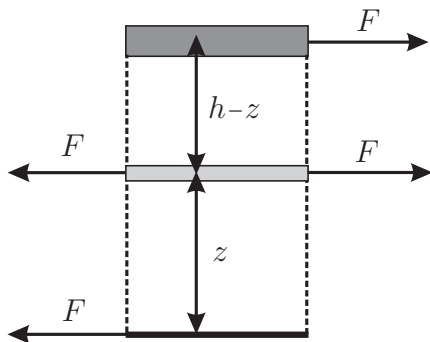
Každá kvapalina ju má inú a dá sa nájsť v tabuľkách. (Aby to nebolo až také jednoduché, nie všetky kvapaliny sa správajú takto. Sú aj také, kde viskozita nie je konštantá, ale funkcia rýchlosti kvapaliny. Voda však, našťastie, uvedený vzťah spĺňa.)

Niekedy je rozumnejšie hovoriť o sile na plochu, teda o akomsi napätí. Toto napätie sa volá šmykové napätie a označuje sa τ . Platí preň vzťah

$$\tau = \frac{F}{S} = \eta \frac{v}{h}.$$

Predstavme si teraz, že nás zaujíma rýchlosť kvapaliny na rôznych miestach v kvapaline. (Stále sa rozprávame o ťahaní dosky, nie o našom žľabe. Berme to ako jednoduchý motivačný príklad, ktorý nám pomôže zoznámiť sa s viskozitou a lepšie si „ohmatať, ako to funguje“.) Predpokladajme, že doska je oveľa väčšia ako výška vody, a že prúdenie je ustálené. Zo symetrie¹⁵³ problému vyplýva, že všetka kvapalina bude mať rýchlosť rovnobežnú s rýchlosťou dosky a že rýchlosť kvapaliny závisí len od z -ovej súradnice (zvislej, kolmej na dosku). Zaujíma nás teda funkcia $v(z)$.

Zamerajme sa na nejakú vrstvu vody vo výške z . Rýchlosť tejto vrstvy označíme $v(z)$. Čo keby na mieste tejto vrstvy bola tenká platňa ťahaná rýchlosťou $v(z)$? Nič, voda by si to „nevšimla“ a správala by sa rovnako ako predtým. V úvahách teda môžeme nahradiť vrstvu vody platňou.



Zoberme si teraz len malý valček vody s podstavou S . Na jeho hornú podstavu pôsobí sila $F = S\tau(h)$, no a keďže je prúdenie ustálené, celková sila pôsobiaca na valček (aj vo vodorovnom smere) bude nulová. Preto na jeho spodnú podstavu pôsobí sila $-F$. Ak si však valček vo výške z rozdelíme na dve časti (napríklad tenkou platňou), môžeme pre obe časti zopakovať rovnakú úvahu. Výslednica síl pôsobiacich na dolnú časť valčeka musí byť

¹⁵³O symetriách a ich využití, napríklad i o Nötherovej vete sa môžete dozvedieť viac napríklad v Príručke mladých fyzikov.

nulová, čiže naň horná časť (resp. platňa) pôsobí silou F , a podobne dolná časť pôsobí na hornú opačnou silou $-F$.

Toto ale znamená, že voda v spodnom valčeku sa správa tak, akoby sme vo výške z ťahali platňu silou F . Z našich úvah o viskozite potom ale vyplýva, že $S\tau(h) = F = S\tau(z)$, čiže $\tau(h) = \tau(z)$ a teda

$$\eta \frac{v(h)}{h} = \eta \frac{v(z)}{z}.$$

Inými slovami, funkcia $v(z)$ je lineárna, konkrétne

$$v(z) = z \frac{v(h)}{h}.$$

Skúsme ešte nahliadnuť, ako vyzerá diferenciálny tvar rovnice $\tau = \eta v/h$. Predstavme si dve vrstvy vody, jednu vo výške z , druhú vo výške $z + dz$. Rýchlosť vrchnej vrstvy vzhľadom na spodnú je $v(z+dz) - v(z)$. Predstavme si, že vrchná vrstva je platňa pohybujúca sa rýchlosťou $v(z+dz)$. Sila, ktorou by sme takúto platňu museli ťahať, je

$$F = \eta S \frac{v(z+dz) - v(z)}{dz},$$

čo v limite $dz \rightarrow 0$ dáva deriváciu rýchlosti podľa výšky. Odtiaľ máme vzťah pre šmykové napätie vo výške z ;

$$\tau = \eta \frac{dv}{dz}.$$

Dostali sme vzťah pre šmykové napätie v najjednoduchšom možnom prípade: keď je prúdenie ustálené a rýchlosť vody rovnobežná vo všetkých miestach.

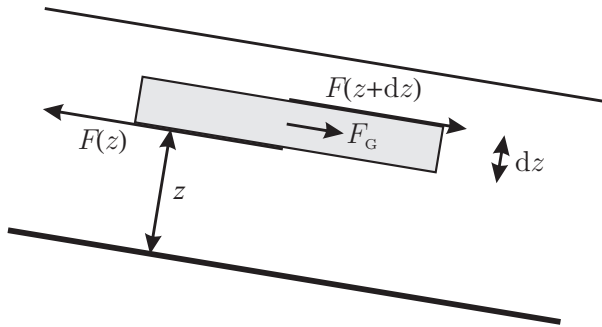
Keď už poznáme diferenciálny tvar rovnice pre šmykové napätie, môžeme sa ešte iným spôsobom pozrieť na rýchlosť kvapaliny, na ktorej je položená doska ťahaná rýchlosťou $v(h)$. Opäť si pozrime nejakú vrstvu vo výške z , ktorá má hrúbku dz . Na vrstvu pôsobia vo vodorovnom smere len šmykové sily – jedna smerom dopredu (od vrchných vrstiev), jedna smerom dozadu. Keďže predpokladáme ustálený stav, tieto dve sily musia mať rovnakú veľkosť. To znamená, že $\tau(z) = \tau(z+dz)$, čiže šmykové napätie je všade rovnaké a nezávislé od zvislej súradnice. Čo z toho vyplýva? Derivácia rýchlosti podľa výšky je konštanta:

$$\frac{dv}{dz} = c,$$

takže funkcia $v(z)$ musí byť tvaru $v(z) = cz + d$. Navyše vieme, že voda v nulovej výške má nulovú rýchlosť (z čoho $d = 0$) a že voda vo výške platne má rýchlosť platne: $v(h) = ch + d$. Z toho dostávame už známy vzťah

$$v(z) = z \frac{v(h)}{h}.$$

Po obohatení sa o poznatky o viskozite sa môžeme pustiť do riešenia samotného príkladu. V zadaní je napísané, že prúdenie je laminárne. To znamená, že je „hladké“ – jednotlivé vrstvy vody majú rovnobežnú rýchlosť a nepremiešavajú sa. Môžeme si teda dovoliť predpokladať, že rýchlosť vody je rovnobežná s rovinou žľabu. Navyiac, opäť je zo symetrie zrejmé, že rýchlosť vody bude mať len jeden smer (len „nadol“ a nie do bokov). Tiež môžeme predpokladať, že na podstatnej časti žľabu bude prúdenie ustálené, a keďže $h \ll b$, môžeme zanedbať javy na okrajoch žľabu. Opäť nás teda zaujíma len závislosť $v(z)$, pričom z je v tomto prípade súradnica kolmá na rovinu žľabu.



Zamerajme sa znova na tenúčku vrstvu vody vo výške z , ktorá má plochu S a hrúbku dz . Vo výške z bude šmykové napätie

$$\tau(z) = \eta \frac{dv}{dz}(z)$$

a vo výške $z + dz$ bude

$$\tau(z + dz) = \eta \frac{dv}{dz}(z + dz).$$

Voda nad vrstvičkou bude „strhávať“ vrstvičku smerom dopredu, voda pod vrstvičkou zase smerom dozadu. (Je intuitívne jasné, že bližšie k podložke má voda menšiu rýchlosť.) Výslednica šmykových síl pôsobiach na vrstvu teda bude teda

$$F_S = S(\tau(z + dz) - \tau(z)) = S\eta \left(\frac{dv}{dz}(z + dz) - \frac{dv}{dz}(z) \right).$$

Všimnime si, že ak pošleme $dz \rightarrow 0$, potom

$$\frac{\frac{dv}{dz}(z + dz) - \frac{dv}{dz}(z)}{dz} \rightarrow \frac{d^2v}{dz^2}(z),$$

čo je druhá derivácia rýchlosti v podľa z . Odtiaľ máme vzťah pre výslednicu šmykových síl pôsobiacich na vrstvu vody vo výške z :

$$F_S = S\eta \, dz \frac{d^2v}{dz^2}(z).$$

Zároveň na vrstvičku pôsobí okrem šmykových síl zložka gravitačnej sily rovnobežná so žľabom. Táto má veľkosť $F_G = S \, dz \rho g \sin \alpha$. Keďže prúdenie je ustálené, výslednica všetkých síl pôsobiacich na vrstvičku musí byť nula, čiže (uvažujúc len sily v smere rovnobežnom so žľabom)

$$F_G + F_S = S \, dz \rho g \sin \alpha + S\eta \, dz \frac{d^2v}{dz^2}(z) = 0.$$

Po jednoduchšej úprave dostávame diferenciálnu rovnicu

$$\frac{d^2v}{dz^2} = -\frac{\rho g \sin \alpha}{\eta}.$$

Riešením tejto rovnice je funkcia, ktorej druhá derivácia je konštanta. Túto podmienku spĺňa polynóm druhého stupňa, preto

$$v(z) = kz^2 + mz + n,$$

kde

$$k = -\frac{\rho g \sin \alpha}{2\eta}.$$

Už len potrebujeme zistiť veľkosť konštánt m a n . Na to použijeme okrajové podmienky: vieme, že voda vo výške $z = 0$ má nulovú rýchlosť a šmykové trenie vo výške $z = h$ je nulové (vzduch vodu nebrzdí). Keďže

$$v(0) = n \quad \text{a} \quad \tau(h) = \eta \frac{dv}{dz}(h) = \eta(2kh + m),$$

dostávame $n = 0$ a $m = -2hk$.

Zadanie sa pýta, aký je prietok vody žľabom. Keď už poznáme funkciu $v(z)$, je to jednoduché:

$$\begin{aligned} Q &= \int_0^h bv(z) \, dz = \int_0^h b(kz^2 - 2hkhz) \, dz = \left[b \frac{kz^3}{3} - bhkhz^2 \right]_0^h \\ &= b \frac{kh^3}{3} - bhkh^3 = -\frac{2}{3}bhkh^3 = \frac{\rho gb \sin \alpha}{3\eta} h^3. \end{aligned}$$

FX E5 – RUTHERFORD



Pán Rutherford znova vytiahol zo špajze zlatú fóliu a delo α častíc. Vystrelil α časticu rýchlosťou w smerom na jadro zlata, a ona sa mu odchyľila o uhol β (od pôvodného smeru letu). Zistite, o koľko pán Rutherford netrafil toto jadro zlata! (t.j. ako ďaleko od pôvodnej priamky letu sa toto jadro nachádzalo)

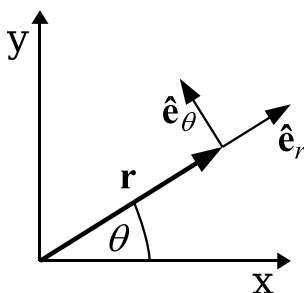
Zdroj: Štandardné učebnice fyziky



Takýto príklad môžeme zrátať buď nejakou fintou a osvieteným nadhľadom, alebo pomocou hutného aparátu. No, prečo nie? Poďme si ho vybudovať.¹⁵⁴

Polárne súradnice

Centrálny pohyb¹⁵⁵ sa veľmi dobre bude popisovať polárnymi súradnicami. Ak sme doteraz polohu (polohový vektor) nejakej častice zaznamenávali ako $\mathbf{r} = x\hat{\mathbf{e}}_x + y\hat{\mathbf{e}}_y$,¹⁵⁶ teraz si budeme radšej písať jej vzdialenosť od stredu r a uhol θ , ktorý zvierá vektor $\mathbf{r}$ od nejakej referenčnej priamky, napr. od osi x . Kladný uhol budeme podľa zvyklosti počítať proti smeru hodinových ručičiek. Naše jednotkové vektory budú teraz $\hat{\mathbf{e}}_r$ a $\hat{\mathbf{e}}_\theta$. Ukazujú v smere narastajúceho r resp. θ , ako to znázorňuje obrázok:



¹⁵⁴Upozornenie hneď na začiatok: vektory budeme značiť tučným písmom, tj. $\mathbf{v}$ namiesto $\vec{v}$.

¹⁵⁵Tj. pohyb s centrálnou silou, alebo vlastne hocičo, čo vyzerá dostatočne centrálné

¹⁵⁶Divné symboly $\hat{\mathbf{e}}_x$ a $\hat{\mathbf{e}}_y$ nie sú ničím iným ako jednotkovými vektormi v smere osí x a y .

Vidíme, že pri tomto značení $\mathbf{r} = r\hat{\mathbf{e}}_r$. Čo však s $\dot{\mathbf{r}}$ a $\ddot{\mathbf{r}}$, ktoré potrebujeme na popísanie pohybu? Pri kartézskych súradniciach sme boli zvyknutí, že naše jednotkové vektory $\hat{\mathbf{e}}_x$ a $\hat{\mathbf{e}}_y$ boli konštantné, preto $\ddot{\mathbf{r}}$ bolo rovné $\ddot{x}\hat{\mathbf{e}}_x + \ddot{y}\hat{\mathbf{e}}_y$. Teraz sa nám však menia aj naše $\hat{\mathbf{e}}_r$ a $\hat{\mathbf{e}}_\theta$, konkrétne sa spolu s $\mathbf{r}$ otáčajú okolo počiatku. Vyjadrime si ich teda pomocou $\hat{\mathbf{e}}_x$ a $\hat{\mathbf{e}}_y$:

$$\hat{\mathbf{e}}_r = \hat{\mathbf{e}}_x \cos \theta + \hat{\mathbf{e}}_y \sin \theta \quad (41)$$

$$\hat{\mathbf{e}}_\theta = -\hat{\mathbf{e}}_x \sin \theta + \hat{\mathbf{e}}_y \cos \theta \quad (42)$$

Ak toto poderivujeme podľa času, dostávame

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\mathbf{e}}}_r &= \frac{d}{dt} (\hat{\mathbf{e}}_x \cos \theta + \hat{\mathbf{e}}_y \sin \theta) \\ &= \hat{\mathbf{e}}_x (-\sin \theta) \dot{\theta} + \hat{\mathbf{e}}_y (\cos \theta) \dot{\theta} \\ &= \dot{\theta} \hat{\mathbf{e}}_\theta \end{aligned} \quad (43)$$

a analogicky

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\mathbf{e}}}_\theta &= \hat{\mathbf{e}}_x (-\cos \theta) \dot{\theta} + \hat{\mathbf{e}}_y (-\sin \theta) \dot{\theta} \\ &= -\dot{\theta} \hat{\mathbf{e}}_r. \end{aligned} \quad (44)$$

Ľahá, aký pekný výsledok.¹⁵⁷ Teraz sa môžeme pustiť do zisťovania, čo bude vlastne $\dot{\mathbf{r}}$ a $\ddot{\mathbf{r}}$, používajúc (43) a (44).

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= r\hat{\mathbf{e}}_r \\ \dot{\mathbf{r}} &= \dot{r}\hat{\mathbf{e}}_r + r\dot{\hat{\mathbf{e}}}_r = \dot{r}\hat{\mathbf{e}}_r + r\dot{\theta}\hat{\mathbf{e}}_\theta \end{aligned} \quad (45)$$

To je intuitívny výsledok – rýchlosť je nielen zmena vzdialenosti od stredu, ale má aj kolmý komponent v smere $\hat{\mathbf{e}}_\theta$, obvodovú rýchlosť $r\dot{\theta}$. Derivujme však ďalej.

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{r}} &= \frac{d}{dt} (\dot{r}\hat{\mathbf{e}}_r + r\dot{\theta}\hat{\mathbf{e}}_\theta) \\ &= \ddot{r}\hat{\mathbf{e}}_r + \dot{r}\dot{\hat{\mathbf{e}}}_r + \frac{d}{dt} (r\dot{\theta}) \hat{\mathbf{e}}_\theta + r\dot{\theta}\dot{\hat{\mathbf{e}}}_\theta \\ &= \ddot{r}\hat{\mathbf{e}}_r + \dot{r}\dot{\theta}\hat{\mathbf{e}}_\theta + \dot{r}\dot{\theta}\hat{\mathbf{e}}_\theta + \dot{r}\ddot{\theta}\hat{\mathbf{e}}_\theta - r\dot{\theta}^2\hat{\mathbf{e}}_r \\ &= (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \hat{\mathbf{e}}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + \dot{r}\ddot{\theta}) \hat{\mathbf{e}}_\theta \end{aligned} \quad (46)$$

Aký to nádherný výraz pre druhú deriváciu polohového vektora, krásne rozporciovaný do výrazov $\hat{\mathbf{e}}_r$ a $\hat{\mathbf{e}}_\theta$! Všimnime si hneď výraz $\ddot{r}$ – druhú deriváciu vzdialenosti a $r\dot{\theta}^2$ – dostredivé zrýchlenie pri $\hat{\mathbf{e}}_r$. Takisto si môžeme všimnúť, že výraz pri $\hat{\mathbf{e}}_\theta$ je rovný $\frac{1}{r} \frac{d}{dt} (r^2 \dot{\theta})$.¹⁵⁸

¹⁵⁷Navyše celkom intuitívny, ak si otáčajúce sa vektory $\hat{\mathbf{e}}_x$ a $\hat{\mathbf{e}}_y$ nakreslíme.

¹⁵⁸Čo? Aký moment hybnosti? Konštantný? Nulové zrýchlenie v radiálnom smere?

Aparát vybudovaný, môžeme sa pustiť do riešenia. Keďže jadro zlata je ťažké a pomerne dobre zašité v mriežke, môžeme predpokladať, že sa nebude pohybovať. Ak si doň teraz položíme stred našej súradnicovej sústavy, bude sila pôsobiaca na alfa časticu rovná $\mathbf{F} = \hat{\mathbf{e}}_r C/r^2$, kde C je nejaká konštanta. No a keďže druhý Newtonov zákon nám hovorí $\mathbf{F} = m\ddot{\mathbf{r}}$, dostávame pohybovú rovnicu:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{e}}_r \frac{C}{r^2} &= m \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \right) \hat{\mathbf{e}}_r + \frac{m}{r} \frac{d}{dt} \left(r^2 \dot{\theta} \right) \hat{\mathbf{e}}_\theta \\ &\Downarrow \\ m \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \right) &= \frac{C}{r^2} \end{aligned} \quad (47)$$

$$r^2 \dot{\theta} = h \quad (48)$$

kde h je nejaká konštanta.¹⁵⁹

Takto sme sa dostali ku pohybovým rovniciam pre r a θ v (prefikanej) závislosti od času. Riešiť tieto diferenciálne rovnice nie je najjednoduchšie, a navyše, my sme chceli vedieť iba tvar trajektórie. Ak teda odstránime čas z týchto rovníc, budeme mať už len závislosť r a θ . Nebude to ani tak veľmi bolieť, pretože v $\dot{\theta} = h/r^2$ máme užitočnú väzbu. Takže môžeme písať:

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = \frac{dr}{d\theta} \frac{h}{r^2}$$

Toto nie je výnimočne pekný výraz, tak si dovoľme ešte jednu fintu – ak urobíme substitúciu $u = 1/r$ (ktorú by sme asi museli urobiť neskôr pri riešení nejakej škaredej diferenciálnej rovnice), uhladiť sa nám to na

$$\dot{r} = \frac{dr}{d\theta} \frac{h}{r^2} = -h \frac{d\frac{1}{r}}{d\theta} = -h \frac{du}{d\theta} \quad (49)$$

a potom

$$\ddot{r} = \frac{d\dot{r}}{dt} = \frac{d\dot{r}}{d\theta} \dot{\theta} = \left(-h \frac{d^2 u}{d\theta^2} \right) \frac{h}{r^2} = -h^2 u^2 \frac{d^2 u}{d\theta^2} \quad (50)$$

Básnik by povedal, poďme spolu lietať: (inými slovami, napíšme si (47) a (48) a aplikujeme (50))

$$\begin{aligned} m \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \right) &= C/r^2 \\ -h^2 u^2 \frac{d^2 u}{d\theta^2} - h^2 u^3 &= \frac{C}{m} u^2 \\ \frac{d^2 u}{d\theta^2} + u &= -\frac{C}{mh^2} = D \end{aligned} \quad (51)$$

¹⁵⁹ Ako to bolo s tým zákonom zachovania momentu hybnosti?

Milá diferenciálna rovnica, síce nehomogénna, ale bez konštanty na pravej strane je to stále len rovnica pre harmonické kmity. Jedným z PV¹⁶⁰ riešení je $u = D$ a preto všeobecným riešením bude $u(\theta) = A \cos \theta + B \sin \theta + D$. Konštanty A a B určíme z počiatočných podmienok.

Nastavme si súradnicovú sústavu tak, že smer ku Rutherfordovmu delu bude $\theta = 0$, takže $r(0) = \infty$, teda $u(0) = 0$. Z toho po dosadení do rovnice pre $u(\theta)$ dostávame $A = -D$.

Takisto, po chvíľke zamyslenia $h = r^2 \dot{\theta} = wb$,¹⁶¹ kde sme ako b označili hľadanú vzdialenosť. Vidíme tiež, že $\dot{r}(0) = -w$. Z rovnice (49) máme $\frac{du}{d\theta} = -\dot{r}/h$, takže

$$\frac{du}{d\theta}(0) = -\frac{\dot{r}(0)}{h} = -\frac{-w}{wb} = \frac{1}{b}.$$

Z toho po dosadení do $\frac{du}{d\theta}(0)$ dostaneme $B = 1/b$.

Tak sa napokon dostávame k rovnici dráhy alfa častice:

$$u(\theta) = D(1 - \cos \theta) + \frac{\sin \theta}{b} \quad (52)$$

a hľadáme druhé riešenie $u(\theta) = 0$ (rôzne od $\theta = 0$)¹⁶²

$$\begin{aligned} 0 &= D(1 - \cos \theta) + \frac{\sin \theta}{b} \\ &= Db \left(1 - \cos^2 \frac{\theta}{2} + \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) + 2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \\ &= 2Db \sin \frac{\theta}{2} + 2 \cos \frac{\theta}{2}, \end{aligned}$$

teda

$$\operatorname{tg} \frac{\theta}{2} = -\frac{1}{Db}.$$

Ak toto je θ , pre ktoré $u \rightarrow 0$, teda $r \rightarrow \infty$, potom *odklon* od pôvodného smeru letu bude $\beta = \pi - \theta$, teda $\beta/2 = \pi/2 - \theta/2$ a preto $\operatorname{tg}(\beta/2) = \operatorname{cotg}(\theta/2)$. Takže

$$\operatorname{tg} \frac{\beta}{2} = -Db = \frac{Cb}{mh^2} = \frac{Cb}{mw^2b^2} = \frac{C}{mw^2b} \quad (53)$$

Už si len spomeňme, že C bola konštantna úmernosti v odpudivej sile. $|\mathbf{F}| = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Ze^2e}{r^2}$, preto $C = (Ze^2)/(2\pi\epsilon_0)$ (kde Z je atómové číslo zlata, t.j. 79) a teda konečne

$$\operatorname{tg} \frac{\beta}{2} = \frac{Ze^2}{2\pi\epsilon_0 mw^2b} \quad (54)$$

¹⁶⁰Pozriem – Vidím.

¹⁶¹ h sa zachováva a v každom čase je teda rovnaké ako na začiatku

¹⁶²V prvej úprave využívame vzťahy $\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x$ a $\sin(2x) = 2 \cos x \sin x$, v druhej že hľadáme riešenie, pre ktoré $\sin \theta \neq 0$.

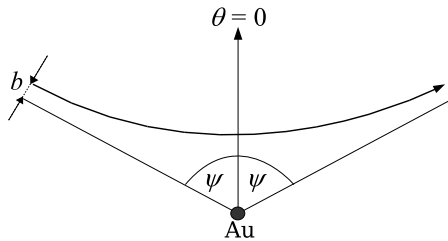
alebo

$$b = \frac{Ze^2}{2\pi\epsilon_0 mw^2} \cotg \frac{\beta}{2} \quad (55)$$

Tak. A máme výsledok. Týmto som nechcel nikomu nahovoriť, že na vypočítanie tohto príkladu potrebujeme takéto kladivo. S úctou si však všimnime, že podobne vieme odvodiť i tvar dráhy alfa častice, tvar trajektórií planét (a s trochou dodatočnej snahy vieme vtlačiť naspäť aj čas), a máme pevné základy pre hocičo radiálne. Príklad sa však nepýtal na všetky tieto detaily, preto sme si mohli dovoliť viaceré skratky a finty.

Osvietený nadhľad

Polárne súradnice sú pri takýchto aplikáciách celkom sympatické, pokrejmne pri nich ešte chvíľku. Nebudeme si však všetko matematicky budovať od začiatku, my predsa vieme, že platí zákon zachovania momentu hybnosti!¹⁶³ Takisto môžeme využiť i dobré vlastnosti z našej kartézskej sústavy. Ak si nastavíme sústavu tak, že alfa častica prichádza z uhla $\theta = \psi$, najbližšie bude keď $\theta = 0$ a (zo symetrie) odíde do nekonečna nechávajúc $\theta \rightarrow -\psi$, bude sa nám hneď lepšie počítať!



Pozrime sa teraz, ako sa mení x -ová zložka rýchlosti.

$$\begin{aligned} m \frac{d^2 x}{dt^2} &= \frac{C}{r^2} \cos \theta \\ \frac{d^2 x}{dt^2} &= \frac{C}{mr^2 \dot{\theta}} \dot{\theta} \cos \theta \end{aligned} \quad (56)$$

¹⁶³ $L = mrv_{\perp} = mr^2 \dot{\theta} = \text{konšt.}$

Aha, konštantný moment hybnosti v menovateli! ¹⁶⁴ Teraz môžeme spokojne integrovať podľa času:

$$\int \frac{d^2x}{dt^2} dt = \int \frac{C}{L} \dot{\theta} \cos \theta dt$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{C}{L} \sin \theta \quad (57)$$

Využili sme, že integračná konštanta je nula. Stačí si všimnúť situáciu $\theta = 0$.) Táto rovnica by nám bola pomerne nanič, ale majme na pamäti, o čo sa vlastne snažíme. My chceme zistiť len hraničný uhol ψ , resp. jeho vzťah s b . Pozrime sa na rovnicu (57), keď $\theta = \psi$. Keďže vieme, že moment hybnosti $L = mwb$, tak:

$$w \cos \psi = \frac{C}{mwb} \sin \psi$$

$$b = \frac{C}{mw^2} \operatorname{tg} \psi \quad (58)$$

Teraz si už len uvedomíme, že vlastne $\beta = \pi - 2\psi$ a teda $\operatorname{tg}(\psi) = \operatorname{cotg}(\beta/2)$, a keďže $C = (Ze^2)/(2\pi\epsilon_0)$:

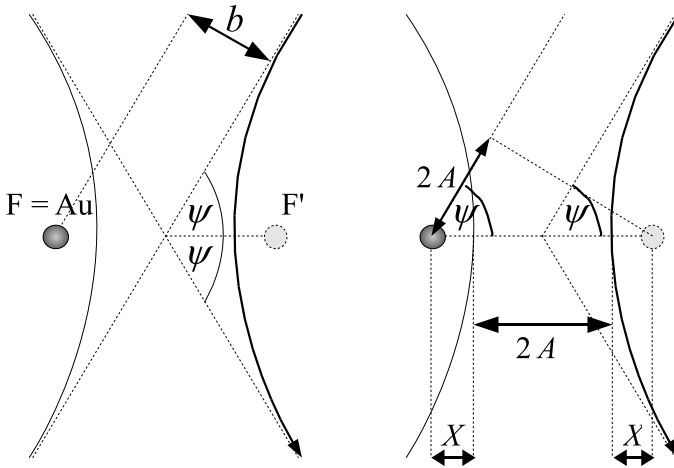
$$b = \frac{Ze^2}{2\pi\epsilon_0mw^2} \operatorname{cotg} \frac{\beta}{2}$$

No a čo ak nechceme robiť všelijakú mágiu s polárnymi súradnicami a tri vnorené finty? Máme ešte jednu možnosť – spomenieme si, že dráha takejto častice by mala byť kužeľosečka, a to konkrétne hyperbola, pohrabať sa trochu v jej geometrických vlastnostiach a potom sa utopiť v mori písmeniek, rovníc a vzorcov.

Geometria hyperboly

Vieme, že hyperbola je množina bodov, ktoré majú rovnaký rozdiel vzdialeností od dvoch pevných ohnísk, a jadro zlata bude jedným z nich. Z tohoto vieme odvodiť užitočné vlastnosti.

¹⁶⁴No, nie je to také prevratné zistenie, to sme predsa spravili naschvál, aby sa nám vyhubilo r^2 .



Napríklad, tieto body spĺňajú rovnicu $x^2/A^2 - y^2/B^2 = 1$ pre nejaké A a B . Vzdialenosť vrcholov musí byť $2A$.¹⁶⁵ Uhol, ktorý zvierajú asymptoty s osou x je $\psi = \arctg(B/A)$.¹⁶⁶ Vzdialenosť ohnisk od asymptot b .¹⁶⁷ Ďalej podľa pravého obrázku $2b/2A = \tg(\psi)$.¹⁶⁸ Porovnaním ostatných dvoch rovníc dostávame, že $B = b$.

Ak ešte označíme ako X vzdialenosť podľa pravého obrázka, dostávame z naznačeného trojuholníka Pytagorovou vetou $(A + X)^2 = A^2 + B^2$. Suma sumárum máme dve rovnice:

$$\frac{b}{A} = \tg \psi \quad (59)$$

$$(A + X)^2 = A^2 + b^2 \quad (60)$$

Stále však potrebujeme ešte jednu rovnicu, aby sme spojili tieto geometrické úvahy s fyzikou, čo sa tam naozaj deje.¹⁶⁹ Všimnime si, že bod najbližšieho priblíženia alfa častice ku jadru bude vo vrchole hyperboly, túto minimálnu vzdialenosť označme R . Máme teda $R = X + 2A$. Vzdialenosť R

¹⁶⁵Stačí hľadať riešenie hyperboly pre $y = 0$.

¹⁶⁶Rovnice asymptot dostaneme, ak v rovnici hyperboly nahradíme jednotku na pravej strane nulou.

¹⁶⁷Podľa zadania. Jadro prichádzajúce z nekonečna prichádza akoby po asymptote.

¹⁶⁸Keď sa alfa častica z „nekonečna“ približuje k jadru zlata, vidí obe ohniská prakticky v tom istom smere. Vieme, že rozdiel ich vzdialenosti od častice je $2A$. Preto je dĺžka $2A$ odvesnou naznačeného pravouhlého trojuholníka.

¹⁶⁹Navyše máme na dve rovnice akosi priveľa neznámych.

však vieme vyjadriť zo zákonov zachovania momentu hybnosti a energie!

$$mwb = mRv \quad (61)$$

$$\frac{1}{2}mw^2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{C}{R}. \quad (62)$$

Dosadíme v z (61) do (62):

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}mw^2 &= \frac{1}{2}mw^2 \frac{b^2}{R^2} + \frac{C}{R} \\ R^2mw^2 - 2CR - mw^2b^2 &= 0 \\ R &= \frac{2C + \sqrt{4C^2 + 4m^2w^4b^2}}{2mw^2} \\ 2A + X &= R = K + \sqrt{K^2 + b^2} \end{aligned} \quad (63)$$

kde $K = C/mw^2$. Roznásobením (60) a odčítaním A^2 dostávame

$$2AX + X^2 = b^2.$$

Všimnime si, že ľavá strana tejto rovnice je presne X -násobkom ľavej strany rovnice (63). Ich vzájomným vydelením dostávame

$$X = \frac{b^2}{K + \sqrt{K^2 + b^2}}.$$

Potom znova z rovnice (63) dostávame:

$$\begin{aligned} 2A &= K + \sqrt{K^2 + b^2} - X \\ &= \left(K + \sqrt{K^2 + b^2} \right) - \frac{b^2}{K + \sqrt{K^2 + b^2}} \\ &= \frac{(K + \sqrt{K^2 + b^2})^2 (K - \sqrt{K^2 + b^2}) - b^2 (K - \sqrt{K^2 + b^2})}{(K + \sqrt{K^2 + b^2}) (K - \sqrt{K^2 + b^2})} \\ &= \frac{-b^2 (K + \sqrt{K^2 + b^2}) - b^2 (K - \sqrt{K^2 + b^2})}{-b^2} \\ &= 2K. \end{aligned}$$

Toto dosadíme do (59), spomenieme si na $\operatorname{tg}(\psi) = \cotg(\beta/2)$ a potom už iba rozbaľujeme písmenká, dostávajúc sa k vytúženému výsledku.

$$\begin{aligned} b &= A \operatorname{tg} \psi \\ b &= K \cotg(\beta/2) \\ b &= \frac{C}{mw^2} \cotg(\beta/2) \\ b &= \frac{Ze^2}{2\pi\epsilon_0mw^2} \cotg \frac{\beta}{2}. \end{aligned}$$

FX E6 – PINKAČKA



Jano chce poraziť Jura v squashí a tak poctivo trénuje. Minule si napríklad zohnal loptičku s hmotnosťou m a škatuľu tvaru kvádra s hmotnosťou $M \gg m$. Potom kopol do škatule tak, aby sa šmýkala po zemi rýchlosťou v smerom kolmo na stenu, a do jej dráhy položil vo vzdialenosti D od steny nehybnú loptičku. Vypočítajte do akej najmenšej vzdialenosti od steny sa krabica dostane. Trenie škatule aj loptičky o zem považujte za nulové, všetky zrážky za dokonale pružné a predpokladajte, že krabica sa neotáča (celý pohyb loptičky sa deje na jednej priamke kolmej na stenu). Odpoveď stačí do prvého rádu v $\frac{m}{M}$.

Zdroj: BAUPC

✂ VZORÁK KUBUS ✂

Označme si rýchlosť krabice po n -tej zrážke s loptičkou ako V_n a rýchlosť loptičky po tejto zrážke ako v_n , pričom kladný smer rýchlosti volíme smerom ku stene. Medzi zrážkami sa rýchlosť krabice nemení, rýchlosť loptičky sa pružným odrazom od steny zmení na opačnú. Pred $(n+1)$ -vou zrážkou sa teda krabica a loptička pohybujú rýchlosťami V_n a $-v_n$. Logicky si teda označme rýchlosť krabice pred prvou zrážkou ako $V_0 = v$ a rýchlosť loptičky ako $v_0 = -0 = 0$, aby sme mohli s prvou zrážkou počítať symbolicky rovnako ako s ostatnými.

Pozrime sa na teraz na $(n+1)$ -vú zrážku. Je to jednoduchá pružná jednorozmerná zrážka dvoch telies so všeobecnými hmotnosťami M a m a všeobecnými rýchlosťami V_n a $-v_n$. Mohli by sme si napísať zákon zachovania hybnosti a zákon zachovania energie a vytriasť z nich rýchlosti V_{n+1} a v_{n+1} , my však použijeme malú fintu na zjednodušenie počítania. Pozrime sa na celú zrážku v sústave spojennej so spoločným ťažiskom krabice a loptičky. Pretože na krabicu a loptičku počas zrážky nepôsobia žiadne vonkajšie sily, ich ťažisko nebude zrýchľovať, čiže sústava spojená s ním musí byť inerciálna. Takže ZZH a ZZE v nej stále musia platiť. Navyše celková hybnosť je v tejto sústave nulová, čo by nám riešenie rovníc trochu zjednodušilo – ale najlepšie je na tom to, že my ich vôbec riešiť nemusíme. Vieme totiž, že rovnice pre ZZH a ZZE majú po zrážke jednoznačné riešenie,¹⁷⁰ stačí teda, keď jedno také riešenie tipneme. A to vôbec nie je také ťažké. Ak v takejto ťažiskovej sústave zmenia obe telesá rýchlosť na opačnú, celková hybnosť sa

¹⁷⁰Nie je to úplne pravda, riešenia pre rýchlosti loptičiek vyjdú dve. Jedno z nich budú pôvodné rýchlosti, druhé budú rýchlosti po zrážke.

tiež zmení na opačnú, ale keďže je nulová, tak sa vlastne vôbec nezmení. Kinetická energia sa tiež zrejme nezmení, keďže závisí iba od druhých mocnín rýchlostí. To znamená, že takýto jednoduchý odraz v ťažiskovej sústave spĺňa ZZH aj ZZE, a teda správne popisuje zrážku dvoch telies.

Predtým ako sa bezhlavo vrhneme do písania rovníc a vyjadrovania rýchlostí po zrážke, zabudnime na chvíľu na ťažiskové sústavy a poďme sa pozrieť na to, čo to vlastne potrebujeme. Chceli sme porátať vzdialenosť krabice od steny, keď k sebe budú najbližšie. Tento okamih zrejme nastane pri nejakej zrážke,¹⁷¹ pozrime sa teda na vzdialenosť D_n krabice od steny pri n -tej zrážke s loptičkou. Po predošlej, $(n-1)$ -vej, zrážke má krabica rýchlosť V_{n-1} a musí prejsť vzdialenosť $D_{n-1} - D_n$ ku miestu n -tej zrážky. Loptička má rýchlosť veľkosti v_{n-1} a musí prejsť vzdialenosť $D_{n-1} + D_n$, keďže sa medzitým ešte odrazí od steny. Obom to musí samozrejme trvať rovnaký čas, dostávame teda rovnicu

$$\frac{D_{n-1} - D_n}{V_{n-1}} = \frac{D_{n-1} + D_n}{v_{n-1}},$$

ktorej riešením je

$$D_n = D_{n-1} \frac{v_{n-1} - V_{n-1}}{v_{n-1} + V_{n-1}}.$$

Ak použijeme tento vzťah viackrát, dostávame

$$D_n = D_1 \left(\frac{v_1 - V_1}{v_1 + V_1} \right) \left(\frac{v_2 - V_2}{v_2 + V_2} \right) \cdots \left(\frac{v_{n-2} - V_{n-2}}{v_{n-2} + V_{n-2}} \right) \left(\frac{v_{n-1} - V_{n-1}}{v_{n-1} + V_{n-1}} \right).$$

A teraz pozor! Čo je to $v_1 + V_1$? Je to rýchlosť približovania sa loptičky ku krabici tesne pred druhou zrážkou, lebo krabica má po prvej zrážke rýchlosť V_1 smerom ku stene a loptička po prvej zrážke a odraze od steny rýchlosť v_1 smerom od steny. A čo je $v_2 - V_2$? No predsa rýchlosť vzdďľovania sa loptičky od krabice tesne po druhej zrážke. A čo je na tom také skvelé? No predsa to, že v ťažiskovej sústave krabica aj loptička zmenia rýchlosti na opačné, takže ich vzájomná rýchlosť sa tiež zmení na opačnú. Rýchlosť približovania sa pred zrážkou je rovnaká ako rýchlosť vzdďľovania sa po zrážke, čiže $v_1 + V_1 = v_2 - V_2$.

Podobnou úvahou pre n -tú zrážku dostaneme rovnosť $v_{n-1} + V_{n-1} = v_n - V_n$, pre ľubovoľné n . Teraz sa už len pozeraťme, ako sa zo susedných zlomkov v našej rovnici pre D_n vymlátia menovatele s čitateľmi, dostávajúc

$$D_n = D_1 \frac{v_1 - V_1}{v_{n-1} + V_{n-1}} = D \frac{v_0 + V_0}{v_n - V_n}.$$

¹⁷¹Inak sa krabica práve pohybuje ku stene alebo od steny, a v takom okamihu nemôže byť najbližšie. Alebo stojí, ale vtedy je od steny rovnako ďaleko ako pri najbližšej zrážke.

Dosadením počiatočných rýchlostí $V_0 = v$ a $v_0 = 0$ dostaneme

$$D_n = D \frac{v}{v_n - V_n}.$$

Intuitívne vidíme, že pri takejto pinkačke bude krabica pri zrážkach postupne spomaľovať a loptička zrýchľovať. Ak sú počiatočné podmienky správne nastavené, krabica pri jednej zo zrážok zastane a loptička bude niesť celú kinetickú energiu sústavy, čiže budeme mať $V_n = 0$ a $\frac{1}{2}mv_n^2 = \frac{1}{2}Mv^2$, odkiaľ $v_n = v\sqrt{M/m}$. Potom by sme dostali

$$D_n = D\sqrt{\frac{m}{M}},$$

a to by bola aj najbližšia vzdialenosť krabice od steny, keďže krabica by medzi n -tou a $n+1$ -vou zrážkou stála.

Ak krabica po žiadnej zo zrážok nezastane, nemusíme zúfať. Ak je loptička veľmi ľahká ($m \ll M$), pri každej zo zrážok odovzdá krabici len málo hybnosti a rýchlosť krabice po zrážke najbližšej ku stene (tj. tej, keď rýchlosť krabice zmení znamienko) bude len veľmi malá.

Môžeme urobiť aj nejaké konkrétnejšie odhady. Z energetických dôvodov bude rýchlosť loptičky ohraničená hodnotou $v\sqrt{M/m}$, pri každej zrážke sa teda jej hybnosť zmení najviac o $2v\sqrt{Mm}$. Najviac o toľko sa pri každej zrážke zmení aj hybnosť krabice, čo pri jej hmotnosti znamená zmenu rýchlosti o $2v\sqrt{m/M}$. Ak sa rýchlosť krabice mení nanajvýš takýmito malými krokmi, a ak je pred najbližšou (n -tou) zrážkou jej rýchlosť kladná a po nej záporná, musí nutne platiť $|V_n| \leq 2v\sqrt{m/M}$. Asymptoticky môžeme napísať $V_n = vO(\sqrt{m/M})$ keď $m \ll M$.¹⁷² Zo ZZE potom máme

$$\frac{1}{2}mv_n^2 + \frac{1}{2}MV_n^2 = \frac{1}{2}Mv^2,$$

čiže

$$v_n = \sqrt{\frac{M}{m}} \sqrt{v^2 - V_n^2} = v\sqrt{\frac{M}{m}} \sqrt{1 - O\left(\frac{m}{M}\right)} = v\sqrt{\frac{M}{m}} \left(1 + O\left(\frac{m}{M}\right)\right).$$

¹⁷²Na značenie asymptotických odhadov veľkosti funkcií sa používa O -notácia. V rôznych textoch sa používa i zneužíva veľmi voľne, jej presné definície si nájdite v literatúre alebo na internete. V tomto texte bude $O(f(x))$ znamenať „nejaká funkcia x , ktorá pre dostatočne malé x nepresahuje nejaký konštantný násobok $f(x)$ “. Menej formálne, napríklad pod $O(\frac{m}{M})$ si môžete predstaviť „dačo, čo je najviac rádovo $\frac{m}{M}$ “.

V našom vzťahu pre D_n to znamená

$$\begin{aligned} D_n &= D \frac{v}{v\sqrt{\frac{M}{m}} \left(1 + O\left(\frac{m}{M}\right)\right) - vO(\sqrt{m/M})} \\ &= D\sqrt{\frac{m}{M}} \frac{1}{1 + O\left(\frac{m}{M}\right) - O\left(\frac{m}{M}\right)} \\ &= D\sqrt{\frac{m}{M}} \left(1 + O\left(\frac{m}{M}\right)\right). \end{aligned}$$

Vidíme teda, že naša odpoveď $D\sqrt{m/M}$ je presná v dominantnom ráde, chyba je rádovo až $\frac{m}{M}$ -krát menšia ako skutočná odpoveď. Takýto presný odhad chyby som od vás v riešení nežiadal, sčasti aj preto, že v zadaní sa o „presnosti do prvého rádu“ hovorilo trochu zahmlene.

To by ale nebol vzorák FX, keby skončil takto naráchlo. Poďme si správanie loptičky spočítať trochu detailnejšie. Vráťme sa naspäť k počítaniu $(n+1)$ -vej zrážky a zapíšme rozprávky o ťažiskovej sústave poriadne do rovníc. Rýchlosť spoločného ťažiska loptičky a krabice je

$$u_T = \frac{MV_n - mv_n}{M + m},$$

rýchlosti krabice a loptičky v ťažiskovej sústave budú pred zrážkou

$$V' = V_n - u_T \quad \text{a} \quad v' = -v_n - u_T$$

a po zrážke len zmenia znamienko na

$$V'' = u_T - V_n \quad \text{a} \quad v'' = u_T + v_n.$$

Rýchlosti po zrážke v sústave spojenej so zemou budú teda

$$V_{n+1} = u_T + V'' = 2u_T - V_n \quad \text{a} \quad v_{n+1} = u_T + v'' = 2u_T + v_n.$$

Po dosadení za u_T dostávame

$$\begin{aligned} V_{n+1} &= \frac{M-m}{M+m} V_n - \frac{2m}{M+m} v_n, \\ v_{n+1} &= \frac{2M}{M+m} V_n + \frac{M-m}{M+m} v_n. \end{aligned}$$

(Všimnite si, že rovnice sú symetrické, tak, ako by sme mohli očakávať. Hoci to tak na prvý pohľad nevyzerá, vymenením M s m a V_n s $-v_n$ sa nič nezmení.)

Vyjadriť sme si teda V_{n+1} a v_{n+1} ako lineárnu kombináciu V_n a v_n . Takýto vzťah sa dá jednoducho a prehľadne zapísať pomocou vektorov a matíc:

$$\begin{pmatrix} V_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{M-m}{M+m} & -\frac{2m}{M+m} \\ \frac{2M}{M+m} & \frac{M-m}{M+m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_n \\ v_n \end{pmatrix}.$$

Čo je však na tomto zápise najlepšie, ľahko vieme napísať všeobecný vzťah pre rýchlosti V_n a v_n , a to konkrétne ako

$$\begin{pmatrix} V_n \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{M-m}{M+m} & -\frac{2m}{M+m} \\ \frac{2M}{M+m} & \frac{M-m}{M+m} \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} V_0 \\ v_0 \end{pmatrix}.$$

Ak si našu maticu a vektor označíme ako

$$A = \begin{pmatrix} \frac{M-m}{M+m} & -\frac{2m}{M+m} \\ \frac{2M}{M+m} & \frac{M-m}{M+m} \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} V_0 \\ v_0 \end{pmatrix},$$

stačí nám už len vypočítať $A^n \mathbf{v}$. Toto je celkom všeobecný problém z lineárnej algebry, a takmer vždy sa dá riešiť napríklad aj takto. Čo ak by sme našli taký milý vektor $\mathbf{x}$, že $A\mathbf{x}$ by bol len λ -násobkom $\mathbf{x}$ pre nejaké číslo λ ? Potom by sme celkom jednoducho dostali aj $A^n \mathbf{x} = \lambda^n \mathbf{x}$, pretože násobenie číslom (λ) môžeme vyňať spred násobenia maticou. Ak by sme takýchto milých vektorov $\mathbf{x}_i$ našli viac, hoc by mal aj každý svoju vlastnú λ_i , tak ich lineárne kombinácie by sme tiež vedeli jednoducho násobiť maticou A^n :

$$A^n(\sum_i a_i \mathbf{x}_i) = \sum_i A^n(a_i \mathbf{x}_i) = \sum_i a_i A^n(\mathbf{x}_i) = \sum_i a_i \lambda_i^n \mathbf{x}_i.$$

Stačí nám teda napísať naše $\mathbf{v}$ ako kombináciu takých $\mathbf{x}$ -iek a sme hotoví.

V našom konkrétnom prípade sa ukazuje, že to naozaj ide. Nájdime najprv nejaké vhodné $\mathbf{x}$ -ká. Ak si napíšeme (vektorovú) rovnosť $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$, dostávame dve rovnice o troch neznámych (dve komponenty $\mathbf{x}$ a číslo λ). Jedna možná dvojica riešení je napríklad

$$\mathbf{x}_{1,2} = \begin{pmatrix} 1 \\ \pm i \sqrt{\frac{M}{m}} \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad \lambda_{1,2} = \frac{M-m}{M+m} \mp \frac{2\sqrt{Mm}}{M+m} i.$$

Skúste si vyriešiť sami, alebo jednoducho len skontrolovať, že tieto $\mathbf{x}_i$ a λ_i naozaj spĺňajú $A\mathbf{x}_i = \lambda_i \mathbf{x}_i$. No a keďže

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} V_0 \\ v_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{v}{2}(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2),$$

dostávame

$$A^n \mathbf{v} = \frac{v}{2}(A^n \mathbf{x}_1 + A^n \mathbf{x}_2) = \frac{v}{2}(\lambda_1^n \mathbf{x}_1 + \lambda_2^n \mathbf{x}_2),$$

čiže

$$\begin{pmatrix} V_n \\ v_n \end{pmatrix} = \frac{v}{2} \begin{pmatrix} \lambda_1^n + \lambda_2^n \\ (\lambda_1^n - \lambda_2^n) i \sqrt{\frac{M}{m}} \end{pmatrix}$$

Aby sme vedeli krajšie vyjadriť mocniny λ_i , všimnime si, že platí rovnosť $(M-m)^2 + (2\sqrt{Mm})^2 = (M+m)^2$, takže ak si v pravouhlom trojuholníku

so stranami $(M - m)$, $2\sqrt{Mm}$ a $(M + m)$ označíme uhol pri odvesne dĺžky $(M - m)$ ako φ , potom

$$\lambda_{1,2} = \frac{M-m}{M+m} \mp \frac{2\sqrt{Mm}}{M+m}i = \cos \varphi \mp i \sin \varphi = e^{\mp i\varphi}.$$

Odtiaľ

$$\begin{aligned}\lambda_1^n + \lambda_2^n &= e^{-ni\varphi} + e^{ni\varphi} = 2 \cos(n\varphi) \\ \lambda_1^n - \lambda_2^n &= e^{-ni\varphi} - e^{ni\varphi} = -2i \sin(n\varphi),\end{aligned}$$

čo môžeme dosadiť do vzťahu pre rýchlosti V_n a v_n :

$$V_n = v \cos(n\varphi) \quad \text{a} \quad v_n = v \sin(n\varphi) \sqrt{\frac{M}{m}}.$$

Toto sú vzťahy pre rýchlosti krabice a loptičky po n -tej zrážke. V nečakane peknej a elegantnej forme. Pre riešenie pôvodnej úlohy nás zaujíma také n , keď je V_n prvýkrát záporné (resp. nekladné). To bude vtedy, keď bude argument kosínusu prvýkrát väčší než $\frac{\pi}{2}$, konkrétne pre

$$n = \left\lceil \frac{\pi}{2\varphi} \right\rceil \approx \frac{\pi}{2 \arcsin \frac{2\sqrt{Mm}}{M+m}} \approx \frac{\pi}{4} \sqrt{\frac{M}{m}}.$$

Z prvej časti vzoráku vieme, že vzdialenosť n -tého odrazu od steny bude $D_n = D \frac{v}{v_n - V_n}$. Vtedy sme odvodili, že je to približne $D\sqrt{m/M}$, teraz pre ňu máme po dosadení za V_n a v_n presný vzťah

$$D_n = \frac{D}{\sin(n\varphi) \sqrt{\frac{M}{m}} - \cos(n\varphi)},$$

kde $n = \lceil \frac{\pi}{2\varphi} \rceil$ a $\varphi = \arccos \frac{M-m}{M+m}$. Pre $m \ll M$ bude $\varphi \ll 1$, preto $n\varphi$ bude blízko $\pi/2$, čiže naozaj $D_n \approx D\sqrt{m/M}$.

Tento presný výsledok nie je ktovieako pekný a užitočný, ale postup, ktorým sme sa k nemu dostali, obsahuje veľa hodnotných myšlienok. Ak máte ešte chuť, skúste si nakresliť, ako sa menia rýchlosti V_n a v_n podľa vyššie uvedených vzťahov. Ak sa vám ťažko trávili všetky tie algebraické manipulácie s maticami a vektormi, skúste si všetky tie úvahy zopakovať s konkrétnymi objektami, ktoré dané matice a vektory reprezentujú. (Vektory len schovávajú dvojicu rýchlostí loptičiek, matica A je len operátor, ktorý vezme rýchlosti pred zrážkou a vyplúje rýchlosti po zrážke.) Napokon, ak sa vám to celé zdá nejaké podozrivé, tiež sa môžete zamyslieť nad tým, kde všade sa nám pokazia naše rovnice po tom, ako sa loptička od krabice odrazí poslednýkrát. (Všetky tieto problémy sme vo vzoráku zamlčali, lebo nás zaujímala len zrážka najbližšia ku stene, a dovedy sa to naozaj nepokazí.)

FX E7 – VIA FERRATA



Máme ocelové lano dĺžky $L = 20$ m, prierezu $S = 1$ cm², s medzou pevnosti $\sigma_t = 1$ GPa, hustotou $\rho = 8000$ kg.m⁻³ a modulom pružnosti $E = 220$ GPa. Má slúžiť na zaistenej ceste v horách (t.j. na via ferrate) pre odvážneho feratistu na prelez ponad roklinu. Aby mohol byť takýto most uznaný bezpečným, tak napätie v lanách nesmie prekročiť 10-tinu medze pevnosti lana, ak je feratista s hmotnosťou $m = 80$ kg v strede lana. Určte, akú najširšiu roklinu vieme pomocou tohoto lana prekonať za dodržania predpisov! Straty hmotnosti feratistu v dôsledku fyziologických prejavov strachu môžete zanedbať.

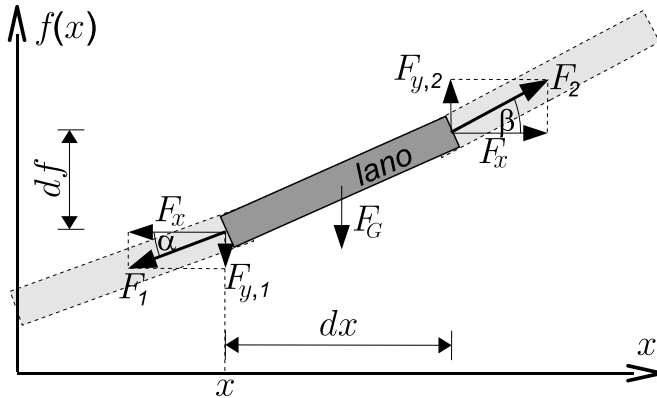
Zdroj: Úlohu vymyslel Jakub

🍃 VZORÁK JAKUB 🍃

Nasledovný text obsahuje dva prístupy k riešeniu tejto úlohy. Prvý sa dá nazvať analytický a druhý má pre FX nezvyčajnú experimentálnu povahu. V oboch prípadoch využijem označenie pre dĺžkovú hustotu lana $\lambda = S\rho = 0,8$ kg.m⁻¹, pre hmotnosť lana samotného $M = L\lambda = 16$ kg a označenie $F_{\max} = \frac{\sigma_t S}{10} = 10$ kN pre maximálne prípustné napätie v lane. Taktiež v oboch prístupoch budem v prvom priblížení považovať lano za nenatahovateľné, keďže relatívne natiahnutie pri maximálnej prípustnej záťaži je iba $\frac{\sigma_t}{10E} \approx 0,05$ %.

1. Analytické riešenie

Začnem odvodením rovnice pre ideálne nenatahovateľné, dokonale ohybné lano umiestnené v homogénnom tiažovom poli v statickom prípade. Zavediem si do problému súradnice x a y , pričom x bude vo vodorovnom smere a y bude vo zvislom smere. Výška lana nad konkrétnym miestom bude daná funkciou $f(x)$. Vyberiem si kúsok lana, ktorého priemet do vodorovného smeru je dx , viď obrázok.



Na tento kúsok pôsobia dokopy 3 sily, ktoré majú byť v statickej situácii v rovnováhe:

- tiažová sila o veľkosti $dF_G = \lambda g \sqrt{(dx)^2 + (df)^2} = \lambda g \sqrt{1 + f'^2(x)} dx$ pôsobí v zvislom smere nadol¹⁷³,
- ťahová sila lana zľava pôsobí na lano zvislou zložkou $F_{y,1}$ nadol a vodorovnou zložkou F_x doľava,
- ťahová sila lana sprava pôsobí na lano zvislou zložkou $F_{y,2}$ nahor a vodorovnou zložkou F_x doprava¹⁷⁴.

Keďže naše lano je dokonale ohybné, tak smer napätia v lane musí byť v každom mieste dotyčnicou k lanu samotnému. Vďaka tomu dostávame vzťahy

$$\frac{F_{y,1}}{F_x} = \tan \alpha = f'(x),$$

$$\frac{F_{y,2}}{F_x} = \tan \beta = f'(x + dx) = f'(x) + [f'(x)]' dx = f'(x) + f''(x) dx.$$

Keď teraz zapíšeme podmienku pre rovnováhu nášho vybraného kúska ohľadom zvislých zložiek pôsobiacich síl, tak dostaneme hľadanú rovnicu

$$\lambda g \sqrt{1 + f'^2(x)} dx = F_{y,2} - F_{y,1},$$

$$\frac{\lambda g}{F_x} \sqrt{1 + f'^2(x)} = f''(x) \quad . \quad (64)$$

¹⁷³Používame označenie pre deriváciu čiarkou, teda $f'(x) = \frac{df(x)}{dx}$.

¹⁷⁴Sledovaný kúsok lana má byť v rovnováhe, preto musia byť v rovnováhe aj vodorovné zložky pôsobiacich síl, preto sú obe vodorovné zložky napätia v lane rovnaké. To je aj dôvod, prečo je vodorovná zložka napätia rovnaká pozdĺž celého lana.

Táto rovnica je nelineárna diferenciálna rovnica prvého rádu pre neznámu funkciu $f'(x) \stackrel{\text{ozn.}}{=} \varphi(x)$. Môžeme ju riešiť separáciou, čiže oddelením členov závislých od x a od φ ,

$$\frac{\lambda g}{F_x} dx = \frac{d\varphi}{\sqrt{1 + \varphi^2}}$$

a následovnou integráciou. Ide o technikalitu. Ľahko sa však overí¹⁷⁵, že rovnica spĺňa riešenie $f(x) = A \cosh \frac{x-x_0}{B} + h_0$, ak platí $A = B = \frac{F_x}{\lambda g}$.¹⁷⁶ Máme teda riešenie

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{F_x}{\lambda g} \cosh \left[\frac{\lambda g}{F_x} (x - x_0) \right] + h_0, \\ f'(x) &= \sinh \left[\frac{\lambda g}{F_x} (x - x_0) \right] \quad \Rightarrow \quad \sqrt{1 + f'^2(x)} = \cosh \left[\frac{\lambda g}{F_x} (x - x_0) \right], \\ f''(x) &= \frac{\lambda g}{F_x} \cosh \left[\frac{\lambda g}{F_x} (x - x_0) \right]. \end{aligned}$$

Je na čase urobiť si náčrt situácie, aby sme mohli určiť okrajové podmienky pre naše všeobecné riešenie. Zrejme bude situácia symetrická ohľadom bodu v strede lana. Stačí nám preto nájsť riešenie pre vybranú polovicu lana¹⁷⁷. Zo symetrie je zrejmé, že aj zaťaženie bude symetrické a teda každá polovica lana „nesie“ polovicu feratistu.

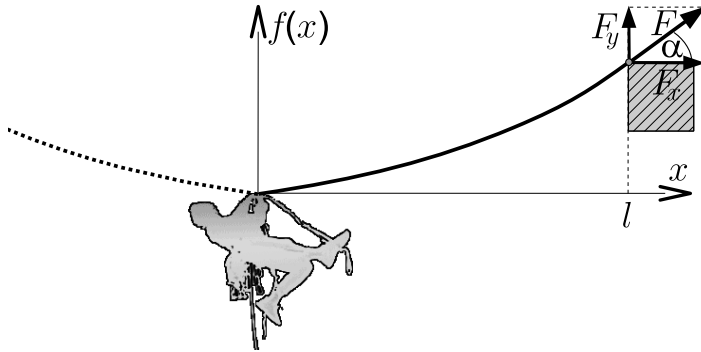
¹⁷⁵Napodiv, po jednom doriešení tejto úlohy sa ten výsledok ľahko aj zapamätá – tak to bolo aj v mojom prípade. Čiže, homogénne ideálne laná visia vždy ako nejaký posunutý a ponáňovaný cosh (hyperbolický kosínus).

¹⁷⁶Malá exkurzia do sveta hyperbolických a k nim inverzným funkciám

$$\begin{aligned} \cosh x &= \frac{e^x + e^{-x}}{2}, & \frac{d \cosh x}{dx} &= \sinh x, & \cosh^{-1} x &\stackrel{\text{ozn.}}{=} \operatorname{arccosh} x = \ln \left(x + \sqrt{x^2 - 1} \right), \\ \sinh x &= \frac{e^x - e^{-x}}{2}, & \frac{d \sinh x}{dx} &= \cosh x, & \sinh^{-1} x &\stackrel{\text{ozn.}}{=} \operatorname{arcsinh} x = \ln \left(x + \sqrt{x^2 + 1} \right), \\ \tanh x &= \frac{\sinh x}{\cosh x}, & \frac{d \tanh x}{dx} &= \frac{1}{\cosh^2 x}, & \tanh^{-1} x &\stackrel{\text{ozn.}}{=} \operatorname{arctanh} x = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} \end{aligned}$$

a pridám ešte univerzálnu identitu pre hyperbolické funkcie $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$.

¹⁷⁷Zvolili sme si pravú časť, viď obrázok.



Prvá podmienka na lano bude, aby v strede – v mieste zavesenia odvážlivca – bola zvislá zložka napätia vo vybranej časti rovná polovici tiaže visiaceho, čo zapíšeme

$$f'(0) = -\sinh \frac{\lambda g x_0}{F_x} = \frac{mg}{2F_x}. \quad (65)$$

Druhá podmienka na lano bude, aby zvislá zložka napätia v bode uchytenia bola rovná polovici celkovej zavesenej tiaže, teda

$$f'(l) = \sinh \frac{\lambda g(l - x_0)}{F_x} = \frac{(m + M)g}{2F_x}. \quad (66)$$

Ďalšiu podmienku nám diktuje zadanie, totiž, že maximálne napätie v lane nesmie prekročiť hodnotu $\frac{F_{\max}}{10}$. Keďže vodorovná zložka napätia v lane je vo všetkých miestach rovnaká a zvislá je v mieste x rovná polovici tiaži lana visiaceho v intervale $(-x, x)$ a feratistu¹⁷⁸, tak je očividné, že najvyššie zaťaženie bude v lane pri úchytoch do stien rokliny. Taktiež je intuitívne jasné, že vyššia hodnota F_x znamená väčšie našponovanie lana a tým menší previs lana voči úchytom a s tým aj väčšiu možnú šírku roklinu, ktorú preklenie. V zmysle určenia maximálnej prípustnej šírky rokliny teda budeme žiadať

$$F_x \sqrt{1 + f'^2(l)} = \frac{F_{\max}}{10}. \quad (67)$$

Využitím podmienky (66) vieme z (67) získať vzťah

$$F_x = \sqrt{\frac{F_{\max}^2}{10^2} - \frac{(m + M)^2 g^2}{4}}.$$

Použitím 65) vieme vypočítať¹⁷⁹

$$x_0 = -\frac{F_x}{\lambda g} \operatorname{arcsinh} \frac{mg}{2F_x}.$$

¹⁷⁸To sa dá vidieť z toho, keď človek zoberie lano v intervale $(-x, x)$ aj s feratistom, požaduje symetriu voči $x = 0$ a žiada statickú situáciu.

¹⁷⁹Vyjadrenie pomocou zadaných veličín nechám na D.Ú.

Nakoniec potom už vieme aj vyjadriť aj l

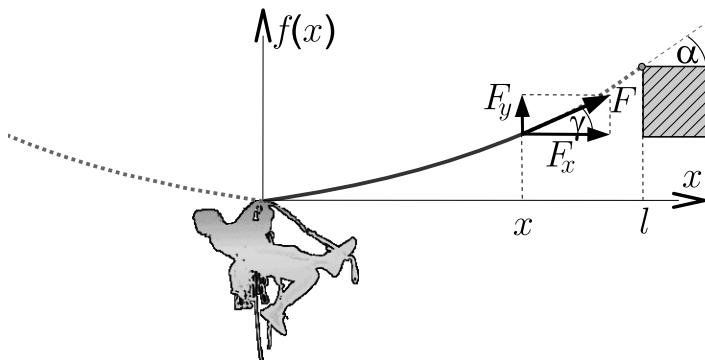
$$l = \frac{F_x}{\lambda g} \operatorname{arcsinh} \frac{(m+M)g}{2F_x} + x_0.$$

Pre hodnoty zo zadania dostávame $F_x \approx 9,9889 \text{ kN}$; $x_0 \approx -49,987 \text{ m}$; $l \approx 9,991 \text{ m}$. Teraz si môžeme všimnúť, že napätie v lane je prakticky po celej dĺžke zhruba $\frac{F_{\max}}{10} = 10 \text{ kN}$ a teda v druhom priblížení je lano dĺžky $L' = L(1 + \frac{\sigma_t}{10E}) \approx 20,009 \text{ m}$, potom má dĺžkovú hustotu $\lambda' = \frac{M}{L'} \approx 0,7996 \text{ kg.m}^{-1}$ a po dopočítaní vyjde maximálna šírka rokliny, ktorú to môže preklenúť $2l' \approx 19,990 \text{ m}$.

2. experimentálne riešenie

Hneď na úvod by som napísal, že toto riešenie nebude priamo experimentálne merať výsledok, lež pôjdeme na to trochu okľukou. Najmä by sme boli radi, keby sme celý experiment mohli nejako zmenšiť a urobiť pohodlne doma, a pokiaľ možno nie s oceľovým lanom požadovaného prierezu, lebo také sa bežne v domácnosti nevyskytujú. Riešenie bude založené na postupe zvanom *škálovanie*.

Začneme s priblížením nenatahovateľného lana. Premyslite si, že vodorovná zložka napätia v lane musí byť pozdĺž celého lana rovnaká!



Analyzujme sily pôsobiace na kus lana s visiacim ujom v intervale $(-x, x)$. Využijeme symetriu úlohy voči stredu lana a zapíšeme rovnicu, ktorá popisuje lano v statickej situácii a je veľmi intuitívna. Využijeme, že zvislé zložky síl pôsobiacich na lezcu a vybraný kus lana musia byť v rovnováhe

$$\begin{aligned} f'(x) &= \tan \gamma = \frac{F_y}{F_x} = \frac{\frac{m}{2} + \lambda d(x)}{F_x} g, \\ f'(x) &= \frac{\frac{m}{2} + \lambda d(x)}{F_x} g \quad \text{pre } \forall x \in [0, l], \end{aligned} \quad (68)$$

kde $d(x) = \int_0^x \sqrt{1 + f'^2(y)} dy$ je dĺžka lana v intervale $(0, x)$.

Táto rovnica je integrálna, lebo do nej vstupuje cez $d(x)$ integrál obsahujúci neznámu funkciu $f'(x)$. Rovnica (68) je ekvivalentná rovnici (64) s okrajovými podmienkami (65) a (66). Rozdiel je len v tom, že táto rovnica má jasnú interpretáciu, lebo je zapísaná pre predstaviteľne veľké teleso, kdežto rovnica (64) popisuje infinitenzimálny kúsok lana. Hrajme sa však, že sme čast' 1 nečítali¹⁸⁰ a riešenie nepoznáme.

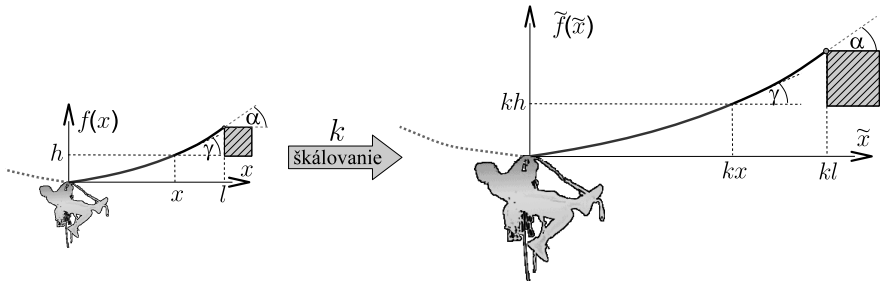
Túto rovnicu musí nutne spĺňať aj oceľové lano s feratistom preklenujúce roklinu pri maximálnom povolenom zaťažení. Maximálne zaťaženie je jednoznačne určené podmienkou pre uhol α pri úchyte

$$\sin \alpha = \frac{F_y(l)}{\sqrt{F_x^2(l) + F_y^2(l)}} = \frac{\frac{m+M}{2} g}{\frac{F_{\max}}{10}} = 5 \frac{m+M}{F_{\max}} g. \quad (69)$$

Označme riešenie rovnice (68) s podmienkou pre maximálne zaťaženie (69) ako $f(x)$.

Teraz využijeme ideu škálovania. Poďme zistiť, či nám samotná existencia riešenia $f(x)$ rovnice (68) s podmienkou (69) nezabezpečuje existenciu iných podobných riešení. Skúsme hľadať skutočne geometricky podobné riešenia – konkrétne k -krát zväčšené, t.j. riešenie v tvare

$$\begin{aligned} \tilde{f}(x) &= kf\left(\frac{x}{k}\right) \\ \tilde{f}'(x) &= f'\left(\frac{x}{k}\right) \\ \tilde{L} &= kL, \quad \tilde{l} = kl \\ \tilde{d}(x) &= kd\left(\frac{x}{k}\right) \end{aligned}$$



¹⁸⁰A ak sme ju náhodou čítali, tak sa tvárme, že sme ju buď nepochopili alebo sme ju razom stihli zabudnúť.

pre nejako preškálované parametre

$$\begin{aligned}\tilde{m} &= Am \\ \tilde{\lambda} &= B\lambda \\ \tilde{M} &= \tilde{\lambda}\tilde{L} = BkM \\ \tilde{g} &= g \\ \tilde{F}_x &= CF_x.\end{aligned}$$

Pri výbere $A = C$ a $C = Bk$ bude funkcia $\tilde{f}(x)$ spĺňať rovnicu (68), lebo platí

$$\begin{aligned}\tilde{f}'(x) &= f'\left(\frac{x}{k}\right) \stackrel{(68)}{=} \frac{mg}{2F_x} + \frac{\lambda g d\left(\frac{x}{k}\right)}{F_x} \\ &= \frac{\tilde{m}\tilde{g}}{2\tilde{F}_x} + \frac{\tilde{\lambda}\tilde{g}\tilde{d}(x)}{\tilde{F}_x} \quad \text{pre } \forall x \in [0, \tilde{l}].\end{aligned}$$

Preškálované riešenie isteže spĺňa podmienku (69), keďže ide o geometricky podobné riešenie. Škálovacia podmienka $C = Bk$ nám fixuje pomer medzi hmotnosťou visiaceho a hmotnosťou lana, je ekvivalentná podmienke $\frac{m}{M} = \frac{\tilde{m}}{\tilde{M}}$. Druhá škálovacia podmienka $A = C$ vypovedá o tom, že sily sa musia škálovať rovnako ako zavesené hmotnosti, čo je pri geometricky podobnom riešení evidentné.

Zoberme lanko nejakej dĺžky, povedzme nech to je $\tilde{L} = kL$.¹⁸¹ Hmotnosť lanka označím $\tilde{M} = BkM$.¹⁸² Ďalej si zoberiem závažie o hmotnosti $\tilde{m} = Bkm$ a dám ho do stredu lanka. Ďalej natiahnem lanko tak, aby úchyty boli v rovnakej výške a aby uhol, ktorý zvierajú dotýčnica lanka s horizontálnym smerom, bol rovný α podľa podmienky (69). Potom určite existuje riešenie nášho problému zo zadaniu, len príslušne (k -násobne) zmenšené.¹⁸³ Potom mi stačí zmerať vzdialenosť úchytovej predeliť ho k -čkom a mám odpoveď.

Tu by sa patrilo ešte overiť, že riešenie je jediné a teda sme našli to správne. Skúsím to aspoň fyzikálne odargumentovať. Pokúsme sa urobiť nasledovný myšlienkový experiment: budeme hľadať riešenie tvaru lana vychádzajúc od závažia v strede. Vieme, že situácia bude symetrická. Zvoľme si nejakú veľkosť horizontálneho napätia F_x v lane. Potom pridávajme na obe strany od závažia postupne maličký kusy lana. Ich smer už je veľkosťou F_x daný, lebo sila pôsobiaca na už uložené časti musí byť v smere pridaného kúska a veľkosť zvislej zložky napätia je fixovaná už uloženými objektami. Takto viem skonštruovať virtuálne celé riešenie tvaru lana. Je jasné, že pre

¹⁸¹Tým sme vybrali a zafixovali koeficient podobnosti k .

¹⁸²Týmto sme dourčili všetky voľné parametre škálovania.

¹⁸³Naše k bude číslo menšie ako 1, nenechajte sa zmiast.

väčšie F_x bude uhol, ktorý zvierá lano s horizontálou, v každom mieste vo vzdialenosti $d(x)$ pozdĺž lana od závažia menší ako pre menšie F_x . Preto bude dĺžka, ktorú lano prekenuje dlhšia ako pre menšie F_x . Toto nám jasne ukazuje, že šírka rokliny, ktorú lano preklenie rastie s rastúcim F_x , čo je aj intuitívne. Teda existuje práve jedno riešenie našej úlohy pre fixovaný uhol α , cez ktorý je fixované napätie F_x a teda aj šírka rokliny $2l$.

Realizácia: Zoberiem si špagát vhodnej dĺžky $\tilde{L}$ pre domáce meranie. Aby som nemusel vážiť ľahký špagát nepresnými kuchynskými váhami, tak si závažie urobím zo špagátu, ktorého dĺžka je $\frac{m}{M}\tilde{L}$ a tento prevesím cez stred. Potom si urobím dva úchyty v rovnakej výške tak, aby sa aspoň s jedným dalo hýbať k/od druhého. Ešte si zhotovím nejaký slušne veľký trojuholník s požadovaním uhlom $\alpha = \arcsin\left(5\frac{m+M}{F_{\max}}g\right)$ a snažím sa nastaviť vzdialenosť úchytovej tak, aby dotyčnica pri jednom z úchytovej bola práve α . Keď sa mi to podarí, tak si odmeriam vzdialenosť $\tilde{l}$ medzi úchytovej a dĺžku lanka $\tilde{L}$ a mám odpoveď na otázku zo zadania: $l = \frac{\tilde{L}}{\tilde{l}}\tilde{l}$. Teda, aspoň teoreticky. Toto meranie bude zaťažené chybou a tú by bolo vhodné odhadnúť. Pokus som nerealizoval.

FX E8 – JAMES BOND



James Bond sa chystá na ďalšiu akciu, kde sa musí vyšplhať na strechu vysokého domu. Zaoštaral si kotvu o hmotnosti $M = 2\text{ kg}$, ktorú dokáže vystreliť rýchlosťou $v_0 = 25\text{ m/s}$. Kúpil si tiež horolezecké lano, ktorého jeden meter váži $\lambda = 100\text{ g}$. Do akej najväčšej výšky dokáže vystreliť kotvu (s upevneným lanom, samozrejme)? Odpor vzduchu neuvažujte.

Zdroj: Úlohu vymyslel Kubus

✂ VZORÁK BZDUŠO & KUBUS ✂

Najprv si ukážeme ako sa táto úloha *nemá* riešiť. Označme hľadanú výšku ako H . Dáme do rovnosti kinetickú energiu na začiatku s potenciálnou na konci. Nezabúdajúc na potenciálnu energiu lana, dostávame

$$\frac{1}{2}Mv_0^2 = Mgh + \lambda Hg \frac{H}{2}.$$

Bezhlavo vyriešime kvadratickú rovnicu a po drobnej úprave hneď máme

$$H = \frac{M}{\lambda} \left(\sqrt{1 + \frac{\lambda v_0^2}{Mg}} - 1 \right) \approx 20,92\text{ m}.$$

Toto riešenie je zlé! Energia sa nezachováva. Predstavte si, že Bondovo lano je v skutočnosti reťaz zložená z malých obrúčk. Vždy keď sa kotva o kúsok posunie, pohybujúca reťaz naberie jednu stojacu obrúčku. *To je nepružná zrážka, pri ktorej sa náležite stráca energia!* V prípade skutočného lana nemáme obrúčky ale množstvo na zemi ležiacich nehybných kusov lana s hmotnosťami dm . K zrážkam teda dochádza *spojite*. A tak sa nám bude spojiť časť energie premieňať na teplo.

Vidíme, že kotvu nebrzdí len tiaž, ale aj namotávajúce sa lano. Aby sme sme videli, odkiaľ presne toto brzdenie pochádza, napíšme si pohybovú rovnicu. Druhý Newtonov zákon hovorí

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} \quad (70)$$

$$-mg = v \frac{dm}{dt} + m \frac{dv}{dt} \quad (71)$$

Zmenu hybnosti sme rozvinuli podľa pravidla pre deriváciu súčinu. Vidíme, že zmena hybnosti sa skladá jednak zo zrýchľovania (spomaľovania)

kotvy a už odvinutého lana (t.j. $m \frac{dv}{dt}$), ale tiež práve odvinutý kus lana zmenil svoju rýchlosť z nuly na v (člen $v \frac{dm}{dt}$). Keďže aktuálna hmotnosť kotvy a odvinutého lana je $m = M + \lambda x$ ¹⁸⁴, môžeme písať

$$\begin{aligned} -(M + \lambda x)g &= v \frac{d(M + \lambda x)}{dt} + (M + \lambda x) \frac{dv}{dt} \\ \text{alebo} \quad -(M + \lambda x)g &= \lambda \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + (M + \lambda x) \frac{d^2x}{dt^2} \end{aligned} \quad (72)$$

Áká to krásna diferenciálna rovnica! Túto rovnicu nevieme nijak jednoducho riešiť, my však máme konkrétny problém: $h(0) = 0$, $h'(0) = v_0$, a chceme zistiť najvyššiu výšku, do akej sa kotva počas pohybu dostane. Numericky môžeme zistiť aspoň približnú hodnotu výsledku. Vede k nej samozrejme veľa ciest (ručná kalkulácia, tabuľkový editor, vlastná simulácia), tu je jedna v programovacom jazyku C++:

```
double m, l, h, a, g, v, t, dt;
m = 2;
g = 9.81;
l = 0.1;
dt = 1e-4;
t = 0;
h = 0;
v = 25;

while (v > 0)
{
    a = -g - (l * v * v) / (m + l * h);
    t += dt;
    h += dt * v;
    v += dt * a;
}

printf("t=%lf: h=%lf\n", t, h);
```

Približný výsledok bez odporu vzduchu je 15,9 metra, plus nejaký ten meter a pol Bondovej výšky navyše, ak vystreľovadlo kuše drží v rukách. To je rýchle a šikovné riešenie úlohy. Otázkou zostáva, či sa dá riešiť aj pre všeobecné hodnoty zadaných veličín, t.j. či má úloha aj analytické riešenie. Ukazuje sa, že má. Cesta k nemu je však veľmi zložitá. Ďalšia časť vzoráku je teda celkom nepovinná, ale záujemci sa dozvedia nejaké tipy na riešenie

¹⁸⁴Výšku budeme trochu nezvykle označovať ako x , nulovú hodnotu má na úrovni Bondovej kuše.

podobného typu diferenciálnych rovníc.

Analytické riešenie

Prečo je naša diferenciálna rovnica zložitá?

→ Je druhého rádu, obsahuje aj premennú x a jej prvú a druhú deriváciu.

→ Je nelineárna. Prvá derivácia premennej x je umocnená na druhú.

Druhá z týchto skutočností často spôsobuje, že diferenciálna rovnica nemá explicitné riešenie v elementárnych funkciách. V tomto prípade však máme šťastie. Ukazuje sa že, v úlohách z mechaniky, v ktorých z nejakých príčin dochádza k podobným spojitým nepružným zrážkam, sa oplatí prejsť od hľadania funkcie $x(t)$ k hľadaniu $v^2(x)$. Špeciálne si všimnime, že:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d}{dt} \left(\frac{dx}{dt} \right) = \frac{dx}{dt} \frac{d}{dx} \left(\frac{dx}{dt} \right) = \frac{1}{2} \frac{d}{dx} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 = \frac{1}{2} \frac{dv^2}{dx} \quad (73)$$

Označme $v^2(x) = \beta(x)$ a pozrime sa, ako sa zmení naša rovnica, ak prejdeme od písmeniek x a t k β a x :¹⁸⁵

$$-(M + \lambda x)g = \lambda\beta + \frac{1}{2}(M + \lambda x) \frac{d\beta}{dx} \quad (74)$$

Úžasné! Zrazu máme lineárnu diferenciálnu rovnicu prvého rádu. S tým by sa už malo dať nejako pohnúť. Žiaľ, rovnica nie je separovateľná,¹⁸⁶ a treba nájsť nejakú fintu.

Pri riešení niektorých DR si všimneme, že riešenie bude nejaká exponenciála, alebo nejaká sínusoida. Dosadením do rovnice sme potom schopní veľmi rýchlo nájsť správne riešenie. Otázkou ostáva, či si aj v tomto prípade nevieme nejako tipnúť, ako by asi riešenie mohlo vyzerieť. Ani po uprenom pohľade nám však žiadny dobrý tip nenapadá.¹⁸⁷

Dobrý tip však môžeme získať, ak zanedbáme niektorý člen rovnice a vyriešime jednoduchšiu rovnicu. Člen s deriváciou zrejme vynechať nemôžeme, pretože by sme už neriešili DR. Ukazuje sa, že zanedbanie člena na ľavej strane rovnice je schodná cesta.¹⁸⁸ Aby sme našli vhodný tip, vyriešime diferenciálnu rovnicu

$$0 = \lambda\beta + \frac{1}{2}(M + \lambda x) \frac{d\beta}{dx}. \quad (75)$$

¹⁸⁵Písmeno x síce ostáva, ale treba si uvedomiť že už nie je hľadanou funkciou, ale jej argumentom.

¹⁸⁶Nedá sa upraviť na tvar $F(\beta)d\beta = G(x)dx$, ktorý sa dá priamo integrovať.

¹⁸⁷Komu áno, mal by sa nad sebou vážne zamyslieť a prihlásiť sa u najbližšieho psychiatra.

¹⁸⁸Tým sme vlastne vypli gravitáciu.

To je jednoduchá separovateľná rovnica

$$\begin{aligned}
 -\frac{1}{2} \frac{d\beta}{\lambda\beta} &= \frac{dx}{M + \lambda x} \\
 -\frac{1}{2\lambda} \int \frac{d\beta}{\beta} &= \frac{1}{\lambda} \int \frac{dx}{\frac{M}{\lambda} + x} \\
 -\frac{1}{2} \ln \beta &= \ln \left(\frac{M}{\lambda} + x \right) + C \\
 \beta &= \frac{1}{(M + \lambda x)^2} \lambda^2 e^{-2C} \\
 \beta(x) &= \frac{D}{(M + \lambda x)^2}, \tag{76}
 \end{aligned}$$

kde D je integračná konštanta, ktorú by sme určili z počiatočných podmienok. Náš tip na riešenie pôvodnej DR spočíva v povýšení D na funkciu $D(x)$, tzn. predpokladáme riešenie v tvare:

$$\beta(x) = \frac{D(x)}{(M + \lambda x)^2} \tag{77}$$

Tento náš tip dosadíme do diferenciálnej rovnice a pokúsime sa zistiť niečo o $D(x)$. Budeme pri tom potrebovať, že

$$\frac{d\beta}{dx} = \frac{1}{(M + \lambda x)^2} \frac{dD}{dx} - \frac{2\lambda D}{(M + \lambda x)^3}. \tag{78}$$

Dosadením do (74) dostávame:

$$\begin{aligned}
 -(M + \lambda x)g &= \frac{\lambda D}{(M + \lambda x)^2} + \frac{1}{2(M + \lambda x)} \frac{dD}{dx} - \frac{\lambda D}{(M + \lambda x)^2} \\
 -(M + \lambda x)g &= \frac{1}{2(M + \lambda x)} \frac{dD}{dx} \tag{79}
 \end{aligned}$$

Vzájomné vykrátenie dvoch členov naznačuje, že šlo o dobrý tip. Rovnako aj fakt, že táto rovnica je už separovateľná a $D(x)$ môžeme nájsť jednoduchým integrovaním. Zavedme substitúciu $z = x + \frac{M}{\lambda}$. Keďže $dx = dz$, hneď môžeme prepísať a upravovať ďalej:

$$\begin{aligned}
 -\lambda z g &= \frac{1}{2\lambda z} \frac{dD}{dz} \\
 -2\lambda^2 z^2 g dz &= dD \\
 D &= -\frac{2}{3} \lambda^2 g z^3 + C \\
 D &= -\frac{2g}{3\lambda} (M + \lambda x)^3 + C \tag{80}
 \end{aligned}$$

Tu je C naozaj konštantou a určíme ju z počiatočných podmienok. Než tak spravíme, napíšme konečné vyjadrenie $v(x)$:

$$\begin{aligned} v(x) &= \sqrt{\beta(x)} \\ &= \sqrt{\frac{D(x)}{(M + \lambda x)^2}} \\ &= \sqrt{-\frac{2g}{3\lambda}(M + \lambda x) + \frac{C}{(M + \lambda x)^2}}. \end{aligned} \quad (81)$$

Vieme, že na začiatku, keď $x = 0$ je výraz pod odmocninou rovný v_0^2 . Z toho dostávame, že

$$C = v_0^2 M^2 + \frac{2g}{3\lambda} M^3. \quad (82)$$

Tak dostávame konečné závislosť rýchlosti kotvy od výšky:

$$v = \sqrt{-\frac{2g}{3\lambda}(M + \lambda x) + \frac{\left(\frac{2g}{3\lambda}M^3 + v_0^2 M^2\right)}{(M + \lambda x)^2}}. \quad (83)$$

Vidíme, že keby nás zaujímala výška, v ktorej bude mať kotva nejakú rýchlosť, črtala by sa nám vo všeobecnosti kubická rovnica. My máme šťastie, pretože pre maximálnu výšku sa riešenie znova zjednoduší. Pre maximálnu výšku H musí platiť:

$$\begin{aligned} \frac{2g}{3\lambda}(M + \lambda H)^3 &= \frac{2g}{3\lambda}M^3 + v_0^2 M^2 \\ M + \lambda H &= \sqrt[3]{M^3 + \frac{3\lambda}{2g}M^2 v_0^2} \\ H &= \frac{M}{\lambda} \left(\sqrt[3]{1 + \frac{3\lambda v_0^2}{2Mg}} - 1 \right) \approx 15,89 \text{ m} \end{aligned} \quad (84)$$

Radostne môžeme skonštatovať, že simulácia i matematická analýza nám dali rovnaké výsledky.

POZNÁMKA 1: Po prečítaní tohoto vzoráku vám možno riešenie diferenciálnych rovníc pripomína alchýmiu. Tento postup v skutočnosti nebol šikovný *náhodou*, ale úplne cielene. Bohužiaľ, poriadne pochopenie všetkých myšlienok si vyžaduje pár semestrov matematickej analýzy a nie je možné ich vysvetliť v tak krátkom vzoráku.

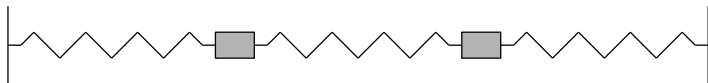
POZNÁMKA 2: Prechod od $x(t)$ k $\beta(x)$ nám zafungoval a zafungoval by v hocijakej inej úlohe o odvíjajúcom sa lane. Táto substitúcia šikovne zlikviduje druhú deriváciu, ako i druhú mocninu prvej derivácie v našej DR. Nebola by však použiteľná, ak by v DR vystupovala aj prvá derivácia v prvej mocnine, čo sa nestáva pri úlohách s retiazkou. Také DR sú zväčša neriešiteľné v elementárnych funkciách.

POZNÁMKA 3: Prešli sme si dlhý postup, pri ktorom sme poriešili nelineárnu DR druhého rádu a napokon *takmer* riešili kubickú rovnicu. Napriek všetkému sme získali explicitné riešenie. Otázkou je, či vôbec má zmysel hľadať analytické riešenie takouto zložitou cestou, ak stále uvažuje len veľmi idealizovaný prípad (dokonale ohybné lano, nulový odpor vzduchu). Numerické riešenie je nielen omnoho rýchlejšie, ale jednoduchšie obohatiteľné o odpor vzduchu, čo by analytický prístup definitívne zložilo na kolená. Síce sme sa teda naučili riešiť špeciálny typ diferenciálnych rovníc, avšak vidíme, že za málo muziky pýta priveľa peňazí.

FX E9 – PRUŽINKY



Samo našiel N rovnakých teliesok s hmotnosťou m , $N + 1$ pružiniek s tuhosťou k , a jednu priamku. Pružinky teda pospájal za seba na priamku a medzi každé dve nasledujúce upevnil jedno teliesko. Začiatok prvej pružinky a koniec poslednej pevne zafixoval, ale telieska nechal voľne pohybovať po danej priamke. Na obrázku vidíte náčrt situácie pre $N = 2$:



- (a) Určte periódu všetkých harmonických pohybov, ktoré môže sústava vykonávať, pre $N = 2$.
- (b) Určte periódu všetkých harmonických pohybov, ktoré môže sústava vykonávať, pre $N = 3$.
- (c) Kvalitatívne popíšte, čo sa bude diať pre väčšie hodnoty N .

Zdroj: Štandardné učebnice fyziky

✍ VZORÁK BZDUŠO ✍

Časť (a)

Pre začiatok si v pamäti oživme štandardnú konvenciu, teda že časové derivácie označujeme dvoma bodkami nad derivovanou veličinou, tj. napríklad $a = \ddot{x}$.

Ďalej sa zamyslíme, aké harmonické pohyby by mohli nastať. Keď trochu popremýšľame, hneď nám napadne jeden: Mohlo by to celé kmitať stredovo symetricky. Potom sa dá špekulovať ďalej. Ako ale postupovať, aby sme si boli istý, že máme všetky riešenia? Treba si dať pozor, pretože závažia môžu mať vo všeobecnosti rôzne amplitúdy a rôzny fázový posun.¹⁸⁹

Zvolíme teda inú taktiku: Použitím Newtonovho zákona vydolujeme pohybové rovnice a spravíme **ansatz**¹⁹⁰, tj. do pohybových rovníc dosadíme rovnice pre harmonický pohyb. To je taktika. Pre začiatok sa dohodnime na súradniciach. Tie sa počítajú vzhľadom na rovnovážnu polohu podľa obrázka:

¹⁸⁹ Alebo nie? Zamyslite sa!

¹⁹⁰ Z nemeckého *der Ansatz*.



Áké sily pôsobia na telesá, pri výchylkách x_1 , x_2 ? Ľahko sa presvedčíte, že¹⁹¹

$$\begin{aligned} F_1 &= -kx_1 + k(x_2 - x_1) \\ F_2 &= -kx_2 - k(x_2 - x_1), \end{aligned}$$

kde teda F_1 a F_2 je výsledná sila pôsobiaca na ľavé a pravé teleso. Po vydelení hmotnosti a využití substitúcie $k/m = \omega_0^2$ dostávame pohybové rovnice

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 &= -2\omega_0^2 x_1 + \omega_0^2 x_2 \\ \ddot{x}_2 &= -2\omega_0^2 x_2 + \omega_0^2 x_1. \end{aligned}$$

Ľaľa, rovnice spriahnutých oscilátorov. Už vieme, ako vyzerajú. :-)

Potiaľto žiaden problém (snáď tie dve bodky nepôsobia odstrašujúco). Teraz prvý netriviálny nápad, spomínaný ansatz. Vieme, že hľadaný harmonický pohyb musí byť popísateľný rovnicami

$$\begin{aligned} x_1(t) &= x_{1m} \cos \omega t \\ x_2(t) &= x_{2m} \cos(\omega t + \varphi), \end{aligned}$$

kde $\omega = 2\pi/T$ je uhlová frekvencia harmonického pohybu, x_{1m} a x_{2m} sú amplitúdy pohybov závaží a φ je fázový posun kmitov prvého telesa oproti druhému. Všimnite si, že pre druhé derivácie automaticky platí, že $\ddot{x}_i = -\omega^2 x_i$. Po dosadení za druhú deriváciu dostaneme

$$\begin{aligned} -\omega^2 x_1 &= -2\omega_0^2 x_1 + \omega_0^2 x_2 \\ -\omega^2 x_2 &= -2\omega_0^2 x_2 + \omega_0^2 x_1. \end{aligned}$$

Čo vlastne chceme spočítať? Períodu. To znamená, že uhlová frekvencia nám ako riešenie celkom stačí. Všimnime si, že z tejto sústavy vieme elegantne vylúčiť premenné x . Stačí si vyjadriť x_2 pomocou x_1 z druhej rovnice a dosadiť do prvej z nich. To znamená

$$x_2 = \frac{\omega_0^2}{2\omega_0^2 - \omega^2} x_1$$

¹⁹¹Také isté rovnice by nám vyšli dokonca i v prípade, keď sú v základnom stave pružiny natiahnuté. Premyslite si to!

a odtiaľ¹⁹²

$$-\omega^2 x_1 = -2\omega_0^2 x_1 + \frac{\omega_0^4}{2\omega_0^2 - \omega^2} x_1.$$

Rovnicu môžeme smelo vydeliť¹⁹³ premennou x_1 a po drobnej úprave dostávame bikvadratickú rovnicu

$$\omega^4 - 4\omega_0^2 \omega^2 + 3\omega_0^4 = 0.$$

Odtiaľ ľahko nahliadneme (keďže ω musí byť kladné), že existujú dve riešenia $\omega_1 = \omega_0$ a $\omega_2 = \sqrt{3}\omega_0$. Z toho vieme ľahko dopočítať aj periódy harmonických pohybov.

Pristavme sa však ešte na chvíľu pri probléme, ako z týchto uhlových frekvencií určiť, ako bude nájdený harmonický pohyb vlastne vyzeráť. Kľúčová je, ako inak, rovnica, ktorá dáva do súvisu x_1 a x_2 . Z nej vidno, že pre jednotlivé vypočítané ω bude pre výchylky v každom čase platiť $x_1 = x_2$ (pre $\omega = \omega_0$), resp. $x_1 = -x_2$ (pre $\omega = \sqrt{3}\omega_0$). A problém je vyriešený.

Skôr než sa touto metódou pustíme aj do druhej časti úlohy, zamyslime sa nad tým, čo by nám asi vyšlo. Budeme mať tri od času závislé výchylky x_1 , x_2 a x_3 a je zrejmé, že budeme mať o kus viac roboty s vylučovaním dvoch z nich z rovníc. Napokon by sme dostali rovnicu tretieho stupňa pre ω^2 a tú by sme už nejako vyriešili.

Časť (a) inak¹⁹⁴

Ukážeme si ešte iný postup, ktorý sa ukazuje byť užitočný najmä pre väčšie počty závaží. Ide o to, že pohybové rovnice môžeme prepísať (pomocou maticového násobenia) do tvaru

$$\begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\omega_0^2 & \omega_0^2 \\ \omega_0^2 & -2\omega_0^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Ten stĺpec x -ov nie je nič iné, než stĺpec čísel (závislých od času), tzn. možno ho interpretovať ako vektor (závislý od času), označme ho $\mathbf{x}$. Maticu, ktorou je vektor násobený môžeme označiť ako A . Pohyb závaží je potom popísaný rovnicou

$$\ddot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}.$$

¹⁹²Mimochodom, všimnite si, že z tohoto už vyplýva $\varphi = 0$ alebo π .

¹⁹³Tu by mohol nastať problém, pokiaľ sa x_1 práve rovná nule. Je to funkcia od času a v niektorých časoch bude aj nulová. Korektná argumentácia je, že súčin funkcie x_1 a nejakého konštantného výrazu je rovný nule. Keďže hľadáme riešenie, keď x_1 je v nejakých časoch rôzne od nuly, konštantný výraz za x_1 musí byť rovný nule.

¹⁹⁴Poriadnejšie vás tento postup naučí na matfyzu docent Fecko na teoretickej mechanike.

Toto sa až na formálne znamienko dosť podobá na rovnicu lineárneho harmonického oscilátora (LHO), v rovnici je však skrytých oveľa viacej čísel, než je napísaných.¹⁹⁵

Teraz aplikujeme ten istý ansatz, ako v prvom spôsobe. To znamená, že

$$\begin{aligned}\ddot{x}_1 &= -\omega^2 x_1 \\ \ddot{x}_2 &= -\omega^2 x_2,\end{aligned}$$

čo sa dá zapísať ekvivalentne maticovo

$$\begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{pmatrix} = -\omega^2 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = -\omega^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

alebo ešte inak

$$\ddot{\mathbf{x}} = -\omega^2 \mathbb{I}_2 \mathbf{x},$$

kde magický znak $\mathbb{I}_2$ je jednotková matica rozmeru 2×2 .

Pointa je, že pohybová rovnica má v skutočnosti tvar $\ddot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$, avšak nie pre každé $\mathbf{x}$ sa dá prepísať na práve odvodený tvar, tj. na tvar popisujúci harmonický pohyb. Nás ale zaujímajú práve tie, ktoré sa dajú! Pre tie musí platiť rovnosť

$$\begin{aligned}A\mathbf{x} &= -\omega^2 \mathbb{I}_2 \mathbf{x} \\ (A + \omega^2 \mathbb{I}_2) \mathbf{x} &= \mathbf{0}\end{aligned}$$

Slovami: Matica krát vektor je nulový vektor. Tu mi ako fakt musíte zobrať vedomosť, že *ak nenulový vektor násobený maticou dáva nulový vektor, tak determinant tejto matice musí byť nulový*.¹⁹⁶

¹⁹⁵Pokiaľ by ste teraz hádali riešenie rovnice ako $\mathbf{x} = \mathbf{x}_m \sin(-At)$, tak síce šikovne hľadáte analógiu, ale vo výsledku máte sínus matice. Sami uznáte, že to vyzerá akosi obskúrne. Analógia s LHO samozrejme existuje, ale budeme ju hľadať inak.

¹⁹⁶Tvrdenie má viacero dôkazov, všetky sa však opierajú o pojmy lineárnej algebry, ktoré sa väčšina z vás naučí až na vysokej škole. Napriek tomu jeden uvediem:

Definícia determinantu je hrôzostrašná, jeho vlastnosti sú ale pôvabné. Ak sa obmedzíme na štvorcové matice A, B , tak platí

$$\det(A \cdot B) = \det(B \cdot A) = \det A \det B$$

Inverzná matica A^{-1} k matici A je taká, že súčin $A \cdot A^{-1} = A^{-1}A = \mathbb{I}$. Na základe vlastností determinantu na súčine to ale znamená, že

$$\det A \det A^{-1} = \det \mathbb{I} = 1,$$

kde poslednú rovnosť, tj že determinant jednotkovej matice je 1, zatiaľ vezmime ako fakt. Determinant je číslo, ktoré vzniká ako vybraná kombinácia súčinov prvkov matice, teda pre reálne matice je to reálne číslo. Ak má však matica A determinant rovný nule, tak jej inverzná matica by mala mať nekonečne veľký determinant. Skutočnosť je taká, že inverzná matica k nej ani neexistuje, tj. neexistuje matica B taká, že $B \cdot A = \mathbb{I}$.

A stačí už len spočítať. Determinant matice budeme označovať zvislými zátvorkami. Dostávame ¹⁹⁷

$$\begin{aligned} 0 &= |A + \omega^2 \mathbb{I}_2| \\ &= \begin{vmatrix} -2\omega_0^2 + \omega^2 & \omega_0^2 \\ \omega_0^2 & -2\omega_0^2 + \omega^2 \end{vmatrix} \\ &= (\omega^2 - 2\omega_0^2)^2 - \omega_0^4. \end{aligned}$$

Túto rovnicu sme už raz riešili. Riešenia sú $\omega_1 = \omega_0$ a $\omega_2 = \sqrt{3}\omega_0$. To nám ako riešenie stačí. Keby sme chceli nájsť vektory výchyliek prislúchajúcich uhlovej frekvencii ω_i , tak stačí si rozpísať rovnicu $(A + \omega_i^2 \mathbb{I}_2) \mathbf{x} = \mathbf{0}$ do komponent a tak nájsť vzťah medzi x_1 a x_2 .¹⁹⁸

Časť (b)

Kto chce, môže si to znova prepočítať prvým uvedeným postupom. My ostatní si vyskúšame novonaučený postup. Výchyľky závaží si označíme úplne analogicky písmenami x_1, x_2, x_3 . Ľahko sa presvedčíme, že

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 &= -2\omega_0^2 x_1 + \omega_0^2 x_2 \\ \ddot{x}_2 &= +\omega_0^2 x_1 - 2\omega_0^2 x_2 + \omega_0^2 x_3 \\ \ddot{x}_3 &= +\omega_0^2 x_2 - 2\omega_0^2 x_3 \end{aligned}$$

Vezmime si rovnicu $(A + \omega^2 \mathbb{I}_2) \mathbf{x} = \mathbf{0}$ a násobme zľava obe rovnice maticou M inverznou k ozátvorkovanej matici. Tak v ľavej časti rovnice dostávame $\mathbb{I}_2 \mathbf{x} = \mathbf{x}$, v pravej $M \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}$, že $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. My ale chceme nenulové riešenia. Tie zrejme môžu existovať, len pokiaľ poslednú úpravu nemožno urobiť, teda pokiaľ neexistuje inverzná matica k M , teda pokiaľ jej determinant je nulový. $\square$

¹⁹⁷Pripomeňme si, že determinant matice v závislosti od jej rozmeru sa počíta ako

$$\begin{aligned} 2 \times 2 \quad \dots \quad & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \\ 3 \times 3 \quad \dots \quad & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = + a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ & - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12} \\ \vdots & \\ n \times n \quad \dots \quad & \det A = \sum_{j=1}^n a_{ij}(-1)^{i+j} \det M_{ij}, \end{aligned}$$

kde i označuje ľubovoľne zvolený riadok a kde v poslednom riadku M_{ij} označuje maticu rozmeru $(n-1) \times (n-1)$, ktorá vznikne z A vynechaním i -teho riadku a j -teho stĺpca. Posledné rekurentné určenie determinantu sa vo vyšších kruhoch nazýva *Laplaceov rozvoj determinantu* (podľa i -teho riadku).

¹⁹⁸Gratulujem! Práve ste sa naučili hľadať takzvané vlastné čísla a vlastné vektory matice A . Koho by to zaujímalo viac, môže hľadať na internete. Anglický preklad **eigenvalue** a **eigenvector** tiež pochádza z nemčiny.

To je v maticovom zápise ekvivalentné s

$$\begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\omega_0^2 & \omega_0^2 & 0 \\ \omega_0^2 & -2\omega_0^2 & \omega_0^2 \\ 0 & \omega_0^2 & -2\omega_0^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Označme maticu ako A , stĺpec výchylek ako $\mathbf{x}$. Hľadáme lineárne harmonické pohyby, ansatz nám preto dáva $\ddot{x}_i = -\omega^2 x_i$. Pri druhej derivácii teda treba každú zložku vektora $\mathbf{x}$ vynásobiť číslom $-\omega^2$ a preto $\ddot{\mathbf{x}} = -\omega^2 \mathbf{x}$. Ak toto všetko zhrnieme do jednej rovnice, dostávame

$$-\omega^2 \mathbf{x} = A\mathbf{x}.$$

Ľavú stranu rovnice možno prepísať na $-\omega^2 \mathbb{I}_3 \mathbf{x}$. Popresúvaním členov rovnice dostávam

$$(A + \omega^2 \mathbb{I}_3) \mathbf{x} = 0.$$

Povedali sme si, že nenulové riešenia $\mathbf{x}$ tejto rovnice existujú len pokiaľ je determinant matice, ktorou sa $\mathbf{x}$ násobí, nulový. Teda

$$\det(A + \omega^2 \mathbb{I}_3) = 0.$$

Teraz si ukážeme, ako možno použiť pod čiarou spomínaný *Laplaceov rozvoj determinantu*. Pre matice 3×3 a pri výbere¹⁹⁹ $i = 1$ dáva napísaná rovnica vzťah

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix},$$

pričom počítať determinant matice 2×2 nie je žiadna veľká veda. Počítanie sa ešte značne zjednoduší vďaka niektorým nulám v matici. Po nevelkom trápení dostaneme z podmienky nulového determinantu rovnicu

$$(\omega^2 - 2\omega_0^2)^3 = 2\omega_0^4 (\omega^2 - 2\omega_0^2).$$

Riešenia nájdeme rýchlo. Prvé nastáva, ak sa zátvorky vľavo i vpravo rovnajú nule. Ďalšie dve riešenia dostaneme vydelením rovnice touto zátvorkou a odmocnením. To znamená:

$$\begin{aligned} \omega_1^2 &= 2\omega_0^2 \\ \omega_2^2 &= (2 + \sqrt{2}) \omega_0^2 \\ \omega_3^2 &= (2 - \sqrt{2}) \omega_0^2 \end{aligned}$$

¹⁹⁹Tzn., že rozvoj robíme podľa prvého riadku. Možno si, samozrejme, vybrať hociktorý riadok a výsledok bude ten istý.

Períodu jednotlivých harmonických pohybov dorátame jednoducho ako $T_i = 2\pi/\omega_i$. Ukážeme si ešte, ako vyzerajú nájdené pohyby. Začneme s ω_1 . Má platiť rovnica $(A + \omega_1^2 \mathbb{I}_3) \mathbf{x} = \mathbf{0}$. Tak dostávame (po vydelení oboch strán) rovnice ω_0^2 :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

čo po rozpísaní do komponent vedie na rovnice

$$\begin{aligned} x_2 &= 0 \\ x_1 + x_3 &= 0 \\ x_2 &= 0 \end{aligned}$$

Z toho, že jedna rovnica sa nám tam zopakovala dvakrát, si netreba robiť ťažkú hlavu. Pekne z rovníc vidíme, že stredné závažie stojí a ľavé s pravým kmitajú stredovo symetricky. Vektor výchyliek možno preto zapísať ako

$$\mathbf{x} = x_m (1, 0, -1),$$

kde x_m je zvolená amplitúda.

Ďalej pre ω_2 . Tým istým spôsobom prideme k

$$\begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1 & 0 \\ 1 & \sqrt{2} & 1 \\ 0 & 1 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

To sa dá znova rozpísať do komponent a riešiť ako sústavu troch rovníc o troch neznámych.²⁰⁰ Vyjde, že vektor výchyliek je (zapísané ako riadok)

$$\mathbf{x} = x_m (1, -\sqrt{2}, 1).$$

Napokon, čo to robí pre ω_3 : Úplne analogicky prideme k rovnici

$$\begin{pmatrix} -\sqrt{2} & 1 & 0 \\ 1 & -\sqrt{2} & 1 \\ 0 & 1 & -\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

²⁰⁰Komu niečo vraví *Gaussova eliminačná metóda*, stačí riešiť sústavu s rozšírenou maticou $(M|\mathbf{0})$, tzn. v tomto prípade

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \sqrt{2} & 1 & 0 & 0 \\ 1 & \sqrt{2} & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \sqrt{2} & 0 \end{array} \right).$$

čo vedie na výchylky

$$\mathbf{x} = x_m (1, \sqrt{2}, 1).$$

Časť (c)

Ak sa obzrieme na doterajšie riešenie, napadne nám, že pre veľké N by malo existovať N rôznych harmonických pohybov (tzv. *módov*). Skutočne je to tak, dokazovať to však nebudeme.²⁰¹ Môže sa stať, že niekoľko rôznych módov bude mať rovnakú uhlovú frekvenciu. Ešte by som však rád poukázal na dve zaujímavosti. Tak skúsme započítať všeobecné riešenie.

Ak začneme hľadať pohybové rovnice, zistíme, že zrýchlenie nejakého konkrétného závažia v danom momente závisí len od jeho okamžitej polohy a od okamžitej polohy jeho susedov (len pružiny medzi nimi naň pôsobia nejakou silou). Lahko sa presvedčíme, že výsledné pohybové rovnice možno prepísať do tvaru:

$$\begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_3 \\ \vdots \\ \ddot{x}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\omega_0^2 & \omega_0^2 & 0 & \dots & 0 \\ \omega_0^2 & -2\omega_0^2 & \omega_0^2 & \ddots & \vdots \\ 0 & \omega_0^2 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & -2\omega_0^2 & \omega_0^2 \\ 0 & \dots & 0 & \omega_0^2 & -2\omega_0^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Maticu označme ako A_n . Ak sa pustíme do hľadania lineárnych harmonických pohybov (vlastných čísel matice!), budeme riešiť rovnicu $\det(A_n + \omega^2 \mathbb{I}_n) = 0$. Označme ešte $A_n + \omega^2 \mathbb{I}_n = B_n$.

Prvá zaujímavosť je toto: Ak si spravíme Laplaceov rozvoj determinantu podľa prvého riadku, dostaneme len dva členy (pretože v prvom riadku sú len dva nenulové členy). Avšak čo dostaneme, keď v B_n škrtneť prvý riadok a prvý stĺpec? Dostaneme B_{n-1} . Začína to vyzeráť fajn.

Ďalší nenulový člen je v druhom stĺpci, pri výpočte člena pri ňom treba v B_n škrtnúť prvý riadok a druhý stĺpec. To už nie je taká pekná matica, ale ak si všimneme, že v jej prvom stĺpci je len jeden nenulový prvok, tak môžeme urobiť rozvoj aj tohoto determinantu podľa prvého stĺpca. A čuduj sa svete, zrazu tam vyjde matica B_{n-2} . Skúste si to napísať na papieri. Malo by vám vyjsť, že

$$\det B_n = (\omega^2 - 2\omega_0^2) \det B_{n-1} - \omega_0^4 \det B_{n-2}.$$

²⁰¹Bolo by potrebné sa odvolávať na *vetu o hlavných osiach*, ktorú je dosť obskúrne vedieť už na strednej škole.

To znamená asi toľko, že pokiaľ mám vyriešený problém pre $N = n - 2$ a $N = n - 1$, ľahko ho vyriešim aj pre $N = n$. Skúste si teraz šikovne odvodiť, že uhlové frekvencie pre $N = 4$ sú

$$\omega_{1,2,3,4}^2 = \left(2 \pm \sqrt{\frac{1}{2} (3 \pm \sqrt{5})} \right) \omega_0^2,$$

čo sa mimochodom dá šikovne upraviť na

$$\begin{aligned} \omega_{1,2}^2 &= \frac{1}{2} (3 \pm \sqrt{5}) \\ \omega_{3,4}^2 &= \frac{1}{2} (5 \pm \sqrt{5}). \end{aligned}$$

V upravenom tvare sa však nedá dobre pozorovať skutočnosť,²⁰² že ak nejaké ω_x^2 je riešením problému, tak aj $4\omega_0^2 - \omega_x^2$ je jeho riešením (tj. že riešenia sú symetrické okolo $2\omega_0^2$). To nie je náhoda a môžete si to dokázať ako cvičenie z algebry. Treba vyjsť z rovnice $\det(A_n + \omega_x^2 \mathbb{I}_n) = 0$. Potom vezmeme ten istý výraz kde zameníme $\omega_x^2 \rightarrow (4\omega_0^2 - \omega_x^2)$. Po pár úpravách dostaneme, že potom aj tento výraz má nulový determinant, a teda že aj $4\omega_0^2 - \omega_x^2$ je naozaj riešením problému.

Ďalšou zaujímavosťou môže byť, čo robí tento systém pre $N \rightarrow \infty$. Vtedy má lepší zmysel skúmať počet dN módov prislúchajúcich na interval $(\omega; \omega + d\omega)$, teda akúsi *hustotu módov* $g(\omega) = dN/d\omega$. To čo by sme takto získali by boli predpovede klasickej fyziky o správaní sa reálneho *jednorozmerného* kryštálu.²⁰³

Ak sa niekedy budete zaoberať tuhými látkami, budete schopní si odvodiť, že v zadanej limite platí výsledok:

$$g(\omega) = \begin{cases} \frac{N}{\pi\omega_0 \sqrt{1 - \left(\frac{\omega}{2\omega_0}\right)^2}} & \omega \in (0, 2\omega_0) \\ 0 & \omega \notin (0, 2\omega_0) \end{cases}$$

Ako sa dopracovať k tomuto výsledku, o tom už naozaj niekedy inokedy a niekde inde. Mimochodom, všimnite si, že $\int g(\omega) d\omega = N$, tj. že celkový počet módov sa aj v limite rovná počtu závaží.

²⁰²Skutočnosť, ktorú sme si mali všimnúť aj pre $N = 2$ a $N = 3$.

²⁰³A dostali by sme len do určitej miery správny výsledok, pretože svet sa riadi zákonmi kvantovej fyziky. Pre "atómy na pružinkách", ktoré sú dosť malé, má kvantovanosť výrazný vplyv.

F Thermodynamika

Software is like entropy. It is difficult to grasp, weighs nothing, and obeys the second law of thermodynamics; i.e. it always increases.

NORMAN RALPH AUGUSTINE

FX F1 – PUDING



Lenka navarila dva hrnce pudingu: jeden vanilkový a jeden čokoládový. Vanilkový puding má tepelnú kapacitu C_1 (nie mernú, t.j. už v $J.K^{-1}$) a teplotu T_1 , čokoládový má kapacitu C_2 a teplotu T_2 . Koľko najviac energie vo forme makroskopickej práce z nich vie vyťažiť? (Puding pri tom nezje. Počítajte rýchlo, kým nevychladne!)

Zdroj: Úlohu vymyslel Bzdušo

 VZORÁK JAKUB 

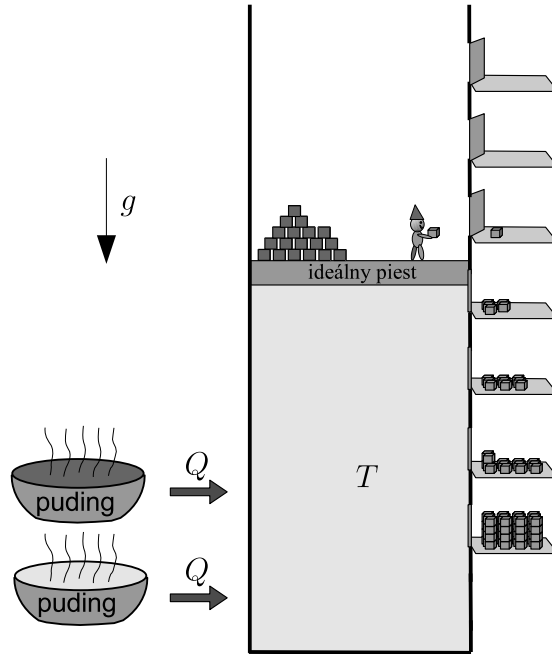
Ahojte, ukážeme si dve riešenia. To prvé bude správne, jednoduché a účinné - avšak nepraktické. To druhé bude správne, komplikovanejšie, menej účinné - no o mnoho praktickejšie. Pre jednoduchosť (avšak bez ujmy na všeobecnosti) budeme predpokladať, že čokoládový puding nemá vyššiu teplotu ako vanilkový ($T_1 \geq T_2$).

Riešenie 1.

Zoberme si na pomoc ideálny plyn s N molekulami a teplotou $T < T_2$. Tento plyn zavrime do izolovanej rúry uzatvorenej ideálnym pohyblivým piestom²⁰⁴. Dáme ho do tepelného kontaktu s našimi pudिंगami, avšak tak, aby teplo mohlo prestupovať na chladnejší pracovný plyn iba pomaly, presnejšie povedané tak, aby procesy boli kvázistatické²⁰⁵. Ďalej pomocou značkovej elektroniky budem kontrolovať pohyb piestu tak, aby sa teplota plynu nemenila. Jedno z možných využití je aplikácia ako výťahu.

²⁰⁴Ideálny pohyblivý piest sa pohybuje bez trenia a nemá žiadnu hmotnosť. Ako sa obvykle pri kvalitnom tovare stáva, vo väčšine obchodných reťazcov je tento artikel už dávno vypredaný.

²⁰⁵Kvázistatické procesy sú také, pri ktorých sa zúčastnené telesá nachádzajú stále v rovnováhe. To sa dá zabezpečiť pomalosťou zmien vzhľadom na relaxačnú dobu - dobu potrebnú na ustanovenie rovnováhy. Špeciálne potom pre ideálny plyn pri takomto deji platí stavová rovnica v ľubovoľnom okamihu.



V takomto usporiadaní zjavne plynu dodám celkové teplo $Q = C_1(T_1 - T) + C_2(T_2 - T)$ a toto všetko som očividne²⁰⁶ využil na vyzdvihnutie kvádkov²⁰⁷ v tiažovom poli.

Čím nižšia bude teplota pracovného plynu, tým viac práce výťah vykoná. Limitne pre $T \rightarrow 0$ viem ochladením pudingov vykonať mechanickú prácu o veľkosti $W = C_1T_1 + C_2T_2$.²⁰⁸ Nepraktičnosť tohoto výťahu je v tom, že pracuje neperiodicky – čiže ho po použití nie je hneď možné znovupoužiť.

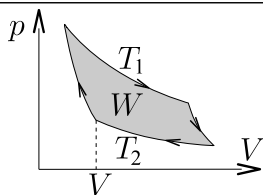
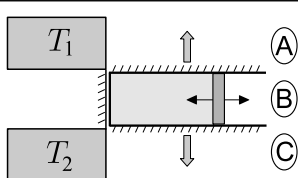
Riešenie 2.

Tentoraz sa obmedzím na periodicky pracujúci stroj. Pomôžem si Carnotovým strojom. Carnotov stroj je cyklicky pracujúci stroj.

²⁰⁶Trpaslík *Tlačič* dbá o to, aby dej plynu bol izotermický. V súlade s tým vyhadzuje na jednotlivých poschodiach kvádky, aby bol tlak v plyne pod piestom vždy $p = \frac{NkT}{V}$. Pri izotermickom deji sa vnútorná energia plynu nemení, takže všetko prijaté teplo sa využije na konanie mechanickej práce.

²⁰⁷Ťažisko plynu stúpa tiež. To však nevaďí, lebo zdvíhanie plynu je mechanická práca. Ak sa nám to napriek tomu nepáči, tak sa to dá ošetriť napríklad tak, že piest dáme do vodorovnej polohy a pomocou domyselného nehmotného systému lán a kladiek budeme zdvíhať plošinu s trpaslíkom.

²⁰⁸V skutočnosti to tak dobre nepôjde, lebo pri nízkych teplotách sa tepelná kapacita každého telesa blíži k nule, $\lim_{T \rightarrow 0} C = 0$, čo je dôsledok 3. vety termodynamickej. Platí to aj pre model ideálneho plynu, u ktorého je známe, že tepelná kapacita je konštantná. Pri nízkych teplotách treba totiž použiť model ideálneho *kvantového* plynu.

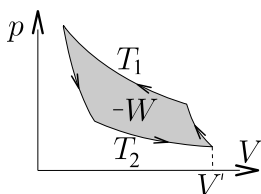


Ideálne pracuje s ideálnym plynom, ktorého pracovná schéma pozostáva zo štyroch kvázistatických fáz:

1. Plyn v polohe A pri teplote T_1 rozpínam. Plyn prijme celkové teplo Q_1 .
2. Piest presuniem do polohy B a adiabaticky (tepelne izolovane) ho rozpínam až kým nenadobudne teplotu T_2 .
3. Piest presuniem do polohy C a pri teplote T_2 ho stláčam až po objem V . Plyn pritom odovzdá celkové teplo Q_2 .
4. Piest presuniem do polohy B a adiabaticky ho stláčam až kým nenadobudne teplotu T_1 . Potom ho presuniem do polohy A.

Objem V je stanovený tak, aby bol cyklus plynu uzavretý, t.j. tak, aby po dokončení cyklu bol plyn v rovnakom stave ako na začiatku. Nie je ťažké ukázať, že účinnosť takéhoto stroja je $\eta \stackrel{\text{def}}{=} \frac{W}{Q_1} = 1 - \frac{T_2}{T_1} = 1 - \frac{Q_2}{Q_1}$.²⁰⁹ Teda ak prijme teplo Q , tak vykoná prácu $W = \eta Q$ a chladiču dodá teplo $Q' = \frac{T_2}{T_1} Q$.

Carnotov stroj však môže pracovať aj pospiatky, v obrátenom režime. Funguje to vďaka tomu, že každú fázu tvorí kvázistatický dej, ktorý môže bežať oboma smermi, podľa toho na ktorú stranu prikážeme trpaslíkovi *Tlačičovi* posúvať (pomaličky) piest. V tomto usporiadaní sa Carnotovmu stroju zvykne hovoriť aj Carnotova chladnička. Nasleduje popis práce tohto stroja:



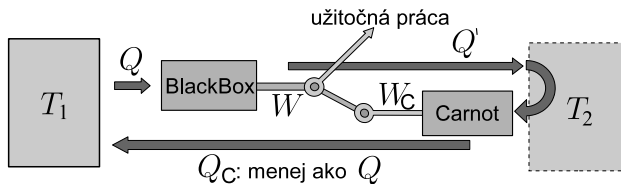
1. Plyn v polohe A pri teplote T_1 stláčam. Plyn odovzdá celkové teplo Q_1 .

²⁰⁹ Ak to čitateľ ešte nikdy nepočítal, tak je najvyšší čas!

2. Piest presuniem do polohy B a adiabaticky (tepelné izolovane) ho rozpínam až kým nenadobudne teplotu T_2 .
3. Piest presuniem do polohy C a pri teplote T_2 ho rozpínam až po objem V' . Plyn pritom prijme celkové teplo Q_2 .
4. Piest presuniem do polohy B a adiabaticky ho rozpínam až kým nenadobudne teplotu T_1 . Potom ho presuniem do polohy A.

Objem V' opäť stanovený tak, aby bol cyklus plynu uzavretý. V tomto usporiadaní stroj poháňame. Ak teplo, ktoré stroj odoberie chladnejšiemu telesu je Q , tak počas jedného cyklu musíme na ňom vykonať mechanickú prácu o veľkosti $W = (\frac{T_2}{T_1} - 1)Q$. Teplejšie teleso prijme teplo $Q' = \frac{T_1}{T_2}Q$. Na tomto princípe fungujú okrem chladiacich zariadení aj tzv. tepelné pumpy, ktoré teplom Q' vykurejú budovy.

Skutočne dôležitý je však poznatok, že účinnosť ľubovoľného cyklicky pracujúceho stroja nie je vyššia ako účinnosť Carnotovho stroja. Totiž, pripustíme existenciu cyklicky pracujúceho tepelného stroja, ktorý pracuje pri teplotách T_1 a T_2 a má účinnosť η vyššiu ako Carnotov stroj. Budem ho volať BlackBox na znak toho, že pre mňa môže predstavovať čiernu skrinku, o ktorej neviem viac ako to, že to je cyklicky pracujúci tepelný stroj (založený na nejakom mne utajenom princípe). Ak takýto stroj pri jednom cykle odoberie teplejšiemu telesu teplo Q , tak vykoná prácu $W = \eta Q$ a chladiču odovzdá teplo $Q' = (1 - \eta)Q$.²¹⁰ Spriahňime teraz tento stroj dokopy s Carnotovou chladičkou, ktorú nastavíme tak, aby chladnejšiemu telesu odoberala pri 1 cykle akurát teplo Q' . Podľa predpokladu o účinnosti bude pri takomto nastavení odovzdávať teplejšiemu telesu teplo Q_C menšie ako Q a bude na pohon potrebovať mechanickú prácu W_C menšiu ako je W .



Takýto kombinovaný stroj bude vo výsledku konať mechanickú prácu iba ochladzujúc teplejšie teleso.²¹¹ Naša skúsenosť však je, že takýto stroj by

²¹⁰Tento vzťah vychádza zo zákona zachovania energie. Keďže BlackBox je cyklicky pracujúci stroj, tak jeho stav na konci cyklu je zhodný so stavom na začiatku cyklu a teda jeho energia sa nezmenila. Preto teplo, ktoré počas cyklu prijal musí byť rovné súčtu mechanickej práce, ktorú vykonal, a teplu, ktoré odovzdal chladiču.

²¹¹Chladnejšie teleso môže byť značne malé, lebo slúži len na to, aby sa od neho počas každého cyklu dočasne nejaké teplo zobralo a následne vrátilo.

sme síce veľmi radi postavili, ale akosi to nejde. Existenciu takéhoto stroja popiera druhá veta termodynamická: Nedá sa zostrojiť perpetuum mobile druhého druhu – t.j. cyklicky pracujúci stroj, ktorý by teplo menil priamo na prácu. Ak jej uveríme, tak sme práve došli k sporu. Totiž, ak by existoval BlackBox, tak viem skonštruovať perpetuum mobile druhého druhu a neplatí druhá veta termodynamická. Jedna z ekvivalentných formulácií druhej vety termodynamickej je však aj tá, že teplo spontánne neprechádza zo studenšieho telesa na teplejšie. A to sa, uznáte, skutočne zdá byť pravda. Nuž, potom treba akceptovať aj to, že BlackBox požadovaných kvalít neexistuje a teda najvyššia možná účinnosť tepelného stroja pracujúceho pri teplotách T_1 a T_2 je práve účinnosť Carnotovho stroja.

Podme konečne k samotnému riešeniu úlohy. Máme dva pudingy. Uvažujeme iba cyklicky pracujúce stroje. Zrejme by sme sa mali obmedziť iba na stroje, ktoré po ukončení cyklu vôbec nemenia teploty iných telies ako práve pudingov. Nuž, každý stroj však môžeme urobiť ľubovoľne malý a považovať teploty pudingov počas jedného cyklu za kvázikonštantné. No a ja viem, že najvyššiu účinnosť má z takýchto strojov pre každý jeden cyklus práve Carnotov stroj. Carnot počas jedného cyklu s pudingami o teplotách t_1 , resp. t_2 odoberie teplejšiemu telesu teplo $\delta Q_1 = C_1 dt_1$ a chladnejšiemu dodá teplo $\delta Q_2 = \frac{t_2}{t_1} \delta Q_1 = \frac{t_2}{t_1} C_1 dt_1 = -C_2 dt_2$. Odtiaľ mám diferenciálnu rovnicu v separovanom tvare

$$\frac{dt_1}{t_1} = -\frac{C_2}{C_1} \frac{dt_2}{t_2},$$

odkiaľ vieme integráciou získať vzťah medzi teplotou T'_1 teplejšieho telesa a teplotou T'_2 chladnejšieho telesa. Pre jednoduchosť si zavediem označenie $q = \frac{C_2}{C_1}$.

$$\int_{T_1}^{T'_1} \frac{dt_1}{t_1} = -q \int_{T_2}^{T'_2} \frac{dt_2}{t_2}$$

$$T'_2 = \left[\frac{T_1}{T'_1} T_2^q \right]^{\frac{1}{q}}.$$

Z tohoto vzťahu vieme určiť aj teplotu T , ktorú budú mať oba pudingy vtedy, keď sa ich teploty vyrovnajú,

$$T = \left[\frac{T_1}{T} T_2^q \right]^{\frac{1}{q}} \quad \Rightarrow \quad T = [T_2^q T_1]^{\frac{1}{q+1}}.$$

Potom je už určenie celkovej práce úplná lahoda

$$\begin{aligned} W &= - \int_{T_1}^T \frac{T'_1 - T'_2}{T'_1} C_1 dT'_1 \\ &= C_1 \left[(T_1 - T) + q(T_1 T_2^q)^{\frac{1}{q}} (T_1^{-\frac{1}{q}} - T^{-\frac{1}{q}}) \right]. \end{aligned}$$

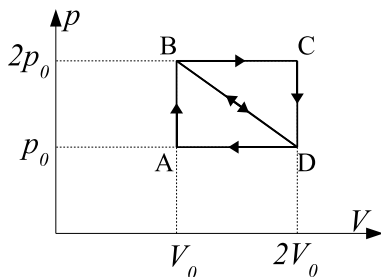
Do tohoto vzťahu ešte treba dosadiť výrazy za q , resp. T . Konečný vzťah má celkom ďaleko od estetického, tu je

$$W = C_1 \left[T_1 - \left(T_1 T_2^{\frac{C_2}{C_1}} \right)^{\frac{C_1}{C_1 + C_2}} \right] + C_2 T_2 \left[1 - T_1^{\frac{C_1}{C_2}} \left(T_1 T_2^{\frac{C_2}{C_1}} \right)^{-\frac{C_1^2}{C_2(C_1 + C_2)}} \right].$$

FX F2 – KOMPOST



Judita sa rozhodla využiť teplo kompostoviska vo svojej záhradke na dobročinné účely. S tým zámerom si postavila dva vratné stroje periodicky pracujúce podľa dejov ABD a BCD. Pracovnou látkou je vzduch, pretože je lacný. Aký je pomer účinností týchto dejov?



Zdroj: Úlohu vymyslel Bzdušo

🍃 VZORÁK JAKUB 🍃

Zdravím pekne všetkých náhodných čitateľov. Účinnosť cyklického deja s plynom je definovaná ako podiel vykonanej mechanickej práce a dodaného tepla. Táto definícia má hlavu a pätu, ale je dobré mať na zreteli, že je to len otázka dohody. V našom prípade je to zrejme to najrozumnejšie, čo sa dá vymyslieť.

Vzduch budem pre naše počtárske účely považovať za ideálny plyn s počtom stupňov voľnosti $s = 5$, lebo je dominantne zložený z dvojatómových molekúl N_2 , resp. O_2 .²¹² Teda pri ohriatí o ΔT vnútorná energia plynu stúpne o $\frac{5}{2}Nk\Delta T$, kde k je Boltzmannova konštanta a N je počet molekúl. Pre ideálny plyn platí stavová rovnica $pV = NkT$. Deje budem považovať za vratné, resp. kvázistacionárne, t.j. také, pre ktoré platí, že intenzívne veličiny (tlak, teplota) sú vo všetkých miestach plynu a v každom čase rovnaké ako v stacionárnom prípade.²¹³

Očividne, práca, ktorú oba stroje vykonajú pri jednom cykle, je pre oba stroje rovnaká, konkrétne $\frac{p_0 V_0}{2}$. Na určenie pomeru účinností nám ostáva už iba zistiť množstvo dodaného tepla pri jednom a druhom cykle.

²¹²Toto skutočne nie je reklama na mobilného operátora.

²¹³Inak ani nemá zmysel uvažovať stavovú rovnicu.

Stroj s cyklom ABD: Pri deji $A \rightarrow B$ plyn jednoznačne teplo prijíma, jeho termodynamická teplota stúpa podľa stavovej rovnice na dvojnásobok. Ak označíme jeho teplotu v bode A ako $T_{1,A}$ a počet jeho molekúl ako N_1 , tak vieme povedať, že vnútorná energia plynu stúpila o $\frac{s}{2}N_1kT_{1,A}$, čo pomocou stavovej rovnice môžeme vyjadriť ako $\frac{s}{2}p_0 V_0$. Pri deji $B \rightarrow D$ teplota po stred uhlopriečky najprv stúpa, potom klesá. Pritom plyn stále koná prácu. Nedá sa jednoznačne prostým nahliadnutím určiť, či plyn pozdĺž celej čiary $B \rightarrow D$ prijíma teplo.

Parametrizujme si teda dej $B \rightarrow D$ napr. pomocou premennej x , ktorá sa bude meniť od hodnoty 0 v bode B po 1 v bode D , pričom tlak pre konkrétne x bude $(2-x)p_0$ a objem $(1+x)V_0$. Skúmame, či plyn pre nejaké konkrétne x pri infinitezimálnom náraste parametra x o dx teplo prijíma alebo odovzdáva. Prijaté teplo δQ vypočítame ako súčet prírastku vnútornej energie dE a plynom vykonanej mechanickej práce dW . Vnútorná energia pri náraste parametra x o dx narastie o (použijeme stavovú rovnicu)²¹⁴

$$\begin{aligned} dE &= \frac{s}{2} [N_1 k (T + dT) - N_1 k T], \\ &= \frac{s}{2} [(p + dp)(V + dV) - pV], \\ &= \frac{s}{2} p_0 V_0 [(2-x)dx - (1+x)dx + (dx)^2], \\ &= \frac{s}{2} p_0 V_0 (1-2x) dx. \end{aligned}$$

Mechanická práca je jednoducho

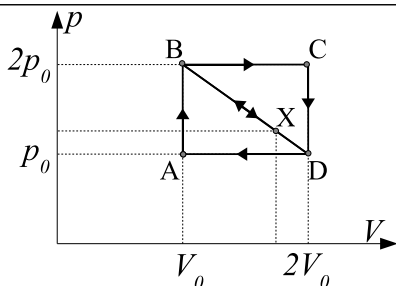
$$dW = p dV = (2-x)p_0 V_0 dx.$$

Teda teplo δQ je rovné

$$\delta Q = p_0 V_0 \left[\frac{s+4}{2} - (s+1)x \right] dx,$$

odkiaľ poľahky vidíme, že plyn teplo prijíma pre $x < \frac{s+4}{2(s+1)} = \frac{3}{4}$. Označme teda ako bod X bod prislúchajúci hodnote parametra $x_1 = \frac{3}{4}$.

²¹⁴Pri úpravách využijeme, že pre infinitezimálne dx je $(dx)^2$ exaktná nula.



Môžeme povedať, že plyn prijíma teplo na úseku $B \rightarrow X$. Konkrétne prijme na tomto úseku

$$W_{B \rightarrow X} + E_X - E_B = p_0 V_0 \frac{2 + (2 - x_1)}{2} x_1 + \frac{s}{2} [(1 + x_1)(2 - x_1) - 2] p_0 V_0,$$

kde som prácu vyjadril ako plochu lichobežníka v pV -diagrame. Pri deji $X \rightarrow D$ plyn teplo odovzdáva.

Pri deji $D \rightarrow A$ plyn stráca vnútornú energiu a zároveň je na ňom konaná práca, teda nutne teplo pri tomto deji odovzdáva. Preto celkové dodané teplo pri deji ABD našim strojom je rovné

$$Q_1 = \frac{p_0 V_0}{2} [(4 - x_1)x_1 + s(1 + x_1 - x_1^2)].$$

Stroj s cyklom BCD: Pri deji $B \rightarrow C$ plyn teplo jednoznačne prijíma, konkrétne prijme teplo $\frac{s+2}{2}(2p_0 V_0)$. Pri deji $C \rightarrow D$ zasa pre zmenu jednoznačne teplo odovzdáva. Dej $D \rightarrow B$ si opäť parametrizujem pomocou x , rovnako ako pri analýze predošlého stroja. Musíme si však uvedomiť, že dej prebieha v opačnom smere. Teda parameter x od 1 klesá ku 0 a „prírastok“ dx je záporný. Využitím predošlých výpočtov teda vieme, že na úseku $D \rightarrow X$ plyn teplo prijíma. Konkrétne prijme

$$W_{D \rightarrow X} + E_X - E_D = -p_0 V_0 \frac{1 + (2 - x_1)}{2} (1 - x_1) + \frac{s}{2} [(1 + x_1)(2 - x_1) - 2] p_0 V_0.$$

Dokopy teda stroj prijme teplo

$$Q_2 = \frac{p_0 V_0}{2} [(1 + 4x_1 - x_1^2) + s(2 + x_1 - x_1^2)].$$

Pomer účinností strojov teda je

$$\frac{\eta_1}{\eta_2} = \frac{Q_2}{Q_1} = \frac{(1 + 4x_1 - x_1^2) + s(2 + x_1 - x_1^2)}{(4 - x_1)x_1 + s(1 + x_1 - x_1^2)} = \frac{115}{67}.$$

G

Teória relativity A kozmológia

Astrophysicists are often in error, but never in doubt.

LEV LANDAU

FX G1 – SUPERNOVA

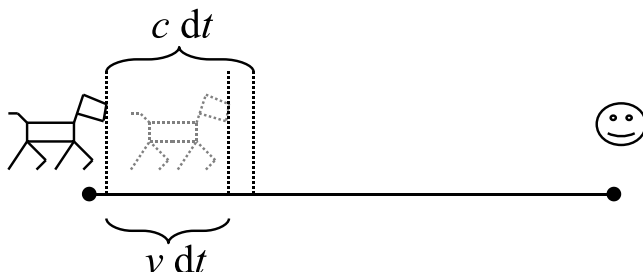


Kdesi ďaleko vybuchla supernova a obrovskou rýchlosťou vyvrhla materiál na všetky strany. Peťo tieto jej pozostatky už istý čas pozoruje so svojím ďalekohľadom. Pozná vzdialenosť supernovy D , zmeral aj uhlovú rýchlosť rozpínania jej obálky (vzďaľovania pozostatkov od hviezdy) ω , a tak si jednoduchým výpočtom ($v = D\omega$) vypočítal, že sa obálka rozpína rýchlosťou $4/3$ krát väčšou, ako je rýchlosť svetla. Akou rýchlosťou sa obálka rozpína naozaj? (Obálka supernovy sa rozpína rovnomerne.)

Zdroj: Úlohu vymyslel Peťo Maták

✻ VZORÁK BZDUŠO & KUBUS ✻

Uvedomme si najprv, v čom spočíva problém nadsvetelnej rýchlosti. Najelementárnejší prípad je, keď sa k nám po priamke približuje teleso (napríklad Veľký pes²¹⁵) veľkou (samozrejme podsvetelnou) rýchlosťou v .



V nejakom čase k nám vyšle fotón.²¹⁶ O dt neskôr sa k nám nachádza bližšie o $v dt$ a vyšle ďalší fotón. Všimnime si, že dva fotóny nesúce informáciu o zmene polohy o $v dt$ sa nachádzajú vo vzdialenosti $(c - v) dt$ od seba. Do nášho oka prídu v intervale

$$dt' = \frac{(c - v) dt}{c}.$$

V priebehu tohto časového intervalu spozorujeme posunutie o $v dt$, teda pozorovaná rýchlosť je

$$v' = \frac{v dt}{dt'} = \frac{cv}{c - v}.$$

²¹⁵Po latinsky *Canis Major*.

²¹⁶Resp. viacero fotónov, ktorých zaostrením sme schopní zistiť, ako ďaleko sa od nás teleso nachádza.

Ľahko si môžete overiť, že pri rýchlostiach väčších ako $c/2$ pozorujeme pohyb nadsvetelnou rýchlosťou. Pre $v = 0,99c$ pozorujeme Veľkého psa približovať sa rýchlosťou $99c$. *To sa nám ale iba zdá!* V skutočnosti ide iba podsvetelnou rýchlosťou.

Niečo podobné sa deje aj s oblakom supernovy. Kvôli približovaniu oblaku v „prednej“ časti supernovy vidíme pohyb zrýchlený. To, čo pozorujeme ako zväčšovanie jej polomeru však nemôže súvisieť s časťou oblaku, ktorá sa rozpína po priamke ku nám. Tá predsa nemá žiadnu kolmú zložku rýchlosti a nemôžeme ani žiadny kolmý pohyb spozorovať. Za nadsvetelný pohyb tiež nemôže časť oblaku rozpínajúca sa kolmo na spojnicu supernova-Zem. Tam totiž prichádzajú fotóny stále z rovnakej vzdialenosti a $dt' = dt$. To, čo mi pozorujeme ako rozpínanie bude spôsobovať nejaký smer *medzi*.

Ukážeme si dva spôsoby riešenia problému. Hneď napríklad vidíme, že v nejakom smere rozpínania budeme pozorovať najväčšiu zdanlivú rýchlosť. Extrémy funkcií hľadáme predsa pomocou derivácií. Ale ešte pred tým si ukážeme riešenie využívajúce analytickú geometriu, pretože sa pri ňom dozvieme celkom zaujímavé skutočnosti. A teraz už rýchlo do riešenia, lebo nás dostihne a zje rýchlo sa ženúci Veľký pes.

Štipka analytickej geometrie

Zavedme si súradnicovú sústavu (postačí dvojrozmerná) so stredom v supernove a osou x smerujúcou smerom k Peťovi. Keďže vzdialenosť supernovy je rádovo väčšia ako jej rozmery, môžeme predpokladať, že lúče, ktoré Peťo vidí, sú rovnobežné s osou x . Nech sa obálka supernovy rozpína rýchlosťou v . Ak Peťo vidí nejaký jej kus v mieste $[x, y]$ v čase T po výbuchu supernovy, musí platiť $t_1 + t_2 = T$, kde t_1 je čas potrebný na to, aby sa do daného miesta dostal materiál z miesta výbuchu, a t_2 čas potrebný na to, aby sa svetlo z tohoto miesta dostalo ku Peťovi. Ukazuje sa ako užitočné zaviesť si čas t meraný od okamihu, kedy Peťo vidí vybuchnúť supernovu, t.j. čas odsadený od T o hodnotu D/c .²¹⁷

$$t_1 + t_2 = T \quad (85)$$

$$\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{v} + \frac{D - x}{c} = t_0 + t$$

$$\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{v} - \frac{x}{c} = t \quad (86)$$

Dostali sme teda rovnicu všetkých možných miest, kde Peťo vidí nejaký kúsok obálky v jeho čase t . Upravujeme ďalej:²¹⁸

²¹⁷Niet divu, pre takto zavedený čas musíme pre $t = 0$ dostať pekné riešenie: Jediný bod.

²¹⁸ $\gamma_v = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$ je relativistický Lorentzov faktor.

$$\begin{aligned}
\frac{x^2 + y^2}{v^2} &= t^2 + \frac{2tx}{c} + \frac{x^2}{c^2} \\
x^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) - 2x \frac{v^2 t}{c} + y^2 &= v^2 t^2 \\
\frac{x^2}{\gamma_v^2} - 2 \frac{x}{\gamma_v} \frac{\gamma_v v^2 t}{c} + y^2 &= v^2 t^2 \\
\left(\frac{x}{\gamma_v} - \frac{\gamma_v v^2 t}{c}\right)^2 + y^2 &= v^2 t^2 + \frac{\gamma_v^2 v^4 t^2}{c^2}.
\end{aligned} \tag{87}$$

Zrazu nám z neba spadla zaujímavá skutočnosť, že Peťo vidí v každom okamihu obálku supernovy ako elipsu. Tá sa s časom rozpína podľa odvode nej rovnice.²¹⁹ Nás však zaujíma iba jej zdanlivá šírka. Keďže supernova je ďaleko, bude ňou teda maximálna súradnica y prislúchajúca času t . Súradnica y je najväčšia, keď bude zátvorka s členom x nulová, takže

$$\begin{aligned}
y^2 &= v^2 t^2 + \frac{\gamma_v^2 v^4 t^2}{c^2} \\
y &= vt \sqrt{1 + \frac{\gamma_v^2 v^2}{c^2}} = vt \sqrt{1 + \frac{v^2}{c^2 - v^2}} = vt \sqrt{\frac{c^2}{c^2 - v^2}} \\
y &= \gamma_v vt \\
w = \frac{y}{t} &= \gamma_v v
\end{aligned} \tag{88}$$

Zdanlivá rýchlosť rozpínania supernovy bude teda γ_v krát väčšia ako tá skutočná, pri vzdialenom objekte akým je supernova bude to isté platiť i o uhlových rýchlostiach. Z tejto rovnice jednoducho vyjadríme skutočnú rýchlosť podľa zdanlivej:

$$\begin{aligned}
w &= \frac{vc}{\sqrt{c^2 - v^2}} \\
w^2 c^2 - w^2 v^2 &= v^2 c^2 \\
v &= \frac{wc}{\sqrt{c^2 + w^2}} = \frac{w}{\sqrt{1 + \frac{w^2}{c^2}}}
\end{aligned} \tag{89}$$

Po dosadení hodnoty $w = \frac{4}{3}c$ dostávame spoľahlivo podsvetelnú rýchlosť rozpínania obálky $v = 0,8c$. Každopádne, mali sme šťastie, že nám pozorovaná množina bodov vyšla ako elipsa. Rovnako tak sa mohlo stať, že by

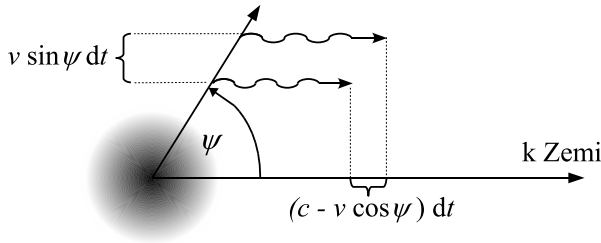
²¹⁹Uvedomte si fakt, že body, ktoré Peťo pozoruje súčasne, *nie sú* súčasné! Odohrali sa v rôznych časoch! Kvôli rôznej vzdialenosti k nám však svetlo z nich prišlo naraz.

výsledkom bolo nejaké vajce a hľadanie najväčšieho y by nebolo vôbec také jednoduché.

Búšim, teda derivujem

Uvažujme, že na začiatku sa celá obálka nachádzala v jednom bode – v strede supernovy. Bez ohľadu, ktorým smerom sa nejaká časť oblaku rozpína, všetky budeme pozorovať odísť z tohoto bodu naraz. Poďme teraz skúmať, v ktorom smere pozorujeme aký axiálny pohyb. Tento smer by mal vyjsť nezávislý od času.²²⁰ To znamená, že oblak v danom smere budeme neustále pozorovať ako najrýchlejšie sa rozpínajúci a od samého výbuchu sa nám bude javiť ako okraj supernovy.

Zjednodušíme si celý výpočet nasledovne: Predpokladajme, že v strede supernovy je teleso, ktoré sa pohybuje rýchlosťou v a pod uhlom ψ k spojnici so Zemou. Akú kolmú zložku rýchlosti pozorujeme?



Uvažujme dva fotóny vyslané v časovom odstupe dt . Z obrázku vidno, že nesú informáciu o posunutí v kolmom smere o $v \sin \psi dt$. Do oka prídu v časovom intervale²²¹

$$dt' = \frac{(c - v \cos \psi) dt}{c} = (1 - \beta_v \cos \psi) dt. \quad (90)$$

Pre pozorovanú kolmú zložku rýchlosti platí

$$\frac{u}{c} = \beta_u = \frac{1}{c} \frac{v \sin \psi dt}{dt'} = \frac{\beta_v \sin \psi}{1 - \beta_v \cos \psi}. \quad (91)$$

²²⁰Ak pohyb danou rýchlosťou a v danom smere pozorujeme ako pohyb určitou inou rýchlosťou, nemôže to závisieť na čase, v ktorom pozorovanie robíme.

²²¹ $\beta_v = \frac{v}{c}$ je ďalšia substitúcia hojne používaná v relativite.

Získali sme krásnu a jednoduchú závislosť. Ostáva nám len zistiť, kde na intervale $\langle 0; \pi/2 \rangle$ sa nachádza extrém a nájsť jeho hodnotu:²²²

$$\left. \frac{d\beta_u}{d\psi} \right|_{u=w} = \frac{\beta_v \cos \psi (1 - \beta_v \cos \psi) - \beta_v \sin \psi \beta_v \sin \psi}{(1 - \beta_v \cos \psi)^2} = 0 \quad (92)$$

$\Downarrow$

$$\begin{aligned} \beta_v \cos \psi - \beta_v^2 \cos^2 \psi - \beta_v^2 \sin^2 \psi &= 0 \\ \beta_v \cos \psi - \beta_v^2 &= 0 \\ \cos \psi &= \beta_v \end{aligned} \quad (93)$$

Pritom sme využili fakt, že $\beta_v \neq 0$. Získali sme tak smer, v ktorom vidíme najrýchlejší zdanlivý kolmý pohyb. Teraz stačí dosadiť, do rovnice (91), využijúc fakt, že $\sin \psi = \sqrt{1 - \cos^2 \psi} = \sqrt{1 - \beta_v^2}$. Tak dostávame

$$\beta_w = \frac{\beta_v \sqrt{1 - \beta_v^2}}{1 - \beta_v^2} = \frac{\beta_v}{\sqrt{1 - \beta_v^2}}. \quad (94)$$

Bystré oko si iste všimlo, že táto rovnice je vlastne len (88) prepísané do iných písmen. Ďalej je teda postup rovnako jednoduchý a výsledok ten istý, t.j.

$$v = \frac{w}{\sqrt{1 - \frac{w^2}{c^2}}}.$$

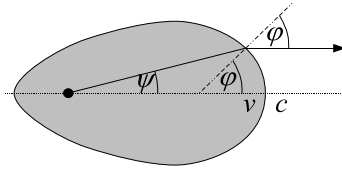
Nadhľad cez geometrickú optiku

Ak nemáte radi derivácie, určite oceníte nápad Petra Perešíniho, ktorý úlohu vyriešil šikovnou úvahou. Všimol si, že rovnica (86) popisuje štandardnú situáciu, kde sa „čosi“ pohybuje nejakou rýchlosťou v jednom prostredí a inou rýchlosťou v druhom prostredí, pričom úlohou je nájsť *optimálnu cestu*, ktorej prislúcha minimálny čas. Riešenie však vieme z geometrickej optiky: *Snellov zákon!*

Pre fixovaný čas t existuje akási obálka,²²³ vnútri ktorej sa „čosi“ pohybuje rýchlosťou v rozpínania supernovy a rýchlosťou c svetla mimo nej.

²²²V samom úvode úlohy sme si vysvetlili, prečo musí existovať maximum na tomto intervale. Ak zistíme, že sa v tomto intervale nachádza jediný extrém, tak netreba počítať druhú deriváciu a môžeme si byť istí, že ide o maximum nami hľadané.

²²³Touto obálkou je v skutočnosti elipsa nájdená v prvom riešení úlohy. Presný tvar nás však teraz nezaujíma.



Zo Sneellovho zákona máme

$$\frac{\sin(\psi - \varphi)}{\sin \varphi} = \frac{v}{c}.$$

Nás zaujíma uhlová šírka, tj. prípad $\varphi = 90^\circ$. Odtiaľ hneď dostávame, že najväčšie rozpínanie pozorujeme pre uhol $\cos \psi = \frac{v}{c} = \beta_v$, čo je úplne identické rovnici (93). To spolu s rovnicou (91) vedie po tretí raz na ten istý výsledok.

FX G2 – VESMÍR



Peťo vyniesol do vesmíru svoju obľúbenú družicu. Družica sa dlho túlala hlbokým vesmírom a dostala sa až do vzdialenosti d od Zeme, keď jej začalo byť smutno a začala vysielat' rádiový signál s frekvenciou f . Kubo si chcel naladiť rádio na Peťovu družicu, a tak sa začal zamýšľať nad nasledujúcimi problémami.

- (a) Akú frekvenciu signálu družice nameria Kubo, ak sa družica pohybuje (hoc i veľkou) rýchlosťou v smerom od Zeme?*
- (b) Akú frekvenciu signálu družice nameria Kubo, ak družica stojí, ale vesmír sa rovnomerne rozpína tak, že vzdialenosť medzi družicou a Zemou sa v čase vysielania zväčšuje rýchlosťou v ? Rovnomerné rozpínanie vesmíru v tejto úlohe znamená, že objektívna vzdialenosť medzi každými dvoma bodmi sa zväčšuje konštantnou rýchlosťou, pričom v každom momente je rýchlosť vzdďalovania sa dvojice bodov priamo úmerná vzdialenosti týchto bodov.*

Zdroj: Úlohu vymyslel Jakub

 VZORÁK JAKUB 

Pod rádiovým signálom obyčajne rozumieme elektromagnetickú vlnu, obvykle smerovanú vysielateľom prevažne do nejakého želaného priestorového uhla, s vlnovými dĺžkami od približne 1 do 1000 metrov. Samotná informácia sa kóduje pomocou modulácie (superpozícia viacerých monofrekvenčných vĺn a vznik tzv. rázov). Technicky sa jedná o netriviálne záležitosti. Rozobrať takúto situáciu by zrejme bolo nad naše sily a preto sa uchýlime k zjednodušenému myšlienkovému experimentu (Gedankenexperiment) – komunikácia bude prebiehať pomocou elektromagnetického žiarenia vysielaním fotónov²²⁴ z družice v smere priamo k Zemi po dávkach s frekvenciou f . Informáciu budem kódovať pomocou počtu vyslaných fotónov (čiže pomocou amplitúdy, ak sa bavíme v termínoch vĺn).

Časť (a).

Spomínaná rýchlosť družice v môže byť podľa zadania veľká. Tým sme chceli povedať, že môže byť porovnateľná s rýchlosťou svetla – a že teda túto časť treba rozobrať relativisticky. Zrejme ste už počuli o dilatácii času

²²⁴Malo by byť známe, že elektromagnetické javy majú duálny charakter a dá sa uvažovať o elektromagnetických vlnách ako aj o prúde častíc – fotónov.

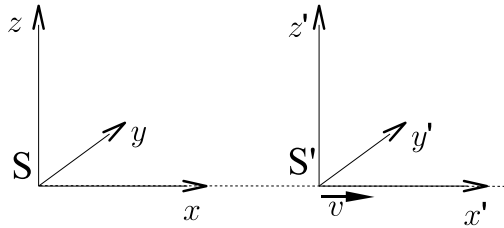
a kontrakcii dĺžky v špeciálnej teórii relativity. Je to dôsledok špeciálnych Lorentzových transformácií

$$\begin{aligned}x' &= \gamma(x - vt) \\y' &= y \\z' &= z \\t' &= \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x\right),\end{aligned}$$

kde

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

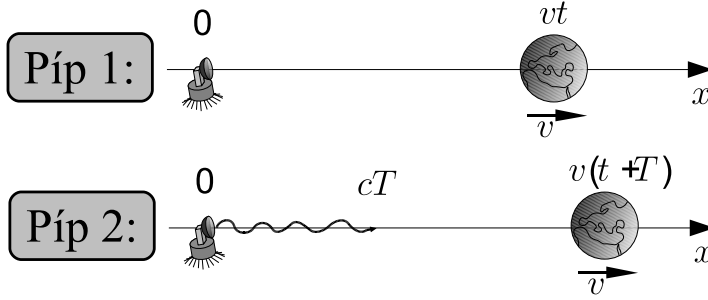
Tieto rovnice nám hovoria, ako sa transformujú súradnice polohy a času pri prechode z inerciálneho systému S s kartézskou sústavou súradníc x , y a z a časom t do inerciálneho systému S' s kartézskymi súradnicami x' , y' , z' a časom t' , ktorého počiatok sa vzhľadom na S hýbe rýchlosťou v v smere kladnej x -ovej polosi. Súradničné osi y' a z' sú rovnobežné s osami y a z , osi x' a x sa prekrývajú, a v čase $t = t' = 0$ sa počiatky oboch sústav prekrývajú.



Tieto vzťahy určujú, kde ($\mathbf{r}' = (x', y', z')$) a kedy (t') budem v systéme S' pozorovať udalosť, ktorá nastala v systéme S v mieste $\mathbf{r} = (x, y, z)$ a v čase t .

V našom prípade môžeme uvažovať systém S spojený s družicou a S' bude spojený so Zemou²²⁵. Nech sa teda Zem hýbe od družice rýchlosťou v . Družica vyšle v čase t v mieste $\mathbf{r} = (x, y, z) = \mathbf{0}$ prvý signál. V čase $t + T$, kde $T = \frac{1}{f}$, vyšle opäť v mieste $\mathbf{r} = (x, y, z) = \mathbf{0}$ druhý signál.

²²⁵Tu práve robíme značné zjednodušenie problému, lebo Zem sa nepohybuje rovnomerne! V skutočnosti by sme mali riešiť problém tak, že by sme spočítali, kedy k nám signál príletí, a rýchlosť družice vzhľadom na Slnko by sme mali relativisticky sčítať s rýchlosťou Zeme voči Slnku v danej dobe priletu signálu. V takomto prípade už však ani smer šírenia signálu nemusí byť rovnobežný so smerom vzájomného pohybu družice vzhľadom na Zem v dobe príjmu...



Podľa vyššie napísaných transformačných vzťahov určíme, kedy a kde tieto dve udalosti (pípnutia) nastanú v sústave S' . Pípnutie 1 nastane v čase $t'_1 = \gamma t$ v mieste $\mathbf{r}'_1 = (x'_1, y'_1, z'_1) = (-\gamma vt, 0, 0)$. Pípnutie 2 je v sústave S udalosť, ktorá nastane v čase $t'_2 = \gamma v(t + T)$ v mieste $\mathbf{r}'_2 = (x'_2, y'_2, z'_2) = (-\gamma v(t + T), 0, 0)$. Teraz nám stačí využiť základný princíp špeciálnej teórie relativity – totiž, že všetky inerciálne vzťažné sústavy sú si rovnocenné a teda nutne rýchlosť svetla (teda i rýchlosť šírenia nášho signálu) je v každej sústave rovnaká. Spočítame čas τ'_1 , kedy doletí prvý signál k Zemi:

$$\tau'_1 = t'_1 + \frac{|\mathbf{r}'_1|}{c} = \gamma \left(1 + \frac{v}{c}\right) t.$$

Obdobne spočítame čas priletu druhého signálu τ'_2 a ich rozdiel určí periódu prijímaného signálu

$$T' = \tau'_2 - \tau'_1 = \gamma \left(1 + \frac{v}{c}\right) T = \sqrt{\frac{1 + \frac{v}{c}}{1 - \frac{v}{c}}} T = \sqrt{\frac{c + v}{c - v}} T.$$

Potom prijímaná frekvencia je

$$f' = \frac{1}{T'} = \sqrt{\frac{c - v}{c + v}} f.$$

Časť (b)

Najprv si obrazne vyjasníme, čo to vlastne rozpínanie vesmíru je. Pod rozpínaním vesmíru sa myslí, že samotný priestor sa „nafukuje“. Ak chceme takého „nafukovanie“ pozorovať, tak zrejme potrebujeme niečo, čo svoju dĺžku v takomto podivnom svete nemení. Napríklad pevnú tyč. Takže ak máme dva rôzne body²²⁶ A a B v priestore, tak môžeme určiť ich vzájomnú vzdialenosť

²²⁶Ak sa čitateľovi body nepáčia, tak si do nich môže umiestniť nejaké telesá. Tieto telesá však musia byť jedno vzhľadom na druhé v pokoji, nehybné.

pomocou nejakého počtu tyčí, ktoré poukladáme do rovného radu²²⁷ jednu vedľa druhej. Po istom čase sa náš priestor „nafúkne“ a to v každom mieste rovnako. Teda v každej skulinke medzi atómami pribudne kúsok „nového“ priestoru. Avšak očakávame, že fyzika bude fungovať rovnako ako v súčasnosti, takže atómy sa posnažia, aby sa ich vzdialenosti nemenili. Potom sa ale nebudú meniť ani dĺžky tyčí. Zákonite ale teda všetok pribudlý priestor objavíme medzi tyčami, ktoré sa postupom času budú rozchádzať. Keď ich znovu dáme do radu tak, aby začínali v bode/telese A , tak nám zrejme bude chýbať niekoľko tyčí pri B . Doplnením môžeme zistiť, o koľko sa vzdialenosť $|AB|$ zväčšila za uplynulý čas. Vieme tak určiť „rýchlosť pribúdania priestoru medzi bodmi A a B “, ktorú v zadaní označujeme v . Tu by som ale zdôraznil, že nejde o rýchlosť v pravom slova zmysle. Telesá v bodoch A a B sa navzájom nehýbu²²⁸. Len priestor medzi nimi pribúda! Kvôli pribúdaniu priestoru sa pojem rýchlosti mimo počiatku systému komplikuje, pribúda akýsi *drift* spôsobený rozpínaním. V takomto prípade bude rovnocennosť inerciálnych sústav iba lokálna – teda rýchlosť svetla bude c iba v počiatku danej sústavy²²⁹.

Prenos signálu môžeme teda uvažovať tak, že letiaci fotón sa bude vždy vzhľadom na miesto, kde sa nachádza, pohybovať rýchlosťou c , a súčasne sa priestor pred a za ním bude rozpínať. Keď signál doletí na Zem, už nemusíme použiť transformácie súradníc a času známe zo špeciálnej teórie relativity, tak, ako sme ich použili v predošlej časti pri prechode z jednej vzťažnej sústavy do druhej²³⁰.

Meranie vzdialenosti pomocou pevných tyčí budem považovať za spôsob určenia tej v zadaní spomenutej objektívnej vzdialenosti. Spôsob, ako ich poukladať do rovného radu, vyriešim elegantne tak, že budú duté a ich stredom

²²⁷Význam slova *rovno* môže byť v krivých priestoroch odlišný od toho, čo považujeme za rovno my. Vo všeobecnej teórii relativity sa za rovno považuje smer, akým sa šíri svetlo. No, ale v blízkosti masívnych hmotných objektov sa smer šírenia svetla zakrivuje, ako keby padalo na ne. Ide o tzv. *gravitational lensing*, čiže akési gravitačné šošovkovanie, lebo masívny objekt funguje pre svetlo fakticky ako spojná šošovka.

²²⁸Vo svojej podstate ide o všeobecno-relativistický problém, ktorý sa rieši zavedením tzv. *comoving* súradníc. Tieto sa rozpínajú presne podľa škálovacieho parametra $a(t)$ a objekty iba unášané priestorom sú v nich nehybné.

²²⁹Ak by mal niekto problém s tým, že potom sa svetlo vzhľadom na zdroj môže časom „hýbať“ rýchlejšie ako c , tak toho môžem „utešiť“, že vo všeobecnej teórii relativity to nie je na skok z mosta...

²³⁰Skúsím laicky načrtnúť, ako vnímam ja, prečo netreba transformovať súradnice, ale je to len moja naivná predstava neznalca všeobecnej teórie relativity. V prípade špeciálnej teórie relativity sú neobvyklé transformácie súradníc a času dôsledkom toho, že svetlo sa hýbe vzhľadom na ľubovoľného pozorovateľa rýchlosťou c , a to aj vtedy, keď sú títo pozorovatelia vo vzájomnom pohybe. V tomto prípade žiaden takýto „klasický nezmysel“ nenastáva, lebo uvažujeme fotón, ktorý sa hýbe vzhľadom na miesto, kde sa nachádza, rýchlosťou c .

pôjde laserový lúč z A do B . Keďže uvažujeme tzv. plochý priestor²³¹, tak sa svetlo bude šíriť rovno v zmysle nám bežne známom. Naše meranie je síce ťažko prevediteľné, ale nám ide len o fyzikálne realizovateľnú konštrukciu. Vďaka tomu sme nášmu pojmu objektívnej vzdialenosti dali solídny základ.

Teraz spracujeme informáciu zo zadania o rovnomernosti rozpínania, ktorá je kvalitne zašifrovaná. Tvrdíme, že vzdialenosť každých dvoch bodov sa zväčšuje konštantnou rýchlosťou (konštantnou v čase!), a že rýchlosť vzdďalovania je (v každom danom momente) priamo úmerná vzdialenosti. Tu, žiaľ, chýba informácia, že konštanta úmernosti je univerzálna pre celý vesmír, čo sa však snáď dalo domyslieť z prívlastku rovnomerný. Konverzia tohoto slovného labyrintu do reči vzorcov je na počudovanie veľmi príťažlivá

$$L(t) = L(t_0) + H_0(t - t_0)L(t_0) = a(t)L(t_0).$$

Sami sa môžete presvedčiť, že tento vzťah dáva naozaj v čase konštantnú rýchlosť vzdďalovania sa, a tiež priamu úmeru rýchlosti od vzdialenosti pre ľubovoľný zvolený čas. Veličina $a(t) = 1 + H_0(t - t_0)$ sa nazýva škálovací parameter. Udáva, koľkokrát sa natiahla vzdialenosť L medzi časmi t_0 a t . V našom jednoduchom modeli je to lineárna funkcia času t . Konštanta označená symbolom H_0 má dolný index 0, lebo ide o prvú deriváciu $a(t)$ podľa času vyjadrenú v čase t_0 .²³² Písmenko H si zaslúži vďaka jej objaviteľovi, je to totiž Hubblova konštanta. Udáva rýchlosť, s akou rastie vzdialenosť, na jednotku dĺžky v čase t_0 .²³³

V našom prípade teda platí $v = H_0 d$ a časový vývoj objektívnej vzdialenosti družice od Zeme je daný rovnicou $d(t) = d + vt$, v ktorej za čas $t = 0$ považujem okamih, ktorý je v zadaní popísaný ako čas začatia vysielania. Môžeme napísať rovnicu, ktorá bude popisovať, ako sa šíri signál rýchlosťou svetla od družice k Zemi.²³⁴ Nech $r(t)$ je objektívna vzdialenosť signálu (vypusteného družicou v čase $t = 0$ smerom k Zemi) od družice. Potom platí diferenciálna rovnica

$$\dot{r}(t) = c + \frac{r}{d + vt}v, \quad (\text{i})$$

²³¹To znamená, že nie je zakrivený, čo je ekvivalentné tomu, že platí $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$, čo je Pytagorova veta pre diferenciály v 3-dimenzionálnom priestore.

²³²V našom prípade ide o prvú časovú deriváciu a v ľubovoľnom čase, ale ak uvažujeme komplikovanejšiu funkciu $a(t)$, tak potom to už jedno nemusí byť. V reáli je funkcia $a(t)$ naozaj komplikovanejšia.

²³³Pre predstavu uvediem hodnotu Hubblovej konštanty v nami pozorovanom vesmíre v súčasnosti: $H_0 = (71 \pm 3,5) \frac{\text{km/s}}{\text{Mpc}}$, kde $\text{Mpc} = 10^6 \text{pc} \approx 3,26 \cdot 10^6 \text{ly}$. [pc je značka pre jednotku dĺžky *parsek*, čo je skrátenina od slovného spojenia *paralaxa 1 oblúkovej sekundy* – viď Wikipédia – a ly je značka pre svetelný rok, *light year*.]

²³⁴Mimochodom, formálne presne rovnako vyzerá príklad z kuchyne pána Ľubomíra Muchu o muche, ktorá kráča rýchlosťou u po ideálnej gume. Začína liezť od steny, o ktorú je gumička prichytená. Muche to však náležite sťažíme tým, že druhý koniec gumy ťaháme konštantnou rýchlosťou v preč od steny. Otázka je, za akých podmienok príde mucha na kraj gumy, ktorý ťaháme, a koľko jej to bude trvať.

ktorá hovorí, že rýchlosť narastania objektívnej vzdialenosti signálu od družice je súčet rýchlosti svetla c a rýchlosti narastania objektívnej vzdialenosti medzi družicou a signálom. Podmienka vyjadrujúca kedy signál dorazí na Zem je zrejme

$$r(t) = d + vt.$$

Nuž, popravde, zapísané v týchto súradniciach to vskutku vyzerá nevábne. Veď len tak bez riešenia ani nevieme povedať, či signál niekedy k Zemi vôbec dorazí. Hop? Ale to by sme mohli vedieť! Uvažujme súradnicu $x(t) = \frac{r(t)}{d+vt}$, ktorá vyjadruje, v akej časti cesty od družice k Zemi sa nachádza signál v čase t . Vďaka rovnomernosti rozpínania priestoru sa zrejme časť za družicou nafúkne úmerne svojej objektívnej dĺžke a časť pred družicou tiež – teda samotné rozpínanie priestoru nespôsobuje zmenu $x(t)$. V premennej $x(t)$ dostaneme rovnicu

$$dx = \frac{c \, dt}{d + vt} \quad \Rightarrow \quad \dot{x}(t) = \frac{c}{d + vt}, \quad (\text{ii})$$

ktorá hovorí, že jediná časová zmena v súradnici $x(t)$ je spôsobená vlastným pohybom signálu rýchlosťou c . Podmienka vyjadrujúca kedy signál dorazí na Zem je jednoducho

$$x(t) = 1.$$

Prechod od rovnice (i) k rovnici (ii) sa nazýva transformácia premenných v diferenciálnej rovnici a všeobecne sa teší obrovskej popularite v druhom semestri analýzy :-).²³⁵

Každopádne, naša rovnica (ii) je separovateľná, čo znamená, že riešenie vieme ľahko nájsť jej integrovaním cez čas od $t = 0$ po T , čo bude čas priletu signálu na Zem

$$\int_0^T \dot{x} \, dt = \int_0^T \frac{c}{d + vt} \, dt.$$

Integrál vľavo je rovný 1, lebo signál za čas letu k Zemi prejde práve celú cestu od družice k Zemi. Integrál vpravo sa dá riešiť substitúciou $z = d + vt$ a je rovný $\frac{c}{v} \ln \frac{d+vt}{d}$. Z toho máme vyjadrenie pre čas letu

$$\begin{aligned} T &= \frac{d}{v} \left(e^{v/c} - 1 \right) = \frac{d}{v} \left[\frac{v}{c} + \frac{1}{2} \left(\frac{v}{c} \right)^2 + \dots \right] \\ &= \frac{d}{c} \left[1 + \frac{1}{2} \frac{v}{c} + \dots \right]. \end{aligned}$$

²³⁵Náš postup prechodu k novej súradnici bol intuitívny, lebo sme chápali význam našich súradníc. Ak však človek stojí zoči-voči nejakej diferenciálnej rovnici a má v nej previesť transformáciu premenných (matematické cvičenia nie sú oveľa nápaditejšie ako toto...), tak je to niečo celkom iné. Potom už príde na invariantnosť tvaru prvých diferenciálov...

Keď už vieme, aký čas potrebuje signál na prilet na Zem, tak sa môžeme konečne začať zaoberať zmenou frekvencie vyslaných pulzov. V čase $t = 0$ sme vypustili jeden signál a ten na Zem dorazil v čase T_1 . Družica vysiela s frekvenciou f , takže nasledovný signál vyšle v čase $\tau = f^{-1}$. Ten dorazí podľa predošlých výpočtov²³⁶ na Zem v čase

$$T_2 = \frac{d}{v} \left(e^{v/c} - 1 \right) + \tau e^{v/c}.$$

Na Zem priletia tieto dva signály v časovom rozostupe

$$\tau' = T_2 - T_1 = \tau e^{v/c}.$$

Ľahko sa možno presvedčiť, že k -ty pulz vyslaný družicou v čase $t = k\tau$ dorazí na Zem skutočne o čas $k\tau'$ neskôr po nultom signáli. Prijímaná frekvencia na Zemi preto bude

$$f' = f e^{-v/c} = f \left[1 - \frac{v}{c} + \frac{1}{2} \left(\frac{v}{c} \right)^2 - \frac{1}{6} \left(\frac{v}{c} \right)^3 + \dots \right].$$

Náš výsledok vychádza v zhode s vlnovou predstavou. Ak sme družicou vyslali fotón s vlnovou dĺžkou λ v čase t a tento priletí na Zem v čase T , tak bude mať vlnovú dĺžku $\lambda' = \frac{a(T)}{a(t)} \lambda$. To odpovedá jednoducho preškalovaniu vlnovej dĺžky fotónu podobne ako sa škálujú objektívne vzdialenosti. Pre frekvencie dostaneme vzťah²³⁷ $f' = f \frac{1+H_0 t}{1+H_0 T}$, čo pre naše $t = k\tau$ a k nim príslušné vypočítané hodnoty T vyplýje zhodný vzťah.

Malé zhrnutie a porovnanie posunov frekvencií (nielen súvisiacich s týmto príkladom):

► Nerelativistický Dopplerov efekt

Funguje pre vlnenia v prostredí s rýchlosťou šírenia vzruchu c_0 oveľa menšou ako rýchlosť svetla c . Ak u je rýchlosť detektora vzhľadom na prostredie v smere od zdroja a v je rýchlosť zdroja vzhľadom na prostredie v smere od detektora, tak platí

$$\begin{aligned} f' &= f \frac{1 - \frac{u}{c_0}}{1 + \frac{v}{c_0}} \\ &= f \left[1 - \frac{v+u}{c_0} + \frac{(v+u)v}{c_0^2} - \frac{(v+u)v^2}{c_0^3} + \dots \right]. \end{aligned}$$

²³⁶Zmena nastane jedine v hraniciach integrovania $0 \mapsto \tau$, resp. $T \mapsto T_2$.

²³⁷Príslušný efekt sa zvykne označovať ako kozmologický červený posun. Prívlastok červený má historické korene. Ide o to, že známe okom viditeľné spektrálne čiary sa pri pozorovaní vzdialujúceho sa zdroja elektromagnetického žiarenia posúvajú k červenej farbe, ktorá má spomedzi žiarenia, ktoré vidíme, najnižšiu frekvenciu. Podobne to funguje, ak medzi zdrojom a nami pribúda priestor.

► Relativistický Dopplerov efekt

Pre vlny šíriace sa rýchlosťou svetla a zdroj vzdalujúci sa od nás (detektor) rýchlosťou v platí

$$\begin{aligned} f' &= f \sqrt{\frac{c-v}{c+v}} \\ &= f \left[1 - \frac{v}{c} + \frac{1}{2} \left(\frac{v}{c} \right)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{v}{c} \right)^3 + \dots \right]. \end{aligned}$$

► Kozmologický posun

Pre žiarenie emitované v čase t a prijímané v čase t' platí vo všeobecnosti posun (viď vlnová predstava na rozpínanie vlnovej dĺžky λ o čosi vyššie)

$$f' = f \frac{a(t)}{a(t')}.$$

Pre linearizovaný škálovací parameter $a(t) = 1 + H_0(t - t_0)$ sme vypočítali, že prijímaná frekvencia signálu vyslaného v ľubovoľnom čase z miesta, ktoré malo v čase t_0 objektívnu vzdialenosť d , bude

$$\begin{aligned} f' &= f e^{-H_0 d/c} \\ &= f \left[1 - \frac{v}{c} + \frac{1}{2} \left(\frac{v}{c} \right)^2 - \frac{1}{6} \left(\frac{v}{c} \right)^3 + \dots \right]. \end{aligned}$$

► Gravitačný červený posun

Pre žiarenie emitované z povrchu hmotného sféricky symetrického objektu o hmotnosti M a polomere R platí (dá sa naň prístojne prísť zo zákona zachovania energie pre fotón, ktorému prisúdím hmotnosť $m = E/c^2 = hf/c^2$)

$$f' = f \left[1 + \frac{1}{c^2} \frac{GM}{R} \right].$$

Na záver by som povedal niečo o našich predstavách o vesmíre. Podľa štandardného modelu sa vesmír rozpína (pričom aktuálnu hodnotu Hubblovej konštanty som uviedol už vyššie) a toto svoje rozpínanie zrýchľuje (teda funkcia $a(t)$ má aj vyššie ako lineárne členy). Tento prekvapivý fakt má mať na svedomí tzv. *tmavá energia*²³⁸, ktorá má záporný tlak. Ďalej sa predpokladá, že rýchlosti vzájomného pohybu sú vo vesmíre nevelké (rádovo na

²³⁸Okrem toho, že vieme, akú hustotu by približne mala mať, o nej nevieme skoro nič. Pôvodne šlo o dodatočný člen v Einsteinovej rovnici vo všeobecnej teórii relativity. Dnes ho ľudia zapracovávajú do celkovej hustoty energie a hovoria o tmavej energii.

úrovni 1000 km/s) a preto na veľkých vzdialenostiach²³⁹ je červený posun dominantným efektom nafukovania priestoru – čiže kozmologického charakteru – poprípade kombinovaný s gravitačným posunom (ten je významný u hviezd s veľkou hustotou, napr. bielych trpaslíkov).

²³⁹O kozmologických vzdialenostiach hovoríme, ak majú veľkosť rádovo aspoň 100 Mpc.

FX G3 – ZÁBAVNÉ FOTÓNY



Halucinka našla na povale zopár fotónov vo veľmi dobrej nálade. Jej oblúbený elektrón je už niekoľko dní smutný a nehybne stojí na mieste, rozhodla sa ho teda obveseliť: poslala k nemu usmievavý fotón s vlnovou dĺžkou λ . S potešením zistila, že po tomto stretnutí sa elektrón predsa len začal pohybovať. Vyslaný fotón sa však pri stretnutí odchyľil od pôvodného smeru o uhol θ a zmenil svoju vlnovú dĺžku. Ako závisí nová vlnová dĺžka λ' fotónu a kinetická energia E elektrónu od uhla θ ?

Do rozbehnutého elektrónu po čase narazil druhý fotón. Po tejto zrážke zostal elektrón znova smutne stáť a fotón sa odchyľil do smeru, v ktorom sa pôvodne pohyboval prvý fotón. Aká je vlnová dĺžka odlietajúceho fotónu?

Nezabudnite, že rýchlosť elektrónu medzi zrážkami môže byť relativistická.

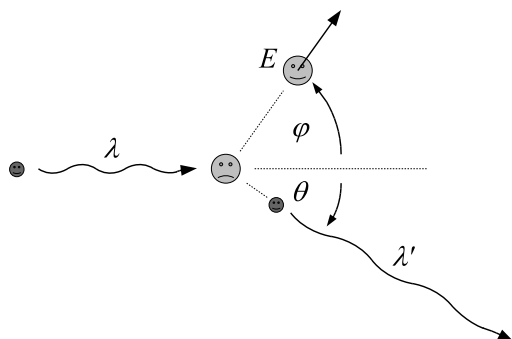
Zdroj: IPhO

 VZORÁK BZDUŠO 

Milé deti. Dnes som si tak sadol k obedu a poriadne si ho vychutnal. Veď bol dobrý. Keď som tak dojedol, prišla na mňa únava a zadriemal som. Snívalo sa mi, že je jar a prechádzam sa rozkvitnutou zelenou lúkou. Steblá trávy sa hompáľali vo vánku. Výhľad na svet naokolo vo mne vzbudzoval pocit opičieho muža... a zrazu ma zobudila mama. Kántri kury motyka!

Úlohu zrejme vyriešime pomocou zákonov zachovania. Zachováva sa nám najmä hybnosť (vo všetkých zložkách), energia, no tiež elektrický náboj, množstvo domácych úloh a cena tovarov.²⁴⁰ Naorientujme si celý príbeh do roviny osí x a y tak, nech sa Halucinkou vypustený fotón na začiatku pohyboval v kladnom smere osi x . Spomeňme si, že hybnosť fotónu s vlnovou dĺžkou λ je $p = h/\lambda$, kde h je Planckova konštanta. Jeho energia je c -krát väčšia.

²⁴⁰Meníme menu, nie cenu!



Po zrážke sa fotón odchyľí o θ nadol, pričom zmení vlnovú dĺžku na λ' . Aby platil zákon zachovania vo zvislom smere, elektrón musí ísť nejako šikmo nahor. Nech sa pohybuje pod uhlom φ , jeho energia je podľa zadania E . Ak si pozrieme vzťahy pre relativistickú energiu a hybnosť

$$E = \gamma mc^2 \quad \text{a} \quad \mathbf{p} = \gamma m \mathbf{v},$$

vidíme jednoduchý prepočet $\mathbf{p} = E\mathbf{v}/c^2$.²⁴¹

Zákony zachovania (postupne pre p_y , p_x a E) nám dávajú rovnice

$$\begin{aligned} \frac{h}{\lambda'} \sin \theta &= \frac{Ev}{c^2} \sin \varphi \\ \frac{h}{\lambda} &= \frac{h}{\lambda'} \cos \theta + \frac{Ev}{c^2} \cos \varphi \\ \frac{hc}{\lambda} + mc^2 &= \frac{hc}{\lambda'} + E. \end{aligned}$$

Tieto rovnice sú relativistické, takže nás popis je úplný. Nič nechýba. Všimnime si ale, že v troch rovniciach máme až štyri neznáme: E , v , φ a λ' . Prvé dve z nich sú však zviazané rovnicou pre relativistickú energiu, takže všetko je v poriadku.

Efektívna cesta k výsledku je napríklad takáto: V druhej rovnici necháme na pravej strane len člen obsahujúci $\cos \varphi$. Porovnáme s rovnicou pre p_y . Vidíme raz sínus, raz kosínus. Iba raz spakruky zatočíme, umocníme na

²⁴¹ Možno stojí za zmienku, že v celom vzoráku je m pokojová hmotnosť a že pre všetky častice (hmotné i nehmotné) platí „relativistická Pytagorova veta“

$$E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4,$$

ktorú ochvíľu aj odvodíme. Pre nehmotné častice možno dosadiť $m = 0$. Pre hmotné častice, ktoré sa nepohybujú stačí dosadiť $p = 0$ a dostávame známy Einsteinov vzorec $E = mc^2$.

druhú a sčítame. Dostávame rovnicu

$$h^2 \left(\frac{1}{\lambda^2} - \frac{2}{\lambda\lambda'} \cos \theta + \frac{1}{\lambda'^2} \right) = \frac{E^2 v^2}{c^4}.$$

Teraz to chce zasa nejaké vnuknutie zhora. Po kratšom zadívaní sa na rovnice nám napadne vyjadriť si podiel v^2/c^2 zo vzťahu pre relativistickú energiu:

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \implies \frac{v^2}{c^2} = 1 - \frac{m^2 c^4}{E^2}$$

Do našej rovnice potrebujeme (vzťah pre E máme zo zákona zachovania energie) poznať

$$\begin{aligned} \frac{E^2 v^2}{c^4} &= \frac{E^2}{c^2} - mc^2 \\ &= \left(\frac{h}{\lambda} - \frac{h}{\lambda'} + mc \right)^2 - m^2 c^2 \\ &= \frac{h^2}{\lambda^2} - \frac{2h^2}{\lambda\lambda'} + \frac{h^2}{\lambda'^2} + 2mch \left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda'} \right). \end{aligned}$$

Po dosadení dostávame rovnicu

$$h^2 \left(\frac{1}{\lambda^2} - \frac{2}{\lambda\lambda'} \cos \theta + \frac{1}{\lambda'^2} \right) = \frac{h^2}{\lambda^2} - \frac{2h^2}{\lambda\lambda'} + \frac{h^2}{\lambda'^2} + 2mch \left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda'} \right).$$

Tu sa nám veľa členov vykrátí. Konkrétne, ani nehnem brvou a mám

$$\frac{h}{\lambda\lambda'} (1 - \cos \theta) = mc \left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda'} \right).$$

Švihnem bičom²⁴² (inými slovami vynásobím $\lambda\lambda'$ a preusporiadam členy) a zrazu

$$\lambda' = \lambda + \frac{h}{mc} (1 - \cos \theta).$$

Práve sme odvodil vzťah pre tzv. *Comptonov rozptyl*. Energii elektrónu už dopočítame jednoduchým dosadením. Po pár šikovných úpravách dostávam

$$E = \frac{h^2 c (1 - \cos \theta)}{\lambda (mc\lambda + h (1 - \cos \theta))} + mc^2.$$

Zostáva vyriešiť druhú časť pohybu. Znova platia všetky spomínané zákony zachovania. Avšak, kým sa ponoríme do tajuplného (nie príliš pohostinného) sveta rovníc, skúsme trochu popremýšľať. Predstavme si, že celý proces zachytím na kameru a pustím odzadu.

²⁴²Aj vy tak zbožňujete kone?

Vidíme fotón s hľadanou vlnovou dĺžkou ako narazí na stojaci elektrón. Ten sa odchyľí o rovnaký uhol a získa rovnakú energiu ako to bolo v predošlom prípade (prvá zrážka a normálny beh času). Na takto pustenej páske ale stále platia zákony zachovania, preto musí mať odletujúci fotón rovnakú veľkú p_y ako odletujúci elektrón (teda aj ako odletujúci fotón pri prvej zrážke a normálnom behu času.) Tieto úvahy nás napokon privádzajú až k tomu, že rozdiel energií prilietajúceho a odletujúceho fotónu je rovnaký ako pri prvej zrážke. To isté by sme zistili aj o zložkách p_x hybnosti. Ak sa nad tým poriadne zamyslíme, tak jediné možné riešenie je, že druhá zrážka, pustená odzadu, je identická s prvou, pustenou odpredu. Vlnová dĺžka odletujúceho fotónu je preto λ .

Avšak, sú to dosť plané reči a chcelo by to aj nejakú rigorózne matematicky odôvodniť. To chce ale znova zostaviť podobnú hrbu rovníc, ako pred chvíľou a búšiť do nich znova. Naučíme sa však niečo nové, aby sme podobné úlohy vedeli riešiť efektívnejšie. Zoznámime sa s takzvanými štvorvektormi.²⁴³

Štvorvektory

Vieme, že v bežnom (trojrozmernom) priestore existujú veličiny charakterizované trojicou čísel. Tie pri zmene súradnicových osí (napríklad otočenie) menia svoje zložky rovnako ako polohový vektor. To vezmeme ako definíciu vektora. Aby sme sa chápali, typickým príkladom zmeny súradnicových osí je otočenie okolo osi z o uhol α v kladnom smere. Overte si, že platí prepočet

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Ak je nejaká veličina vektorová, tak sa jej nové zložky spočítajú násobením tou istou maticou.²⁴⁴ Veď intuícia nám sama vraví, že vektorová veličina je šípka, rovnako tak, ako je aj polohový vektor šípka.

V relativite sa všetky veci dejú v štvorrozmernom, tzv. *Minkowského priestore*. Slovo „dejú“ je tu namieste. Prvkami tohoto priestoru sú (z fyzikálneho hľadiska) udalosti charakterizované štvoricou čísel (ct, x, y, z) , tzn. časom a miestom.²⁴⁵ V celom ďalšom texte ich budem označovať veľkými

²⁴³Nefakajte sa. Terminológia je tu podobne jednoduchá a rovnako intuitívna, ako aj v iných vedných odvetviach. Uvážte napríklad slová štvorhlas (hudba), štvorča (medicina), štvorbob (šport), štvorlistok (botanika), štvorhlavý pes (genetická zoológia), poštvernožky (teória umývania dlážky), či štvorhrbolie (teória úpravy cestnej komunikácie).

²⁴⁴Pre priaznivcov matematickej analýzy, matica sa nazýva *Jacobiho* a jej zložky sa zrážajú ako parciálne derivácie starých súradníc podľa nových.

²⁴⁵Rýchlosť svetla pred časom je tam len z rozmerových dôvodov. V relativite sa navyše často stotožňuje jeden meter a jedna sekunda. Prehlási sa, že čas jeden meter je čas, za aký svetlo prejde jeden meter. Potom je $c = 1$ a v rovniciach ho možno úplne vynechať.

písmenami a budú mať za sebou ešte dolný (alebo horný) index nejaké grécke písmeno. No a aby to nestačilo, skalárny súčin je tu zadefinovaný inak, ako sme zvyknutí. Ak máme štvorvektory $A_\mu = (A_0, A_1, A_2, A_3)$ a $B_\mu = (B_0, B_1, B_2, B_3)$, tak ich skalárny súčin je (z definície v danom priestore!)

$$A_\mu B^\mu = A^\mu B_\mu = A_0 B_0 - A_1 B_1 - A_2 B_2 - A_3 B_3.$$

Hornými a dolnými indexami sa netreba nechať zmiast'. Je konvencia že pri skalárnom súčine sa jeden z indexov napíše hore. Jeho zmysel sa poriadne vyjasní až na prednáškach z teórie relativity. Veľkosťou štvorvektora A budeme rozumieť

$$A_\mu A^\mu = A_0^2 - A_1^2 - A_2^2 - A_3^2$$

a vidno že môže byť kladná, záporná i nulová (a to dokonca aj pre štvorvektor s nenulovými zložkami).

Pri prechode k inak natočeným osiam sa musí veľkosť štvorvektora zachovať. My z relativity vieme, že príkladom takejto dobrej zmeny súradníc sú napríklad špeciálne Lorentzove transformácie

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma \frac{v}{c} & 0 & 0 \\ -\gamma \frac{v}{c} & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

To je najjednoduchší prípad. Vo všeobecnosti sa transformuje nejakou maticou $\Lambda_{\mu\nu}$. Ak označíme polohový štvorvektor ako R_μ , tak transformácie súradníc možno zapísať ako

$$R'_\mu = \Lambda_{\mu\nu} R_\nu.$$

Z definície bude štvorvektorom každá taká štvorica čísel, ktorá sa bude transformovať rovnako ako polohový štvorvektor.

Štvorvektor rýchlosti

Predstavte si, že pohyb nejakého astronauta je zadaný parametricky množinou štvoric čísel

$$R_\mu(\tau) = (ct(\tau), x(\tau), y(\tau), z(\tau)),$$

kde τ je jeho vlastný čas, to jest časť ktorý by on nameral na svojich hodinách.²⁴⁶ Derivujeme túto *sветоčiaru*²⁴⁷ podľa vlastného času a nazvime ju

²⁴⁶ Čas t tu má zmysel času na hodinách pevne spojených so zvolenou inerciálnou vzťažnou sústavou, v ktorej pohyb pozorujeme.

²⁴⁷ Tak sa naozaj volá tá trajektória v štyroch rozmeroch.

štvorrýchlosťou U_μ . To jest

$$U_\mu = \frac{dR_\mu}{d\tau} = \left(c \frac{dt}{d\tau}, \frac{dx}{d\tau}, \frac{dy}{d\tau}, \frac{dz}{d\tau} \right).$$

Pokúsme sa jej zložky spočítať explicitnejšie. Ak budeme funkcie $x(\tau)$ (a ostatné) chápať ako funkcie $x(t(\tau))$, prejde derivovanie priestorových súradníc na

$$\frac{dx}{d\tau} = \frac{dx}{dt} \frac{dt}{d\tau}.$$

Ak si ešte spomenieme, že $\frac{dt}{d\tau} = \gamma(\mathbf{v})^{248}$, tak dostávame

$$U_\mu = (\gamma c, \gamma v_x, \gamma v_y, \gamma v_z).$$

Všimnite si, že priestorové zložky sú bežná rýchlosť násobená $\gamma(\mathbf{v})$.²⁴⁹ Takže ten názov tam asi nebude úplne nadarmo. A ako si overíme, že sa pri zmene súradníc transformuje štvorrýchlosť rovnakou maticou ako štvorvektor polohy? Jednoducho derivujeme čiarkovaný štvorvektor a uvidíme:

$$U'_\mu = \frac{d}{d\tau} (\Lambda_{\mu\nu} R_\nu) = \Lambda_{\mu\nu} \frac{dR_\nu}{d\tau} = \Lambda_{\mu\nu} U_\nu$$

Všetko je v poriadku, štvorrýchlosť sa transformuje, ako má. Pri zmene súradníc nezmení svoju veľkosť.

Štvorvektor energie a hybnosti

Definujme štvorhybnosť (celkom intuitívne) ako

$$P_\mu = mU_\mu,$$

kde m je (pokojová) hmotnosť častice, ktorej pohyb opisujeme. Keďže ide o násobenie číslom (skalárny násobok), dostali sme znova štvorvektor. Jeho zložky sú

$$P_\mu = (\gamma mc, \gamma mv_x, \gamma mv_y, \gamma mv_z) = (E/c, p_x, p_y, p_z).$$

Ľaľa. Energia a hybnosť spolu tvoria štvorvektor! A nielen to! My navyše vieme, že všetky 4 veci v poslednom okienku sú zachovávané sa veličiny. To znamená, že aj štvorvektor energie a hybnosti nejakej sústavy je zachovávaná sa veličina.²⁵⁰ Keď už sme až tu, spočítajme si veľkosť tohoto štvorvektora. Podľa vyššie definovaných pravidiel musí platiť

$$P_\mu P^\mu = E^2/c^2 - p^2.$$

²⁴⁸Ak si nespomenieme, tak si treba naštudovať nejaký článok o dilatácii času.

²⁴⁹Tiež si všimnite, že veľkosť štvorrýchlosti je vždy c^2 .

²⁵⁰Radosť v tvári, úsmev v očiach. Rovnice treba riešiť s entuziazmom. :-)

Veľkosť štvorvektora ale nezávisí od zvolenej vzťažnej sústavy. Napríklad vo vzťažnej sústave, kde teleso stojí, má štvorhybnosť zložky $(mc, 0, 0, 0)$ a veľkosť $P_\mu P^\mu = m^2 c^2$. A tak prichádzame k dôležitej rovnici

$$E^2/c^2 = p^2 + m^2 c^2.$$

Veľkosť každého štvorvektora hybnosti a energie je teda $m^2 c^2$. Špeciálne si všimnite, že pre častice s nulovou pokojovou hmotnosťou, napr. fotóny, je veľkosť štvorhybnosti nulová.

S novým aparátom späť k úlohe

Do prvej zrážky vchádzajú častice s nejakými štvorhybnosťami a vystupujú s nejakými inými štvorhybnosťami. Zaveďme označenia

$\rightarrow P_{1\mu}^\gamma$ (resp. $P_1^{\gamma\mu}$) = $(\frac{h}{\lambda}, \frac{h}{\lambda}, 0, 0)$ pre štvorhybnosť fotónu pred zrážkou,

$\rightarrow P_{1\mu}^{e^-}$ (resp. $P_1^{e^-\mu}$) = $(mc, 0, 0, 0)$ pre štvorhybnosť elektrónu pred zrážkou,

$\rightarrow P_{2\mu}^\gamma$ (resp. $P_2^{\gamma\mu}$) = $(\frac{h}{\lambda'}, \frac{h}{\lambda'} \cos \theta, -\frac{h}{\lambda'} \sin \theta, 0)$ pre štvorhybnosť fotónu po zrážke a

$\rightarrow P_{2\mu}^{e^-}$ (resp. $P_2^{e^-\mu}$) = $(\frac{E}{c}, \frac{Ev}{c^2} \cos \varphi, \frac{Ev}{c^2} \sin \varphi, 0)$ pre štvorhybnosť elektrónu po zrážke.

To nevyzerá moc pekne, ale až na konvenčné μ by boli označenia rovnako škaredé aj v klasickej mechanike. Zákon zachovania štvorhybnosti sa dá zapísať ako

$$\left(P_1^\gamma + P_1^{e^-}\right)_\mu = \left(P_2^\gamma + P_2^{e^-}\right)_\mu$$

Všimnite si, že v $P_{2\mu}^{e^-}$ vystupuje veľmi veľa neznámych veličín (E , v a φ). Ale my už vieme z predošlého odstavca, že veľkosť tejto štvorhybnosti je $m^2 c^2$. Ak ponecháme túto štvorhybnosť na ľavej strane rovnice samú a umocníme na druhú, všetky tieto neznáme nám vypadnú! Postupne dostávame:

$$\begin{aligned} \left(P_1^\gamma + P_1^{e^-} - P_2^\gamma\right)_\mu &= \left(P_2^{e^-}\right)_\mu \\ \left(P_1^\gamma + P_1^{e^-} - P_2^\gamma\right)_\mu \left(P_1^\gamma + P_1^{e^-} - P_2^\gamma\right)^\mu &= \left(P_2^{e^-}\right)_\mu \left(P_2^{e^-}\right)^\mu \end{aligned}$$

Vyzerá to hrozivo? Nemôže, je to len mechanické narábanie s výrazmi. Roznásobíme podľa pravidla maximálnej promiskuity.²⁵¹ Na pravej strane

²⁵¹Každý s každým.

ostane $m^2 c^2$. Ľavú stranu upravíme na dvakrát, pamätajúc na podivný skalárny súčin:

$$\begin{aligned}
 P_{1\mu}^{\gamma} P_1^{\gamma\mu} &+ P_{1\mu}^{e-} P_1^{e-\mu} &+ P_{2\mu}^{\gamma} P_2^{\gamma\mu} &+ \\
 2P_{1\mu}^{\gamma} P_1^{e-\mu} &- 2P_{1\mu}^{\gamma} P_2^{\gamma\mu} &- 2P_{1\mu}^{e-} P_2^{\gamma\mu} &= m^2 c^2 \\
 0 &+ mc^2 &+ 0 &+ \\
 2\frac{h}{\lambda} mc &- 2\frac{h^2}{\lambda\lambda'} (1 - \cos \theta) &- 2\frac{h}{\lambda'} mc &= m^2 c^2
 \end{aligned}$$

Síce tam bolo veľa členov, ale ešte viac núl v zložkách štvorhybností. Celé sa to teda zvrhlo na jednoduché násobenie. Teraz máme v rovnici jediná neznámu λ' . Po drobných úpravách máme *prakticky bez námahy*²⁵²

$$\lambda' = \lambda + \frac{h}{mc} (1 - \cos \theta).$$

Ako bez námahy overíme, aká bude vlnová dĺžka odletujúceho fotónu v druhej zrážke? Vchádzajúci fotón so sebou nesie veľa neznámeho - svoju vlnovú dĺžku a uhol, z ktorého prichádza. Veci, ktoré nás vôbec nezaujímajú! Ale vieme, že veľkosť tohoto štvorvektora je nulová.²⁵³ Aby sme mohli zapísať rovnice, zavedme ešte označenia

$\rightarrow P_{2\mu}^{\gamma*}$ (resp. $P_2^{\gamma*\mu}$) = $(\frac{h}{\lambda_1}, \frac{h}{\lambda_1} \cos \psi, -\frac{h}{\lambda_1} \sin \psi, 0)$ pre štvorhybnosť fotónu vchádzajúceho do druhej zrážky,

$\rightarrow P_{3\mu}^{e-}$ (resp. $P_3^{e-\mu}$) = $(mc, 0, 0, 0)$ pre štvorhybnosť elektrónu po druhej zrážke a

$\rightarrow P_{3\mu}^{\gamma*}$ (resp. $P_3^{\gamma*\mu}$) = $(\frac{h}{\lambda_2}, \frac{h}{\lambda_2}, 0, 0)$ pre štvorhybnosť fotónu vychádzajúceho z druhej zrážky.

²⁵²Celá námaha sa tu zvrháva na pochopenie štvorvektorov. Akonáhle si s nimi potrasíme rukou a pochopíme reči ich kmeňa, môžeme ich používať úplne zadarmo so všetkými výhodami, ktoré prinášajú. Tých je široké spektrum! Informujte sa u najbližšieho dodávateľa!

²⁵³Častice s nulovou pokojovou hmotnosťou majú

$$m = 0 \quad \Rightarrow \quad m^2 c^2 = 0.$$

Zákon zachovania štvorhybnosti dáva:

$$\begin{aligned}
 \left(P_2^{\gamma*} + P_2^{e-}\right)_\mu &= \left(P_3^{\gamma*} + P_3^{e-}\right)_\mu \\
 \left(P_2^{\gamma*}\right)_\mu &= \left(P_3^{\gamma*} + P_3^{e-} - P_2^{e-}\right)_\mu \\
 0 &= \left(P_3^{\gamma*} + P_3^{e-} - P_2^{e-}\right)_\mu \left(P_3^{\gamma*} + P_3^{e-} - P_2^{e-}\right)^\mu \\
 0 &= m^2 c^2 + 0 + m^2 c^2 + 2 \frac{h}{\lambda_2} m c - 2 m E - 2 \frac{h}{\lambda_2} \left(1 - \frac{v}{c} \cos \varphi\right)
 \end{aligned}$$

Tým istým spôsobom sa môžeme zbaviť odletujúceho fotónu v prvej zrážke a prideme k rovnici

$$0 = m^2 c^2 + 0 + m^2 c^2 + 2 \frac{h}{\lambda} m c - 2 m E - 2 \frac{h E}{\lambda c} \left(1 - \frac{v}{c} \cos \varphi\right).$$

Získané dve rovnice majú rovnaké ľavé a teda aj pravé strany. Po vykrátení rovnakých členov v oboch rovniciach a pár úpravách dostávame

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{\lambda} \left(1 - \frac{E}{m c^2} \left(1 - \frac{v}{c} \cos \varphi\right)\right) &= \frac{1}{\lambda_2} \left(1 - \frac{E}{m c^2} \left(1 - \frac{v}{c} \cos \varphi\right)\right) \\
 \Downarrow \\
 \lambda &= \lambda_2,
 \end{aligned}$$

čo sme chceli ukázať.

FX G4 – ENTERPRISE



Cez vianočné prázdniny sa Marcel každoročne vracia z internátu domov. Keďže doma nemá internet, väčšinu času trávi hraním počítačových hier a pozeraním seriálov. Naposledy napríklad dal za jeden deň toľko dielov Star Trek-u, že mal sen, v ktorom bol na palube vesmírnej lode Enterprise. Tá sa práve nachádzala v časti vesmíru, odkiaľ bolo vidno hviezdy na oblohe rozmiestnené rovnomerne, t.j. tak, že počet hviezd na priestorový uhol $dN/d\Omega = \rho$ bol približne konštantný.

- (a) Aké rozdelenie hviezd by na lodi pozoroval, keby sa vzhľadom na predoslú sústavu pohyboval dopredu rýchlosťou v ?

Predstavte si, že by sme namiesto hviezd mali na oblohe monochromatické zdroje svetla s frekvenciou f s celkovým výkonom P .

- (b) Ako sa zmení frekvencia svetla v pohybujúcej sa sústave v závislosti od smeru, ktorým sa Marcel pozerá?

- (c) Čo vieme na základe častí (a) a (b) povedať o zmene hustoty žiarivého výkonu $\Pi = dP/d\Omega$ hviezdneho pozadia?

Zdroj: Teória relativity (skriptá FMFI UK)



Každodenná skúsenosť z komerčných sfér v oblasti science-fiction nás presvedča, že bez plazmovej televízie a akého-takého poznania vybraných kapitol zo špeciálnej teórie relativity sme v modernej spoločnosti úplne stratení. Cieľom tejto úlohy je rozšíriť si obzory a dostať sa tak o krok bližšie k tomuto poznaniu.²⁵⁴ Na úvod si vezmime jednoduché pozorovanie zo seriálu Star Trek. Loď Enterprise musí pred prechodom do hyperpriestoru zrýchľovať na rýchlosť blízku rýchlosti svetla. Autori seriálu nás presvedčajú, že z paluby lode pri tom uvidíme asi toto:

http://www.fks.sk/fx/zbierka/hyperspace_jump.mp4

²⁵⁴Zaujímavosťou sa môžu o krok priblížiť aj k plazmovej televízii, čo tiež rozširuje obzory. :-)

(Komentár: Polohy všetkých hviezd sa vzdialia od bodu, ku ktorému sa pohybujeme.)

Bádanie však odhaľuje zdrvujúcu skutočnosť – Rápidne odlišnú od masovej produkcie filmového neba! To, čo by sme videli *naozaj* je krásne zobrazené na tomto videu:²⁵⁵

http://www.fks.sk/fx/zbierka/special_relativity.mp4

(Komentár: Polohy všetkých predmetov sa posunú *do* bodu, ku ktorému sa pohybujeme. Okrem toho sa v úzkom priestore pred nami prejaví modrý Dopplerov posun a výrazne sa zvýši intenzita dopadajúceho svetla. Pri rýchlostiach blízkyh rýchlosti svetla sa celý náš obraz sveta zrúti do malej a veľmi žiarivej oblasti pred nami. V ostatných smeroch svet upadne do tmy.)

Ak vás táto skutočnosť prekvapila, znamená to, že ste lacní konzumenti filmovej produkcie. Ukážeme si, že prihliadajúc na fakt, že rýchlosť svetla c je rovnaká vo všetkých vzťažných sústavách, sú deje na druhom video úplne intuitívne. Tak čo? Dostatočná motivácia čítať ďalej?

Časť (a)

Na mechanike nás naučili, ako vyzerá pohyb telies z pohľadu rôznych vzťažných sústav. Ak sa sústava S' vzdáľuje rýchlosťou $\mathbf{v}$ od sústavy S a v sústave S' sa pohybuje teleso T rýchlosťou $\mathbf{u}$, tak v sústave S sa pohybuje teleso T rýchlosťou $\mathbf{v} + \mathbf{u}$. Vektory si predstavíme ako šípky a novú rýchlosť získame ako súčet dvoch šípok.

Ak uvážime relativistické efekty, myšlienka skladania rýchlosti *zostáva*. Pravidlo, ako sa to robí, tu však vyzerá *inak*. Musí to byť *inak*. Predstavte si, že teleso T je fotón, teda $|\mathbf{u}| = c$. Ak prejdeme do inej sústavy a *pripočítame* nejakú rýchlosť $\mathbf{v}$,²⁵⁶ tak výsledná rýchlosť musí mať *opäť* veľkosť c . Fotón sa predsa pohybuje rýchlosťou c *vo všetkých* vzťažných sústavách a práve pohyb fotónov je to, čo nás v tejto úlohe zaujíma.

Bežné skladanie šípok tu evidentne nefunguje.²⁵⁷ Aby sme odhalili správne pravidlo, zrekapitulujme si pár dôležitých znalostí zo špeciálnej teórie relativity.

Celá relativita sa zjednoduší, ak prijmeme dve bizarné myšlienky:

²⁵⁵Toto video mi poslal Lukáš Tomek, za čo som mu vďačný.

²⁵⁶Samozrejme, pre fyzikálne prípustné situácie musí byť $|\mathbf{v}| < c$.

²⁵⁷Možno ste si niekedy predstavovali, že dosiahnuť nadsvetelnú rýchlosť nie je vôbec ťažké. Stačí vyslať zo Zeme raketu rýchlosťou $c/2$ a vnútri rakety vrhnúť v smere jej pohybu nejaké teleso opäť rýchlosťou $c/2$. Čo by sme však pozorovali zo Zeme *nie je* pohyb telesa rýchlosťou svetla, ale len rýchlosťou $4c/5 < c$. V relativite teda „ $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{4}{5}$ “. Kľúčový pojem: Dilatácia času. (Čo? Aké skracovanie času? Pozorujem deje v rakete *spomalene*?)

1. Existuje akýsi štvorrozmerný priestor (tzv. priestoročas²⁵⁸). Jeho body sú udalosti, tj. štvorice čísel (ct, x, y, z) popisujúce *kedy* a *kde* sa niečo udialo.
2. Štyri rozmery okrem iného znamenajú aj štvorkomponentné vektory (tzv. štvorvektory). Pri prechode z jednej vzťažnej sústavy sa transformujú rovnako ako polohový štvorvektor (ct, x, y, z) .²⁵⁹ Skalárny súčin dvoch štvorvektorov A_μ a B_μ je tu definovaný(!) ako

$$A_\mu B^\mu = A^\mu B_\mu = A_0 B_0 - A_1 B_1 - A_2 B_2 - A_3 B_3.$$

Ak prechádzam zo vzťažnej sústavy S' do sústavy S, tak nejako mením „smer“ priestorových a časových osí²⁶⁰ a polohu počiatku, bodu $(0, 0, 0, 0)$. Všetky súradnice sa pritom menia na nové jednotným vzťahom

$$\begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Lambda_{00} & \Lambda_{01} & \Lambda_{02} & \Lambda_{03} \\ \Lambda_{10} & \Lambda_{11} & \Lambda_{12} & \Lambda_{13} \\ \Lambda_{20} & \Lambda_{21} & \Lambda_{22} & \Lambda_{23} \\ \Lambda_{30} & \Lambda_{31} & \Lambda_{32} & \Lambda_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix},$$

kde stĺpček vpravo vyjadruje posunutie počiatku a prvky matice²⁶¹ $\Lambda_{\mu\nu}$ sú konštanty.²⁶²

My budeme skúmať najjednoduchší prípad, keď majú sústavy S a S' spoločný počiatok, rovnako natočené osi a keď sa sústava S' pohybuje voči sústave S rýchlosťou $\mathbf{v}$ v kladnom smere osi x . Vtedy je stĺpček vpravo nulový

²⁵⁸V literatúre nájdete aj názov časopriestor. Ide samozrejme o tú istú vec a správne názvy sú oba. Vznikli však prekladom z dvoch rôznych slov: Z anglického *spacetime*, resp. z nemeckého *die Raumzeit*.

²⁵⁹A to z toho istého dôvodu, prečo sa v našom trojrozmernom priestore všetky vektory transformujú ako polohový vektor.

²⁶⁰Pokiaľ sa S a S' voči sebe nepohybujú, ide môže ísť o bežné rotácie priestorových osí, ktoré ponechávajú rovnakú časovú os. Pokiaľ sa voči sebe sústavy pohybujú, ide o tzv. hyperbolické rotácie (anglicky *boost*) pri ktorých sa nejako mení aj smer časovej osi.

²⁶¹Pre znalcov: Matica je len výhodný zápis sústavy lineárnych rovníc. Celá tá vec sa dá prepísať ako

$$\begin{aligned} ct &= \Lambda_{00}ct' + \Lambda_{01}x' + \Lambda_{02}y' + \Lambda_{03}z' + a_0 \\ x &= \Lambda_{10}ct' + \Lambda_{11}x' + \Lambda_{12}y' + \Lambda_{13}z' + a_1 \\ y &= \Lambda_{20}ct' + \Lambda_{21}x' + \Lambda_{22}y' + \Lambda_{23}z' + a_2 \\ z &= \Lambda_{30}ct' + \Lambda_{31}x' + \Lambda_{32}y' + \Lambda_{33}z' + a_3. \end{aligned}$$

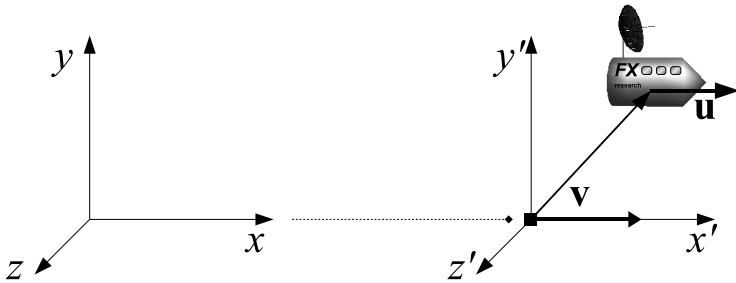
Koeficienty v rovniciach musia spĺňať isté požiadavky, ktoré sa lepšie formulujú v reči matíc.

²⁶²Pre znalcov: Matica Λ môže byť takmer ľubovoľná. Musí spĺňať len podmienky $\det \Lambda = 1$, $\Lambda_{00} \geq 1$ a $\Lambda^T \eta \Lambda = \eta$, kde η je matica 4×4 , ktorá má na diagonále čísla $(1, -1, -1, -1)$ a úzko súvisí s tvarom skalárneho súčinu.

a matica Λ má jednoduchý tvar²⁶³

$$\begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma \frac{v}{c} & 0 & 0 \\ \gamma \frac{v}{c} & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}, \text{ kde } \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}.$$

Aby sme objavili zákon skladania rýchlostí, uvažujme raketu FX (pozri obrázok), ktorá sa v S' pohybuje rýchlosťou $\mathbf{u}$ v kladnom smere osi x' .



Rýchlosť rakety v sústave S' je definovaná ako

$$\mathbf{u} = \frac{d\mathbf{r}'}{dt'},$$

čo sa v tomto prípade redukuje na $u = \frac{dx'}{dt'}$.

Je dôležité si uvedomiť, že čas v menovateli je čas v sústave S' . Keď chceme poznať rýchlosť $\mathbf{w}$ v sústave S , musíme derivovať nečiarkované súradnice podľa nečiarkovaného času, teda

$$\mathbf{w} = \frac{d\mathbf{r}}{dt},$$

čo sa v tomto prípade zjednoduší na $w = \frac{dx}{dt}$.²⁶⁴ Ale veď toto nie je vôbec ťažké spočítať. Stačí sa pozrieť na transformačný zákon (áno, tá matica) a

²⁶³Tu si treba dať pozor na to, že v je záporné, ak sa sústava S' pohybuje proti smeru osi x . To docielime aj zámenou $S \leftrightarrow S'$. To znamená, že pri prechode od čiarkovaných súradníc k nečiarkovaným vyzerá matica Λ rovnako, akurát v zmení znamienko na opačné.

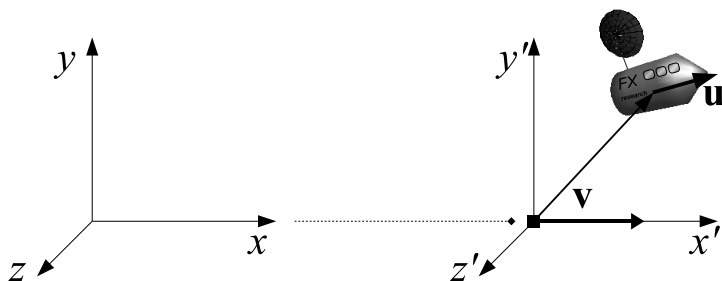
²⁶⁴Rozmyslite si, *prečo* vznikne zložením dvoch rovnobežných pohybov výsledný pohyb v rovnakom smere. Nie, tu nejde o relativitu, ale o skutočnosť, že vo vesmíre neexistuje žiadny preferovaný smer.

môžeme písať

$$\begin{aligned}
 w = \frac{dx}{dt} &= \frac{\gamma \frac{v}{c} (c dt') + \gamma dx'}{\frac{1}{c} (\gamma (c dt') + \gamma \frac{v}{c} dx')} \\
 &= \frac{v dt' + dx'}{dt' + \frac{v}{c^2} dx'} \\
 &= \frac{v + u}{1 + \frac{vu}{c^2}}.
 \end{aligned}$$

To je zložená rýchlosť. Všimnite si, že pre malé rýchlosti dáva naozaj $w = u + v$. Tiež si všimnite, že ak jedna z rýchlostí je rovná c , zložená rýchlosť je tiež rovná c . Presne, ako sme chceli!

Keď sme už prišli až sem, je jednoduché nájsť zovšeobecnený vzťah pre transformáciu všeobecného vektora rýchlosti $\mathbf{u} = (u_x, u_y, u_z)$.



Po aplikovaní transformačného zákona dostávame

$$\begin{aligned}
 w_x &= \frac{dx}{dt} = \frac{v + u_x}{1 + \frac{vu_x}{c^2}} \\
 w_y &= \frac{dy}{dt} = \frac{u_y}{\gamma \left(1 + \frac{vu_x}{c^2}\right)} \\
 w_z &= \frac{dz}{dt} = \frac{u_z}{\gamma \left(1 + \frac{vu_x}{c^2}\right)}.
 \end{aligned}$$

Položme si ešte opačnú otázku: Ako sa transformujú rýchlosti pri prechode z S do S'? Ak si uvedomíme, že v transformačnej matici stačí spraviť zmenu $v \rightarrow -v$, tak tú istú zmenu treba spraviť aj vo výsledku. Opačné

transformácie teda vyzerajú

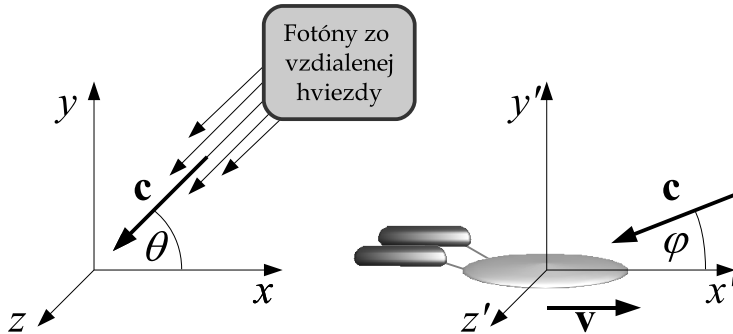
$$\begin{aligned}u_x &= \frac{dx'}{dt'} = \frac{w_x - v}{1 - \frac{vw_x}{c^2}} \\u_y &= \frac{dy'}{dt'} = \frac{w_y}{\gamma \left(1 - \frac{vw_x}{c^2}\right)} \\u_z &= \frac{dz'}{dt'} = \frac{w_z}{\gamma \left(1 - \frac{vw_x}{c^2}\right)}.\end{aligned}$$

Vráťme sa konečne k vesmírnej lodi Enterprise. Umiestnime ju do vzťažnej sústavy S'. Vieme, že v sústave S prichádzajú fotóny z nejakej vzdialenej hviezdy pod uhlom θ . Ich rýchlosť je teda po zložkách

$$w_x = -c \cos \theta \quad w_y = -c \sin \theta \quad w_z = 0$$

Uhol, pod ktorým uvidíme tú istú hviezdu v sústave lode Enterprise, môžeme určiť ako

$$\cos \varphi = \frac{-u_x}{c} = \frac{v - w_x}{c - \frac{vw_x}{c}} = \frac{v + c \cos \theta}{c + v \cos \theta}.$$



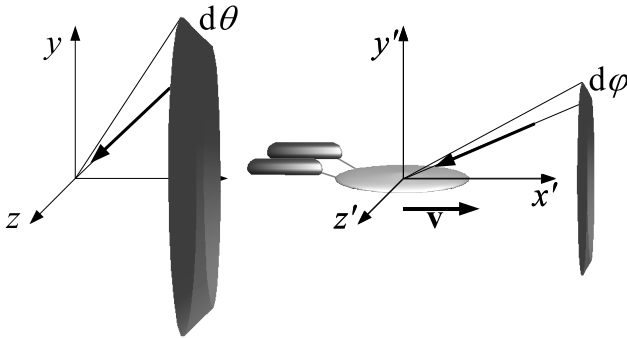
Nám sa, ako časom uvidíme, hodí inverzný vzťah. Po pár úpravách dostaneme

$$\cos \theta = \frac{c \cos \varphi - v}{c - v \cos \varphi}.$$

Už vieme, ako sa posunú polohy všetkých hviezd na oblohe. Ako sa zmení hustota hviezd? Všetky hviezdy nachádzajúce sa v rozmedzí uhlov $(\theta, \theta + d\theta)$ sa posunú do $(\varphi, \varphi + d\varphi)$. Ak si zrátame príslušné priestorové uhly a prenásobíme príslušnými hustotami hviezd na oblohe, dostávame rovnicu

$$2\pi\rho \sin \theta d\theta = 2\pi\rho(\varphi) \sin \varphi d\varphi,$$

kde sme zaviedli označenie $\rho(\varphi)$ pre hľadanú závislosť novej hustoty hviezd od uhlu ku smeru pohybu.



Úpravou ostatnej rovnice dostávame

$$\rho(\varphi) = \rho \frac{\sin \theta d\theta}{\sin \varphi d\varphi} = \rho \frac{d(\cos \theta)}{d(\cos \varphi)},$$

kde zapísanú deriváciu vieme zrátať vďaka vyjadreniu $\cos \theta$ od $\cos \varphi$ vyššie. Platí

$$\begin{aligned} \rho(\varphi) = \rho \frac{d(\cos \theta)}{d(\cos \varphi)} &= \rho \frac{c(c - v \cos \varphi) + v(c \cos \varphi - v)}{(c - v \cos \varphi)^2} \\ &= \rho \frac{c^2 - v^2}{(c - v \cos \varphi)^2} \\ &= \rho \frac{1}{\gamma^2 \left(1 - \frac{v}{c} \cos \varphi\right)^2}. \end{aligned}$$

Výsledok. Môžete si sami vyskúšať, čo to robí pre $\varphi = 0$ a uvidíte, že vpredu sa hustota hviezd skutočne zhusťuje. Tak ako ukazovalo úvodné video. Integráciou cez celý priestorový uhol si tiež môžete overiť, že celkový počet hviezd ostal nezmenený.

Časť (b)

Ako sa zmení frekvencia pozorovaného svetla v závislosti od smeru? Odpoveď pre $\varphi = 0$ a $\varphi = \pi$ poznáme. V tých prípadoch je to dobre známy Dopplerov jav. My ho máme nájsť pre všeobecný uhol. Napriek tomu sa dá úloha poriešiť priam prekvapivo jednoducho, ak využijeme druhú zo spomínaných bizarných myšlienok, z ktorých vyplývajú všetky zákony relativity: Štvorvektory.

So štvorvektormi sme mali možnosť sa bližšie zoznámiť vo vzoráku úlohy FX G3 ZÁBAVNÉ FOTÓNY. Tam sme predstavili štvorvektor polohy, štvorvektor rýchlosti a štvorvektor energie a hybnosti. Rovnako ako tam, aj tu sa ukáže veľmi užitočný práve posledne spomínaný. Hľadaná frekvencia svetla totiž úzko súvisí s energiou jeho fotónov, a tú vieme spočítať Lorentzovou transformáciou! Tzv. štvorhybnosť budeme označovať P_μ . Jej zložky sú²⁶⁵

$$P_\mu = (E/c, p_x, p_y, p_z).$$

Ak si ešte spomenieme, že pre fotón $E = hf$ a $|\mathbf{p}| = hf/c$, tak môžeme napísať rovnosť medzi štvorhybnosťou fotónu v sústave S a štvorhybnosťou fotónu v S'. Platí Lorentzova transformácia

$$\begin{pmatrix} \frac{hf}{c} \\ -\frac{hf}{c} \cos \theta \\ -\frac{hf}{c} \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma \frac{v}{c} & 0 & 0 \\ \gamma \frac{v}{c} & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{hf'}{c} \\ -\frac{hf'}{c} \cos \varphi \\ -\frac{hf'}{c} \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Špeciálne si všimnime rovnosť

$$\frac{hf}{c} = \gamma \frac{hf'}{c} - \gamma \frac{v}{c} \frac{hf'}{c} \cos \varphi,$$

odkiaľ jednoduchou úpravou dostaneme hľadanú závislosť

$$f'(\varphi) = f \frac{1}{\gamma (1 - \frac{v}{c} \cos \varphi)}.$$

Časť (c)

Ako sa zmení hustota žiarivého výkonu Π ? Vieme, ako sa vo vybranom smere zmení počet zdrojov svetla (označme tento násobok ako $a(\varphi)$) a frekvencia, a teda i energia prichádzajúcich fotónov (označme ako $b(\varphi)$). Ľahko by nás mohlo napadnúť, že žiarivý výkon v tomto smere sa zmení $(a(\varphi)b(\varphi))$ -násobne. To je však omyl! Zabudli sme na skutočnosť, že sa zmení aj *počet* dopadajúcich fotónov.

Aby sme do problému lepšie nahliadli, predstavme si, že istý zdroj svetla vyžaruje fotóny v rovinných vlnách vzdialených od seba jednu vlnovú dĺžku λ .²⁶⁶ V inej vzťažnej sústave sú tieto roviny vzdialené o λ' . Fotóny sa však

²⁶⁵ Ak ste pri čítaní tohoto odstavca pocítili závrate a neistotu, skúste si znova prelistovať spomínaný vzorák úlohy FX G3.

²⁶⁶ Druhá sada fotónov je vyslaná tak, aby sa nachádzala napr. v minime vlny predchádzajúcich fotónov. To je znova rovina a jej body majú skvelú vlastnosť – nulovosť $\mathbf{B}$ a $\mathbf{E}$. Ak je EM pole v istom bode a čase jednej vzťažnej sústavy nulové, tak v tomto bode a čase je EM pole nulové aj vo všetkých iných vzťažných sústavách. Takéto body sú v dráhe fotónu vzdialené práve o vlnovú dĺžku fotónu v danej vzťažnej sústave. A to sú vzdialenosti rovín, ktoré uvažujeme. Týmto sme vzájomné polohy fotónov definovali *objektívne*.

stále pohybují rychlostou světla, a preto ich budeme registrovať toľkokrát viac, koľkokrát sa zmenšila ich vlnová dĺžka. To je to však opäť $b(\varphi)$, pretože vlnová dĺžka závisí len od prevrátenej hodnoty frekvencie.

Takto sa úvahou dostávame k správne výsledku

$$\Pi(\varphi) = \Pi a(\varphi) b^2(\varphi) = \frac{\Pi}{[\gamma (1 - \frac{v}{c} \cos \varphi)]^4}.$$

Dosadením napr. pre $v = c/2$ môžeme zistiť, že priamo pred nami sa žiarivý výkon zväčší na 9-násobok, za nami sa zmenší na jednu deväťtinu. Na kapitánskom mostíku lode Enterprise je teda poriadne horúco a určite by sme si naň nemali zabudnúť vziať slnečné okuliare. S týmto nerátali ani tvorcovia Hviezdnych vojen!

H

Matematické úlohy

In mathematics, you don't understand things. You just get used to them.

JOHN VON NEUMANN

FX H1 – ROMANTIČKA



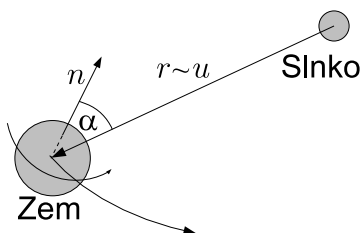
Bea nedávno čítala Malého Princa a rozhodla sa, že aj jej sa veľmi páčia západy slnka. Aby jej však nezovšedneli a aby si ich patrične vychutnala, odsťahovala sa na severný pól. Tam je totiž západ slnka len raz za rok, a navyše trvá sakramentsky dlho. Ozať, ako dlho?

Zdroj: Úlohu vymyslel Kubus

🌿 VZORÁK JAKUB 🌿

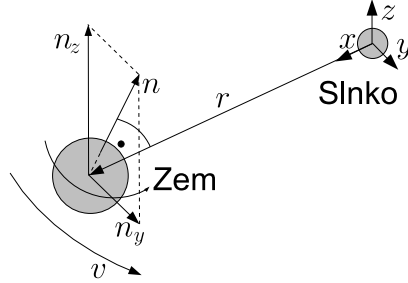
Tento príklad vyriešim za výdatnej pomoci vektorov a šikovních operácií s nimi.

Označím si $\mathbf{n}$ jednotkový vektor v smere zemskej osi. Tento vektor je kolmý na povrch Zeme na póloch. Teda je to normálový vektor dotykovej roviny severného pólu. Ďalej označím $\mathbf{r}$ polohový vektor Zeme voči Slnku. Vektor $\mathbf{r}$ predelený svojou dĺžkou bude jednotkový vektor v smere zo Slnka do stredu Zeme, označím ho $\mathbf{u}$. Potom platí, že skalárny súčin $\mathbf{n} \cdot \mathbf{u} = \cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha$, kde uhol α je uhol medzi zvislicou na severnom póle a spojnicou Zem-Slnko. Našou úlohou je nájsť čas, za ktorý sa tento zmení z hodnoty $90^\circ - \gamma$ (vtedy sa slnečný kotúč dotkne obzoru) na $90^\circ + \gamma$ (vtedy sa práve celý slnečný kotúč dostal pod obzor), kde $\gamma \approx 16'$ je zdanlivý polomer Slnka zo Zeme.



Ostáva nám vhodne vybrať súradnicovú sústavu (tú chceme pravouhlú, aby skalárny súčin jednotkových vektorov udával skutočne kosínus uhla nimi zovretého!), určiť vektory $\mathbf{n}$ a $\mathbf{u}$, z nich skalárny súčin a sme skoro hotoví. Počiatok mojej sústavy umiestnim do stredu Slnka. Smery súradnicových osí zvolím tak, ako je to znázornené na obr.2, ktorý dokumentuje situáciu na jesennú rovnodennosť (23. september) – kedy na severnom póle zapadá slnko: rovina xy je teda rovina ekliptiky (v nej leží trajektória obehu Zeme okolo Slnka), Zem v čase jesennej rovnodennosti leží na kladnej poloosi x .

Na rovnodennosť sú vektory $\mathbf{n}$ a $\mathbf{u}$ na seba kolmé ($\Leftrightarrow \mathbf{n} \cdot \mathbf{u} = 0$), preto vektor $\mathbf{n}$ musí mať x -ovú zložku $n_x = 0$. Jeho zvyšné komponenty určí ľahko, lebo viem, že s normálou ekliptiky (dá sa zapísať pomocou vektora $(0; 0; 1)$) zvierajú uhol $\varphi \approx 23^\circ 30'$. Os y je kolmá na x a jej orientáciu som zvolil tak, aby priemet vektora $\mathbf{n}$ do y -ového smeru bol kladný ($\Rightarrow$ aj rýchlosť Zeme na rovnodennosť bude mať kladnú y -ovú zložku). Os z je kolmá na ekliptiku a kladná polos smeruje nahor.



V nami zavedenej báze vyjadrím vektory pri aproximácii obežnej dráhy Zeme okolo Slnka kružnicou a zanedbaní pohybov zemskej osi:

$\mathbf{n} = (n_x; n_y; n_z) = (0; \sin \varphi; \cos \varphi)$ – vektor zemskej osi, resp. normála dotykovej roviny na póle (konštanta v čase),

$\mathbf{u} = (u_x; u_y; u_z) = (\cos \frac{2\pi t}{T}; \sin \frac{2\pi t}{T}; 0)$ – vektor od stredu Slnka do stredu Zeme, kde T je perióda obehu Zeme ($= 1$ rok) a t je čas uplynulý od niektorej jesennej rovnodennosti. Potom

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{u} = n_x u_x + n_y u_y + n_z u_z = \sin \varphi \sin \frac{2\pi t}{T}.$$

Ak t_1 je čas, kedy sa slnečný kotúč dotkne horizontu, a t_2 čas, kedy sa slnečný kotúč akurát ponára pod horizont, tak samotná doba západu slnka je $\Delta t = t_2 - t_1$. Pre časy t_1 a t_2 mám podmienky

$$\sin \varphi \sin \frac{2\pi t_1}{T} = -\cos(90^\circ - \gamma) = -\sin \gamma,$$

$$\sin \varphi \sin \frac{2\pi t_2}{T} = -\cos(90^\circ + \gamma) = \sin \gamma.$$

Samozrejme, že riešenia t_1 resp. t_2 nás nezaujímajú všetky (sledujeme iba západ v jednom roku, v ďalšom by sme už boli premrznutí na kosť :-)), zjavne iba tie z rozsahu $(-T/2; T/2)$ a preto dostávame jediné riešenie

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \frac{\arcsin \frac{\sin \gamma}{\sin \varphi}}{2\pi} T - \frac{\arcsin(-\frac{\sin \gamma}{\sin \varphi})}{2\pi} T = \frac{\arcsin \frac{\sin \gamma}{\sin \varphi}}{\pi} T \approx 32,5 \text{ h}.$$

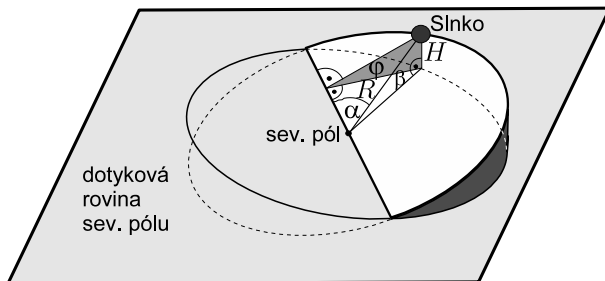
Pri vyčísľovaní si treba dať pozor na to, kedy počítame s radiánmi a kedy so stupňami.

Zanedbávam: ohyb svetla pri prechode atmosférou (práve pri pozorovaní objektov nízko nad obzorom je najmarkantnejší, chyba môže dosiahnuť až rád hodín!), excentricitu (eliptičnosť) obehu Zeme okolo Slnka, rozmery Zeme voči vzdialenosti Zem-Slnko, precesiu a nutáciu zemskej osi, obbeh Zeme okolo spoločného ťažiska Zem-Mesiak, slapové javy, zakrivenie povrchu Zeme v mieste pozorovania (teda predpokladám, že pozorovateľ je nízko nad povrchom) a pravdepodobne ešte mnoho iného. Napriek tomu si trúfam tvrdiť, že sme dostali dosť presný výsledok. Nothing else matters...

Iný správny prístup k riešeniu tohoto problému spočíva v tom, že ak zanedbáme pohyby Zemskej osi (precesia, nutácia), tak dotyková rovina na póle sa voči vzťažnej sústave spojennej so stredom Slnka nenaklápa, ale len posúva. A západ slnka trvá v takomto modeli práve od vtedy, keď sa dotyková rovina dotkne jedného okraja Slnka, až pokým sa nedotkne toho druhého. Nakoľko vieme, že uhol medzi normálou dotykovvej roviny a normálou ekliptiky je φ , tak vieme povedať, o koľko sa Zem musela pohnúť (v smere určenom priemetom zemskej osi do ekliptiky), aby dotyková rovina pólu „prerezala“ celé Slnko (vzdialenosť rovnú jeho priemeru D) $l = D / \sin \varphi$. No a táto vzdialenosť je tetivou oblúka (ak aproximujeme dráhu Zeme kružnicou), po ktorom sa Zem počas západu slnka na póle pohybovala. Dostávame čas

$$\Delta t = \frac{2R \arcsin \frac{D}{2R \sin \varphi}}{v_{Zem}} \approx \frac{D}{v_{Zem} \sin \varphi} \approx 32,5 \text{ h.}$$

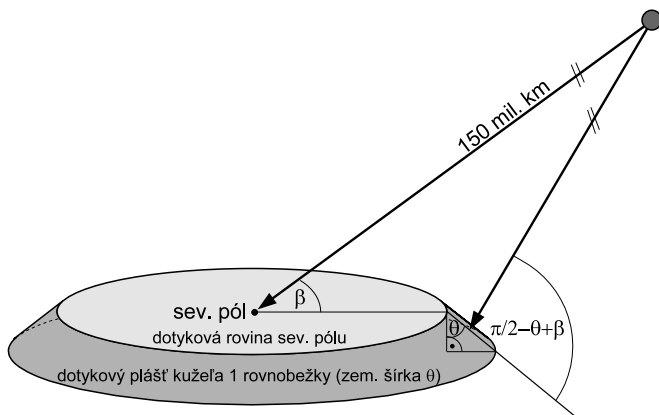
Ešte jedna poznámka: Hoci presné rovnice (v súlade s horeuvedenými aproximáciami) nedávajú pekné riešenie pre výšku slnka β na poludnie počas roka, riešenie tohoto problému v tvare $\beta = \pi/2 - \theta - \varphi \sin \frac{2\pi t}{T}$ pre miesto severne od obratníka Raka (južnejšie sa vo výraze menia znamienka) na zemepisnej šírke θ dosahuje pre pozemské parametre presnosť lepšiu ako $18'$. Použitím tohto priblíženia sa dalo dospieť k slušnému výsledku $\Delta t = 2 \frac{\arcsin \frac{\gamma}{2\pi}}{\gamma} T \approx \frac{\gamma}{\pi \varphi} T \approx 32 \text{ h}$. Treba poznamenať, že toto priblíženie platí len preto, že pre naše φ platí relatívne presne $\sin \varphi \approx \varphi$. Vzťah $\beta = \pi/2 - \theta - \arcsin(\sin \varphi \sin \frac{2\pi t}{T})$ je presný pre náš zjednodušený model. To vidno pre pól z nášho starého známeho skalárneho súčinu $\mathbf{n} \cdot \mathbf{u}$, ktorý však je málo názorný. Preto pridávam ešte jeden obrázok, kde sa na situáciu pozeráme z dotykovvej roviny severného pólu.



Trajektória Slnka je kružnica ležiaca v rovine zvierajúcej s našou rovinou pozorovateľa uhol φ . Výška Slnka nad obzorom je $\beta = \arcsin \frac{H}{R}$. Výšku H si však viem jednoducho vyjadriť z tých pravouhlých trojuholníkov. Vyznačený trojuholník je v rovine kolmej na priesečnicu dotykovj roviny s rovinou obehu Slnka okolo severného pólu (teda je v rovine kolmej na obe spomenuté roviny), preto tam vystupuje práve uhol, ktorý zvierajú tieto dve roviny, čiže φ . Ak ešte dodám závislosť $\alpha = \frac{2\pi t}{T}$ pre rovnomerný pohyb Slnka po kružnici, tak dostanem starý známy výraz

$$\beta = \arcsin(\sin \frac{2\pi t}{T} \sin \varphi).$$

A len tak mimochodom, keď už vieme výšku Slnka na póle, v ľubovoľnej zemepisnej šírke θ bude na poludnie výška Slnka len posunutá o $\pi/2 - \theta$. (Na rozdiel od pólu, toto naozaj platí len na poludnie, t.j. keď sú všetky čiary na obrázku v jednej rovine.)²⁶⁷



²⁶⁷Rozsiahlejší text o tejto problematike môžete nájsť na adrese http://www.fks.sk/fx/zbierka/slnecny_voz.pdf

FX H2 – STARCRAFT



Ferko a Tomáš sú zažratí do svojej obľúbenej počítačovej hry, klikajú ostrošesť, stavajú armády, schyľuje sa k veľkej bitke. Tomáš posiela do boja X jednotiek, Ferko Y rovnakých jednotiek. Nájdite časový priebeh počtu jednotiek na oboch stranách, čas trvania bitky i konečný stav.

Môžete predpokladať, že obaja hráči sú skúsení – jednotky po sebe strieľajú fotónovými delami optimálnou stratégiou, a (kým sa nevykynožia), je ich veľmi veľa. Jedna jednotka stálym strieľaním zabije druhú (nebrániacu sa) za čas a .

Zdroj: Úlohu vymyslel Kubus

 VZORÁK KUBUS 

Najprv si musíme rozmyslieť, ako budú vlastne jednotky po sebe strieľať. Najvýhodnejšie je, keď budú všetci strieľať na tú istú súperovu jednotku – takto sa zrejme minimalizujú škody, ktoré môže nepriateľ spraviť nám. Inými slovami, minimalizujeme čas, ktorý má nepriateľ jednotky k dispozícii.

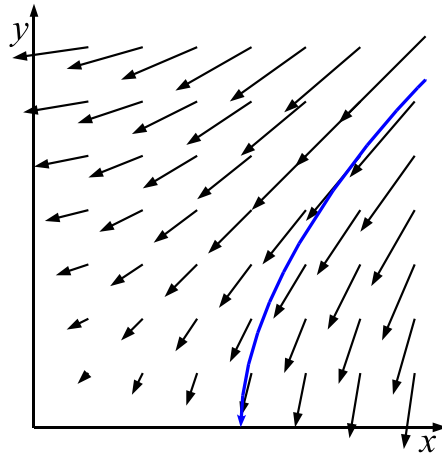
V istom čase má Tomáš x jednotiek a Ferko y jednotiek.²⁶⁸ Ak zanedbáme Ferkove straty za čas, kým zabije jednu Tomášovu jednotku, bude tento čas dlhý a/y . Podobne, Ferkove jednotky budú ubúdať po jednej každý čas a/x . Predpokladajme, že jednotiek je veľmi, ba priam až spojite veľa. Potom môžeme povedať, že rýchlosť ubúdania Tomášových jednotiek je $\frac{dx}{dt} = -1/\frac{a}{y} = -\frac{y}{a}$. Podobne to bude s Ferkom. Pre jednoduchosť si označme $A = 1/a$, potom si môžeme napísať diferenciálne rovnice pre vývoj stavu bitky:

$$\frac{dx}{dt} = -Ay \quad (95)$$

$$\frac{dy}{dt} = -Ax \quad (96)$$

Teraz už len stačí túto sústavu rovníc vyriešiť, čo sa dá robiť viacerými spôsobmi: Od trpezlivého šrotovania cez vysokovýkonné metódy až po znebaspadnuvšie „ľahko nahliadneme, že“. Všimnime si najprv, akého pekného tvaru je táto sústava. Rýchlosť v každom bode (stave bitky, môžeme si ho reprezentovať i bodom v rovine) je pevne určená iba týmto bodom (jeho súradnicami x, y). V každom bode si vieme nakresliť, ktorým smerom sa bude bitka vyvíjať a potom ju iba chladnokrvne odsimulovať. Keď už nič iné, dostaneme aspoň predstavu o tom, čo sa tu deje.

²⁶⁸Hneď vidíme zavedenú konvenciu $X = x(0)$ a $Y = y(0)$



Na chvíľu sa nezaujímajme o časový vývoj situácie, ale len o akýsi „relatívny“ vývoj x a y . Vieme, že

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{-Ax}{-Ay} = \frac{x}{y}.$$

Riešme túto rovnicu tak, ako každú inú separovateľnú:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{x}{y} \\ ydy &= xdx \\ \int_Y^{y(t)} ydy &= \int_X^{x(t)} xdx \\ y^2 - Y^2 &= x^2 - X^2 \\ x^2 - y^2 &= X^2 - Y^2 = \text{konšt.} = R^2 \end{aligned} \tag{97}$$

Vidíme, že rozdiel štvorcov počtov jednotiek oboch armád zostáva konštantný.²⁶⁹ To znamená, že v fázovom priestore sa bude stav bitky pohybovať po hyperbole. Takisto hneď vidíme, aký bude konečný stav, zrejme keď $y = 0$, tak $x = R$. Tým sme už vyriešili jednu časť úlohy.

Aký bude časový priebeh bitky? Dosadíme si do rovnice (95) za Y podľa (97):

$$\frac{dx}{dt} = -Ay = -A\sqrt{x^2 - R^2}$$

²⁶⁹Zavedením substitúcie $X^2 - Y^2 = R^2$ predpokladáme, bez ohľadu na všeobecnosti, že $X > Y$.

Toto môžeme znova riešiť ako obyčajnú separovateľnú diferenciálnu rovnicu:

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{x^2 - R^2}} \frac{dx}{dt} &= -A \\ \int_X^{x(t)} \frac{dx}{\sqrt{x^2 - R^2}} &= \int_0^t -A dt\end{aligned}\quad (98)$$

Čo so škaredým integrálom naľavo? Buď sme makači a ten hyperbolický sínus v tom vidíme, alebo ... nad tým chvíľu dumáme, a raz ho tam uvidíme. V škole nás učili, že integrál $1/\sqrt{1-x^2}$ je $\arcsin x$. Ako (sme) na to prišli? Ak si urobíme substitúciu $x = \sin u$, menovateľ sa nám kvôli $\sin^2 u + \cos^2 u = 1$ vyhubí s pozostatkom po substitúcii a už integrujeme iba du . Inšpirujme sa touto fintou, spomeňme si, že $\cosh^2 u - \sinh^2 u = 1$, dajme si substitúciu $x = R \cosh(u)$ a upravujeme:

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - R^2}} &= \int \frac{R \sinh u}{\sqrt{R^2 \cosh^2 u - R^2}} du \\ &= \int 1 du \\ &= u + c \\ &= \operatorname{arccosh}(x/R) + c \\ &= \ln \left(\frac{x}{R} + \sqrt{\left(\frac{x}{R}\right)^2 - 1} \right) + c\end{aligned}$$

Posledná úprava nebola potrebná, ale je zaujímavé ju spomenúť a derivovaním si môžete odvodiť jej pravdivosť.²⁷⁰ Vráťme sa ale naspäť ku našej

²⁷⁰Odvodiť sa dá veľmi jednoducho priamo z definície hyperbolického kosínusu. Nech $u = \cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$. Potom platí inverzná relácia $x = \operatorname{arccosh} u$. Upravujeme však prvú rovnicu. Prenásobením e^x a preusporiadaní členov máme:

$$\frac{1}{2}e^{2x} - ue^x + \frac{1}{2} = 0 \quad \implies \quad e^x = u \pm \sqrt{u^2 - 1}$$

Spätným dosadením a zdravými úvahami sa dá prísť na to, že správne je znamienko plus. Potom obyčajným zlogaritmovaním oboch strán rovnice dostávame

$$x = \ln \left(u + \sqrt{u^2 - 1} \right).$$

rovnici. Teraz môžeme rovnicu (98) previesť na tvar

$$\begin{aligned}\operatorname{arccosh}\left(\frac{x}{R}\right) - \operatorname{arccosh}\left(\frac{X}{R}\right) &= -At \\ \operatorname{arccosh}\left(\frac{x}{R}\right) &= \operatorname{arccosh}\left(\frac{X}{R}\right) - At \\ x &= R \cosh\left(\operatorname{arccosh}\left(\frac{X}{R}\right) - At\right).\end{aligned}$$

Fúj, aká škaredá rovnica. Ale aspoň máme explicitné vyjadrenie počtu Tomášových jednotiek od času. Z rovnice (97) vieme vytĺcť aj Ferkov stav i čas trvania bitky, ale je dosť nepríjemné to z tohto stavu upraviť na príjemne vyzerajúci výsledok.

Šikovní finta

Sme predsa nejakí fyzici, musíme nájsť nejaký krajší spôsob riešenia²⁷¹ – zamyslime sa nad tým, ako jednotky vlastne ubúdajú. V každom momente nejaká jednotka kynoží nejakú inú. Ak teda zabudneme na farby, celkový počet jednotiek ubúda úmerne sám sebe. Podobne si môžeme rozmyslieť, že (neformálne povedané) Ferkove jednotky ubúdajú o toľko rýchlejšie, koľko má Tomáš naviac jednotiek, teda rozdiel počtov jednotiek za zvyšuje úmerne sám sebe. Alebo jednoducho, napíšme si súčet a rozdiel rovníc (95) a (96) a sledujme tie divy:²⁷²

$$\begin{aligned}\frac{d(x+y)}{dt} &= -A(x+y) \\ \frac{d(x-y)}{dt} &= A(x-y)\end{aligned}$$

Ák sa na chvíľu budeme tváriť, že naše premenné sú $x+y$ a $x-y$, vyriešime dve naozaj jednoduché difky a dostávame

$$\begin{aligned}(x+y) &= (X+Y)e^{-At} \\ (x-y) &= (X-Y)e^{At}.\end{aligned}$$

²⁷¹Pekný spôsob Peťa Perešíniho, je vyjadriť si z (95) a (96) druhé derivácie x a y . Dostaneme dve jednoduché odseparované diferenciálne rovnice druhého rádu.

²⁷²Pre tie silnejšie povahy – väčšina takýchto lineárnych sústav diferenciálnych rovníc prvého stupňa o n premenných sa dá riešiť takýmto spôsobom. Zavedieme si nové premenné, ktoré sú lineárnou kombináciou starých tak, aby sme zo zadaných rovníc vedeli vyrobiť rovnice obsahujúce iba po jednej novej premennej. Tie potom vieme jednoducho riešiť a poskladať naspäť staré premenné.

Sčítame, odčítame, ako v škôlke:

$$\begin{aligned}
 x &= \frac{1}{2} ((X + Y)e^{-At} + (X - Y)e^{At}) \\
 &= \frac{1}{2} (X(e^{At} + e^{-At}) + Y(e^{-At} - e^{At})) \\
 y &= \frac{1}{2} ((X + Y)e^{-At} - (X - Y)e^{At}) \\
 &= \frac{1}{2} (X(e^{-At} - e^{At}) + Y(e^{At} + e^{-At}))
 \end{aligned}$$

alebo ešte krajšie,

$$\begin{aligned}
 x &= X \cosh(At) - Y \sinh(At) \\
 y &= Y \cosh(At) - X \sinh(At).
 \end{aligned}$$

Vyšlo nám to pekne krásne symetricky (akoby nie!), kto chce, môže si overiť, ako z toho vypadne konečný stav, podumať nad súvislosťami s hyperbolami, my už len dodáme, že stav, keď bude $y = 0$, teda koniec bitky, nastane v čase²⁷³

$$\begin{aligned}
 X \sinh(At) &= Y \cosh(At) \\
 \tanh(At) &= \frac{Y}{X} \\
 t &= \frac{1}{A} \operatorname{arctanh}\left(\frac{Y}{X}\right) \\
 \text{alebo} \quad t &= \frac{a}{2} \ln\left(\frac{X+Y}{X-Y}\right).
 \end{aligned}$$

²⁷³ Ako cvičenie si skúste sami dokázať, že

$$\operatorname{arctanh} u = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+u}{1-u}\right).$$

FX H3 – BÚRKA



Matúš práve sedel na lúke a počítal fyziku, keď sa zrazu prihnala veľká búrka. Počas búrky do zeme náhodne udierajú blesky, pričom na kilometer štvorcový za celú búrku priemerne udrie ρ bleskov. Aká je priemerná hodnota vzdialenosti Matúša a miesta, kde udel k nemu najbližší blesk?

Zdroj: Úlohu vymyslel Matúš

 VZORÁK KUBUS 

Riešenie 1.

Pravdepodobnosť, že najbližší blesk udel vo vzdialenosti r odo mňa, je súčinom pravdepodobnosti, že vo vzdialenosti r nejaký blesk udel, a pravdepodobnosti, že bližšie ako r žiaden neudrel. Samozrejme, pravdepodobnosť že blesk udrie *presne* do vzdialenosti r je nulová, ale my budeme v konečnom dôsledku integrovať, a teda hrať sa s pravdepodobnosťami že blesk udel vo vzdialenosti z intervalu $[r, r + dr)$.

Označme si pravdepodobnosť, že v nejakom pevne určenom území s plochou A počas celej búrky neudrel blesk, ako $p(A)$. (Náhodnosť udierania bleskov nám zaručí, že táto pravdepodobnosť je rovnaká pre ľubovoľné územie s plochou A .) Potom pravdepodobnosť, že vzdialenosť najbližšieho blesku je v intervale $[r, r + dr)$, bude rovná

$$[1 - p(\pi(r + dr)^2 - \pi r^2)] \cdot p(\pi r^2).$$

(Ak nevieš odkiaľ sa tento vzťah vzal, pozri si znova prvú vetu vzoráku.) Samozrejme, pre malé dr môžeme napísať

$$\pi(r + dr)^2 - \pi r^2 = \pi(r^2 + 2r dr + dr^2 - r^2) \approx 2\pi r dr,$$

a teda

$$p(\pi(r + dr)^2 - \pi r^2) \approx p(2\pi r dr) \approx p(0) + p'(0)2\pi r dr = 1 + p'(0)2\pi r dr.$$

(Zrejme pravdepodobnosť $p(0)$ že do prázdnej plochy neudrie blesk je 1.) Priemerná hodnota vzdialenosti, v ktorej udel najbližší blesk, bude teda

$$\begin{aligned} X &= \lim_{d \rightarrow 0} \left(\sum_{n=0}^{\infty} nd \cdot \mathbb{P}[\text{vzdialenosť najbližšieho blesku} \in [nd, nd + d]] \right) \\ &= \int_0^{\infty} r \cdot \mathbb{P}[\text{vzdialenosť najbližšieho blesku} \in [r, r + dr]] \\ &= \int_0^{\infty} r \cdot [1 - p(\pi(r + dr)^2 - \pi r^2)] \cdot p(\pi r^2) \\ &= \int_0^{\infty} -2\pi p'(0)r^2 p(\pi r^2) dr. \end{aligned}$$

(Prvý resp. druhý vzťah môžeme brať ako definíciu priemernej vzdialenosti. Ak vám nie je po chuti, skúste si priemernú vzdialenosť definovať sami. Ak to nejde, skúste si priemerné hocičo definovať na konečnejšom priestore udalostí.)

Teraz nám už len stačí zistiť funkciu p , pričom vieme že na jeden kilometer štvorcový udríe priemerne ρ bleskov. Zistíme ju napríklad takouto „sedliackou úvahou“. Vezmime si nejaké územie s plochou $A + B$ a rozdeľme ho na územia s plochami A a B . Potom musí platiť

$$\begin{aligned} p(A + B) &= \mathbb{P}[\text{do územia } A + B \text{ neudrel blesk}] \\ &= \mathbb{P}[\text{do územia } A \text{ neudrel blesk ani do územia } B \text{ neudrel blesk}] \\ &= \mathbb{P}[\text{do územia } A \text{ neudrel blesk}] \cdot \mathbb{P}[\text{do územia } B \text{ neudrel blesk}] \\ &= p(A)p(B). \end{aligned}$$

Takýto vzťah musí platiť pre ľubovoľné $A, B > 0$. Avšak jediné funkcie, ktoré tento vzťah spĺňajú, sú exponenciálne funkcie tvaru $p(x) = e^{\alpha x}$. (Prečo? Skúste si napríklad zderivovať rovnicu $p(x + y) = p(x)p(y)$ podľa x .) Ešte stále však musíme nájsť konštantu α , zrejme bude závisieť od ρ . Zoberme si veľmi malú plochu dA . Priemerný počet bleskov, ktorý udríe na túto plochu počas búrky, bude z definície ρ jednoducho ρdA , ale tiež ho môžeme napísať ako

$$\rho dA = \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot \mathbb{P}[\text{na plochu } dA \text{ udríe } n \text{ bleskov}].$$

Lenže, keď bude plocha dA veľmi malá, môžeme pravdepodobnosť že na ňu udrie viac ako jeden blesk oproti ostatným zanedbať, čím dostávame

$$\begin{aligned}\rho dA &\approx \mathbb{P}[\text{na plochu } dA \text{ udrie 1 blesk}] \\ &\approx \mathbb{P}[\text{na plochu } dA \text{ udrie aspoň 1 blesk}] \\ &= 1 - p(dA) = 1 - e^{-\rho dA} \\ &\approx 1 - (1 - \rho dA) = \rho dA,\end{aligned}$$

čiže $\alpha = -\rho$ a teda pravdepodobnosť, že na plochu s obsahom A počas búrky neudrie žiaden blesk, bude

$$p(A) = e^{-\rho A}.$$

Dosadením do pôvodného vzťahu pre X dostávame

$$X = \int_0^\infty 2\pi\rho r^2 e^{-\pi\rho r^2} dr,$$

čo nám už len zostáva zintegrovat'. Nechajme si to až na koniec a pozrime sa na trochu inú metódu riešenia.

Riešenie 2.

Zoberme si nejakú plochu A a rozdeľme ju na N malých kúskov. Ak budú tieto kúsky dostatočne malé, môžeme v prvom priblížení predpokladať, že na každý z nich dopadne nanajvýš jeden blesk. Pozrime sa na takýto jeden kúsok. Buď naň dopadne jeden blesk alebo nula bleskov. Jeho plocha je A/N , takže z definície ρ naň dopadne priemerne $\rho A/N$ bleskov. No ale to znamená, že jeden blesk tam bude s pravdepodobnosťou $\rho A/N$ a nula bleskov s doplnkovou pravdepodobnosťou $1 - \rho A/N$. (Mimochodom, rovnakú úvahu sme robili v prvom riešení.)

Celková pravdepodobnosť, že na celú plochu A dopadne n bleskov, bude potom v našom priblížení

$$\binom{N}{n} \left(\frac{\rho A}{N}\right)^n \left(1 - \frac{\rho A}{N}\right)^{N-n}.$$

(Lebo na niektorých n z N plôšok dopadne jeden blesk a na zvyšné nula bleskov.) No a zrejme čím vyššie bude N , tým menšie budú jednotlivé kúsky a tým presnejšie bude naše priblíženie, že na každý z nich dopadne najviac jeden blesk. A dá sa aj ukázať, že ak pošleme N do nekonečna, náš vzorec

bude presný. Teda pravdepodobnosť, že na plochu A udrie n bleskov, bude

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}[A, n] &= \lim_{N \rightarrow \infty} \binom{N}{n} \left(\frac{\rho A}{N} \right)^n \left(1 - \frac{\rho A}{N} \right)^{N-n} \\
 &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N!}{(N-n)!n!} \frac{(\rho A)^n}{N^n} \left(1 - \frac{\rho A}{n} \right)^N \left(1 - \frac{\rho A}{n} \right)^{-n} \\
 &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N!}{(N-n)!N^n} \frac{(\rho A)^n}{n!} \left(1 - \frac{\rho A}{N} \right)^N \left(1 - \frac{\rho A}{N} \right)^{-n} \\
 &= 1 \cdot \frac{(\rho A)^n}{n!} \cdot e^{-\rho A} \cdot 1.
 \end{aligned}$$

Sami si premyslite, prečo má každý zo súčiniteľov uvedenú limitu. V určení limity tretieho z nich sme použili známy vzťah $(1 + \frac{x}{N})^N \rightarrow e^x$.

Kto chce vedieť viac, nech si napríklad na internete vyhľadá Poissonovo (a na oživenie pamäti aj Binomické) rozdelenie, kto nie, nech si aspoň overí, že tento náš vzťah dáva správne výsledky pre pravdepodobnosť že na plochu udrie aspoň nula bleskov (mala by byť samozrejme rovná 1), pre očakávaný počet bleskov (malo by byť ρA , z čoho sme vychádzali), aj pre pravdepodobnosť, že na plochu A neudrie žiaden blesk (mala by byť rovnako $p(A)$ ako sme zrátali predtým).

My tento vzťah už len použijeme na spočítanie príkladu. Podobne ako minule napíšeme pre priemernú hodnotu X vzdialenosti najbližšieho blesku, len už nebudeme používať pôvodné p ale náš vzťah.

$$\begin{aligned}
 X &= \lim_{d \rightarrow 0} \left(\sum_{n=0}^{\infty} nd \cdot \mathbb{P}[\text{vzdialenosť najbližšieho blesku} \in [nd, nd + d]] \right) \\
 &= \int_0^{\infty} r \cdot \mathbb{P}[\text{vzdialenosť najbližšieho blesku} \in [r, r + dr]] \\
 &= \int_0^{\infty} r \cdot \mathbb{P}[\text{bližšie ako } r \text{ udrelo 0 bleskov}] \cdot \mathbb{P}[\text{vo vzdialenosti } [r, r + dr) \text{ (v tom medzikruží) udrel 1 blesk}] \\
 &= \int_0^{\infty} r \cdot \frac{(\rho \pi r^2)^0}{0!} \cdot e^{-\rho \pi r^2} \cdot \frac{(\rho 2\pi r dr)^1}{1!} \cdot e^{-\rho 2\pi r dr} \\
 &= \int_0^{\infty} r \cdot \frac{1}{1} \cdot e^{-\rho \pi r^2} \cdot \frac{\rho 2\pi r}{1} \cdot 1 dr = \int_0^{\infty} e^{-\rho \pi r^2} 2\pi \rho r^2 dr,
 \end{aligned}$$

ako v predošlom riešení.

(Mimochodom, všimnite si, že tieto dve riešenia obsahovali veľa rovnakých úvah, líšili sa vlastne len v tom, ako presne sme vyhúťali vzorec

s exponenciálnou funkciou. Tiež si všimnite, že druhé riešenie je o čosi všeobecnejšie.)

Integrál

Nakoniec len porátajme integrál, ktorý vyšiel v oboch riešeníach. Môžeme sa s ním popasovať per partes (skúste si!), alebo nám pomôže nejaký matematický softvér, alebo nasledujúca drobná finta. (Nie až taká potrebná, keďže to ide per partes, ale celkom zaujímavá a užitočná, tak si ju ukážeme.) Vieme, že $\int_0^\infty e^{-tr^2} dr = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{t}}$. Ak si označíme $f(t) = \int_0^\infty e^{-tr^2} dr = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{t}}$, derivovaním všetkých troch strán rovnosti podľa t dostávame

$$f'(t) = \int_0^\infty -r^2 e^{-tr^2} dr = -\frac{1}{4}\sqrt{\frac{\pi}{t^3}}.$$

(Múdre vety nám hovoria, že za istých podmienok môžeme vymeniť poradie derivácie a integrálu, čiže $\frac{d}{dt} \int_0^\infty e^{-tr^2} dr = \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial t}(e^{-tr^2}) dr$, odkiaľ máme prostredný vzťah.) Vynásobením $-2t$ dostávame

$$\int_0^\infty 2tr^2 e^{-tr^2} dr = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{t}},$$

no a dosadením $\pi\rho$ za t dostávame hľadanú hodnotu integrálu

$$X = \int_0^\infty 2\pi\rho r^2 e^{-\pi\rho r^2} dr = \frac{1}{2\sqrt{\rho}}.$$



FX H4 – MESIAC



Kolkonasobne silnejšie žiari Mesiak v splne než v prvej štvrti? Uvažujte Lambertovský model rozptylu svetla na mesačnom povrchu.

Zdroj: Kvant

 VZORÁK JAKUB 

Pred samotným riešením úlohy si dohodneme vyjadrovací aparát. Budem používať fyzikálnu veličinu *hustota žiarivého toku*, ktorá vyjadruje výkon žiarivej energie prechádzajúcej cez jednotkovú plochu kolmú na smer toku. Budeme ju značiť I . Jej základnou jednotkou je $\text{W} \cdot \text{m}^{-2}$. Ďalej budem používať označenie $R_{\text{M-Z}}$ pre vzdialenosť Zem-Mesiak, R_{M} pre polomer Mesiaca.

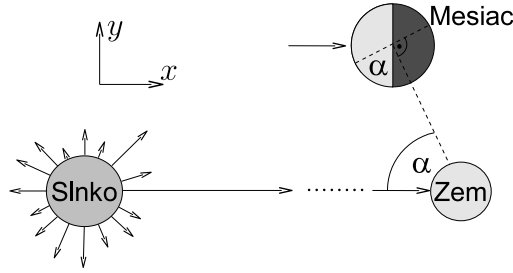
Úlohu vyriešim s nasledovnými aproximáciami: mesačný povrch je sféra o polomere R_{M} , Mesiak obieha okolo Zeme po kružnici s polomerom $R_{\text{M-Z}}$ v rovine ekliptiky, hustota toku žiarenia zo Slnka pri Mesiaci je nezávislá od fázy²⁷⁴. Zanedbávam svit hviezd. Samotný odraz uvažujem lambertovský s rovnakým koeficientom odrazivosti na celom povrchu.²⁷⁵ Zanedbám akékoľvek pohlcovanie žiarenia v priestore medzi Zemou a Mesiacom.

Stručne osvetlím ešte motiváciu lambertovského rozptylu. Ide o model, podľa ktorého je hustota žiarivého toku do vybraného smeru proporcionálna kosínusu uhla medzi normálou vyžarujúcej plochy a vybraným smerom. To zabezpečuje, že osvetlenú plošku budem vnímať zo všetkých smerov rovnako jasnú, lebo hustota žiarivého toku dopadajúca do môjho optického senzora bude proporcionálna priestorovému uhlu, pod ktorým túto plošku vidím. Je to dobrá aproximácia pre relatívne drsné povrchy, avšak veľmi nedobrá pre zrkadliace plochy.

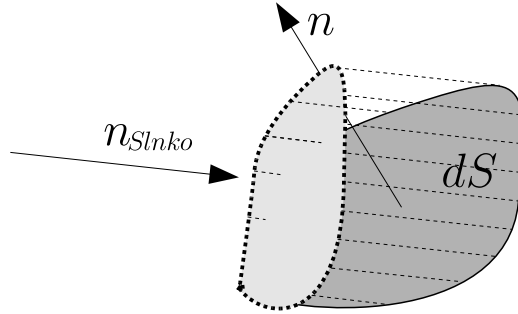
Načrt situácie: Chcem zistiť pomer hustôt žiarivého toku pre štvrtfázu ($\alpha = \frac{\pi}{2}$) a spln ($\alpha = \pi$). V tomto vzoráku spočítame hustotu Mesiacom odrazeného toku žiarenia v závislosti od uhla α .

²⁷⁴Nakoľko relatívna zmena vzdialenosti Slnko-Mesiak je pri obehu Mesiaca okolo Zeme v ráde tisícín, tak ide o rozumné zjednodušenie.

²⁷⁵V reáli je odrazivosť funkcia závislá od konkrétneho miesta, od smeru, odkiaľ je toto miesto osvetlené, od frekvencie dopadajúceho žiarenia a taktiež od smeru, v ktorom uvažujem odraz.



Zoberme si malú plôšku povrchu Mesiaca s obsahom dS a jednotkovou normálou²⁷⁶ $\mathbf{n}$. Ak je táto plocha osvietená Slnkom, tak výkon dopadajúci na ňu je rovný súčinu hustoty žiarivého toku Slnka I_{Slnko} vo vzdialenosti 1 AU a plochy priemetu našej plochy do smeru toku žiarenia.



Plocha priemetu plochy do smeru toku žiarenia je rovná súčinu plochy dS a kosínusu uhla β , ktorý zvierajú jednotkový vektor toku žiarenia $\mathbf{n}_{\text{Slnko}} = (1, 0, 0)$ a normála plochy $\mathbf{n}$. Teda žiarivý výkon dopadajúci na plochu je

$$dP_{\text{dopadajúci}} = I_{\text{Slnko}} \cos \beta \, dS.$$

Pre lambertovský povrch potom platí, že v smere odchýlenom o uhol γ od normály plochy vo vzdialenosti $R_{\text{M-Z}}$ bude hustota Mesiacom odrazeného žiarivého toku

$$dI_{\text{mesačná}} = \frac{A \cos \gamma}{\pi R_{\text{M-Z}}^2} dP_{\text{dopadajúci}},$$

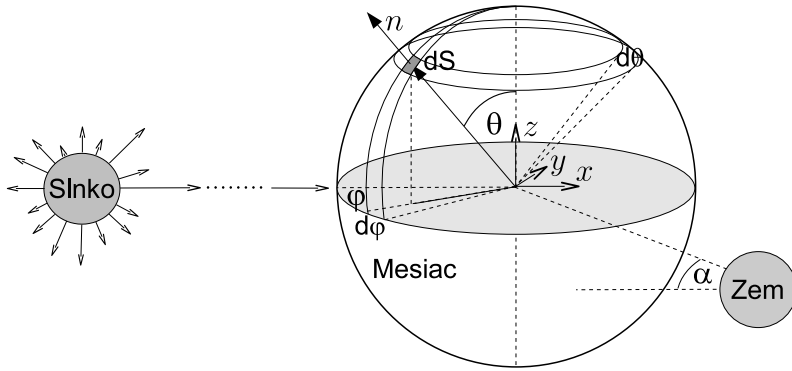
kde A je albedo – čiže konštanta vyjadrujúca podiel odrazeného žiarivého výkonu ku dopadajúcemu výkonu²⁷⁷. Kosínus uhla γ viem opäť šikovne vyjadriť

²⁷⁶Normála plochy je vektor kolmý na danú plochu. Keď hovorím o jednotkovej normále, tak tým myslím, že jej dĺžka je jednotková. Každá dostatočne malá plocha je prakticky rovinná a teda má normálu.

²⁷⁷Pre Mesiak je hodnota albeda v priemere približne 7,2 %.

pomocou skalárneho súčinu jednotkového vektora normály plochy s jednotkovým vektorom v smere k pozorovateľovi $\mathbf{n}_{\text{Zem}} = (\cos \alpha, -\sin \alpha, 0)$.

Zoberme si plôšku na povrchu Mesiaca na mieste s polárnym uhlom²⁷⁸ θ a zemepisnou dĺžkou φ o uhlových rozmeroch $d\theta$, resp. $d\varphi$, vid' obrázok.



Táto plôška bude mať obsah $dS = R_M^2 \sin \theta d\theta d\varphi$. Jej jednotková normála bude $\mathbf{n} = (-\sin \theta \cos \varphi, -\sin \theta \sin \varphi, \cos \theta)$.

Vyjadriť si kosínusy uhla β , resp. γ . Platí

$$\begin{aligned}\cos \beta &= |\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}_{\text{Slnko}}| = \sin \theta \cos \varphi, \\ \cos \gamma &= |\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}_{\text{Zem}}| = -\sin \theta \cos (\alpha + \varphi).\end{aligned}$$

Ostáva nám už iba posčítavať hustotu odrazeného žiarivého toku od všetkých osvetlených plôch Mesiaca. Osvetlené budú zjavne plochy, ktorých θ je z intervalu $\langle 0, \pi \rangle$ a φ z intervalu $\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle$. Zo Zeme sú viditeľné plochy s θ z intervalu $\langle 0, \pi \rangle$ a φ z intervalu $\langle \frac{\pi}{2} - \alpha, \frac{3\pi}{2} - \alpha \rangle$.²⁷⁹ Teraz už vieme, že viditeľné a osvetlené plochy majú θ z intervalu $\langle 0, \pi \rangle$ a φ z intervalu $\langle \frac{\pi}{2} - \alpha, \frac{\pi}{2} \rangle$, kde sa predpokladá, že $\alpha \in \langle 0, \pi \rangle$.

Nasleduje výpočet hustoty toku žiarenia odrazeného Mesiacom videného pozemským pozorovateľom:

$$\begin{aligned}I_{\text{mesačná}}(\alpha) &= \int_{\text{osvetlené a viditeľné plochy}} \frac{A}{\pi R_{M-Z}^2} I_{\text{Slnko}} \cos \gamma \cos \beta dS \\ &= -\frac{AR_M^2}{\pi R_{M-Z}^2} I_{\text{Slnko}} \int_{\theta \in \langle 0, \pi \rangle, \varphi \in \langle \frac{\pi}{2} - \alpha, \frac{\pi}{2} \rangle} \sin^3 \theta \cos \varphi \cos (\alpha + \varphi) d\theta d\varphi\end{aligned}$$

²⁷⁸Polárny uhol je obdoba zemepisnej šírky, ale meria sa od severného pólu.

²⁷⁹Platí iba v priblížení $R_M \ll R_{M-Z}$, v skutočnosti vidíme o málo menej.

Takýto dvojný integrál môžeme počítať tak, že si integračný priestor $\theta \in \langle 0, \pi \rangle$, $\varphi \in \langle \frac{\pi}{2} - \alpha, \frac{\pi}{2} \rangle$ rozdelíme na pásiky rovnobežné s osou pre θ . Potom počítame vlastne 2 integrály v sebe. Dá sa však vidieť, že pre ľubovoľné φ potrebujeme počítať rovnaký integrál ohľadom premennej θ . Preto sa dá tento dvojný integrál napísať ako súčin integrálov I_1 a I_2 , pričom

$$I_1 = \int_0^\pi \sin^3 \theta \, d\theta,$$

$$I_2 = \int_{\frac{\pi}{2}-\alpha}^{\frac{\pi}{2}} \cos \varphi \cos(\alpha + \varphi) \, d\varphi.$$

Výpočet integrálu I_1 sa dá urobiť nasledovne. Vo vzniknutom integráli použijeme substitúciu $t = \cos \theta$.

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^\pi \sin^3 \theta \, d\theta \\ &= \int_0^\pi \sin \theta (1 - \cos^2 \theta) \, d\theta \\ &= \int_0^\pi \sin \theta \, d\theta - \int_0^\pi \sin \theta \cos^2 \theta \, d\theta \\ &= [-\cos \theta]_0^\pi - \int_{-1}^1 t^2 \, dt \\ &= 2 - \left[\frac{t^3}{3} \right]_{-1}^1 = 4/3. \end{aligned}$$

Výpočet druhého integrálu I_2 je prakticky priamočiary.

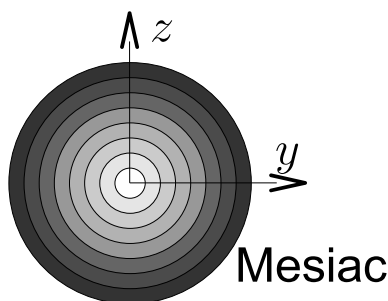
$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{\frac{\pi}{2}-\alpha}^{\frac{\pi}{2}} \cos \varphi \cos(\alpha + \varphi) \, d\varphi \\ &= \int_{\frac{\pi}{2}-\alpha}^{\frac{\pi}{2}} [\cos^2 \varphi \cos \alpha - \cos \varphi \sin \varphi \sin \alpha] \, d\varphi \\ &= \cos \alpha \int_{\frac{\pi}{2}-\alpha}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos 2\varphi}{2} \, d\varphi - \sin \alpha \int_{\frac{\pi}{2}-\alpha}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2\varphi}{2} \, d\varphi \\ &= \cos \alpha \left[\frac{2\varphi + \sin 2\varphi}{4} \right]_{\frac{\pi}{2}-\alpha}^{\frac{\pi}{2}} - \sin \alpha \left[\frac{-\cos 2\varphi}{4} \right]_{\frac{\pi}{2}-\alpha}^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{2\alpha - \sin 2\alpha}{4} \cos \alpha - \frac{1 - \cos 2\alpha}{4} \sin \alpha = \frac{\alpha \cos \alpha - \sin \alpha}{2}. \end{aligned}$$

Dostávame výsledok

$$I_{\text{mesačná}}(\alpha) = \frac{2AR_{\text{M}}^2}{3\pi R_{\text{M-Z}}^2} (\sin \alpha - \alpha \cos \alpha) I_{\text{Sluko}}.$$

Odtiaľ hneď vidíme, že lambertovský Mesiác by v splne odrážal π -násobne viac slnečného žiarenia ako vo štvrtfáze. Tiež vieme takto určiť, že osvit Mesiacom v splne by bol zhruba miliónkrát slabší ako slnečný osvit.

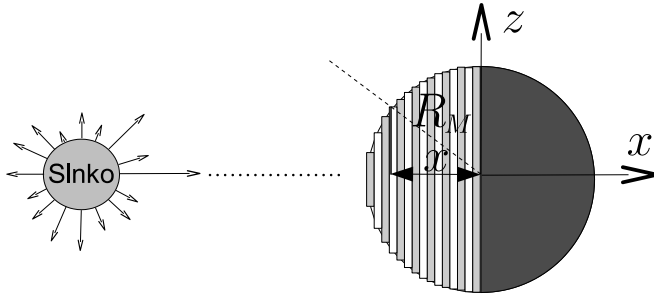
Ako sa to dalo riešiť jednoduchšie pre naše pekné fázové uhly $\alpha = \frac{\pi}{2}$, resp. $\alpha = \pi$? Nuž, treba si všimnúť, že hustota toku žiarenia prichádzajúceho od reflektujúceho lambertovského povrchu závisí od dopadajúcej hustoty toku a priemetu plochy, ktorú vidím odrážať. Ako druhé si treba všimnúť, ako vyzerá množina bodov na povrchu Mesiaca s rovnakou dopadajúcou hustotou toku slnečného žiarenia. Ako tretie treba nahliadnuť ako to vidíme v príslušnej fáze zo Zeme. V splne dostávame pekne rotačne symetrický obraz.



Zoberme si také sústredené medzikružie s vnútorným polomerom r a vonkajším $r + dr$. Toto je osvetlené Slnkom rovnako, dopadá naň hustota slnečného žiarivého toku $I_{\text{dopadajúca}} = I_{\text{Slnko}} \frac{\sqrt{R_M^2 - r^2}}{R_M}$, kde výraz $\frac{\sqrt{R_M^2 - r^2}}{R_M}$ nie je nič iné ako kosínus uhla medzi normálou ľubovoľnej plošky medzikružia a smerom ku Slnku. Teraz využijeme, že povrch Mesiaca je lambertovský, teda nech sa pozerám z ľubovoľného smeru, tak plochu vidím rovnako jasnú a hustota odrazeného žiarivého toku je priamo úmerná ploche, ktorú vidím. Plocha medzikružia, t.j. priemet rovnako osvetlených miest na povrch Mesiaca do smeru pozorovateľa na Zemi, je $dS = 2\pi r dr$. Teda hustota toku odrazeného touto plochou v miestach Zeme je $dI_{\text{mesačná}} = \frac{A}{\pi R_{M-Z}^2} I_{\text{dopadajúca}} dS$. Rozpísané na drobné a spočítané dokopy dostávame celkovú hustotu mesačného žiarivého toku pre spln

$$I_{\text{spln}} = \frac{2AI_{\text{Slnko}}}{R_{M-Z}^2 R_M} \int_0^{R_M} r \sqrt{R_M^2 - r^2} dr.$$

Tento integrál sa dá vypočítať substitúciou, no ukáže sa, že počítať ho vôbec nie je potrebné. Totiž, v štvrtfáze dostávame tiež pekný obrázok, tentoraz však rovnako osvetlené vidíme zvislé „slížiky“ namiesto sústredených infinitezimálnych medzikruží.



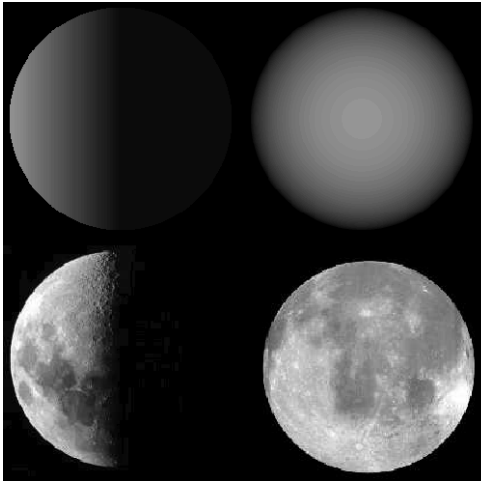
Dopadajúca intenzita je tentoraz $I_{\text{dopadajúca}} = I_{\text{Slnko}} \frac{|x|}{R_M}$, kde výraz $\frac{|x|}{R_M}$ je opäť kosínus uhla normály plochy a smeru ku Slnku – t.j. x -ového smeru. Plocha slížíkov je $dS = 2\sqrt{R_M^2 - x^2} dx$. Teda celková hustota odrazeného toku je

$$I_{\text{štvrt}} = \frac{2AI_{\text{Slnko}}}{\pi R_{\text{M-Z}}^2 R_M} \int_0^{R_M} x \sqrt{R_M^2 - x^2} dx.$$

Hneď vidíme, že platí $I_{\text{spln}} = \pi I_{\text{štvrt}}$.

POZNÁMKA: Mesiac však nie je dobrým príkladom telesa s lambertovským rozptylom. Prejavuje sa na ňom relatívne silný opozičný efekt, ktorý spôsobuje, že odrazené žiarenie bude preferovať smer, odkiaľ prichádza. Inými slovami povedané, ak je objekt nasvietený spoza pozorovateľa, tak bude výrazne jasnejší ako by sa dalo usudzovať z lambertovského modelu. Vysvetľuje sa to tým, že na povrchu Mesiaca (a Marsu...) sa nachádza porézny materiál, ktorý prakticky vždy vrhá tieň na časť viditeľného povrchu práve okrem prípadu, keď je zdroj žiarenia priamo za nami. V prípade Zeme je tu ešte tá komplikácia, že dokonalý spln nie je zo Zeme pozorovateľný, lebo v takom prípade nastáva zatmenie Mesiaca. Podľa pozorovaní posádok programu Apollo je osvit pri úplnom splne až o 30 % silnejší ako pri najlepšie pozorovateľnom splne zo Zeme. Treba poznamenať, že Mesiac vstupuje do polotieňa, ak uhol α nadobúda uhol zhruba $178,78^\circ$. Pri lambertovskom modeli by bol relatívny nárast osvitu pre $\alpha = 180^\circ$ iba necelé štvrt promile.

V skutočnosti sa pozoruje asi 10-násobný nárast osvitu v splne voči štvrtfáze. Pomer osvitu Mesiacom v splne ku osvitu Slnkom je približne $1/450000$. Ešte spomeniem, prečo je Slnkom neosvetlená časť Mesiaca na hviezdnej oblohe relatívne svetlá. Hviezdy vo veci nebudú, ale môže za to práve Zem... Prikladám ešte vygenerované obrázky, ako by vyzeral Mesiac, keby bol lambertovský v porovnaní so skutočnosťou.



FX H5 – ELEKTRIČKA



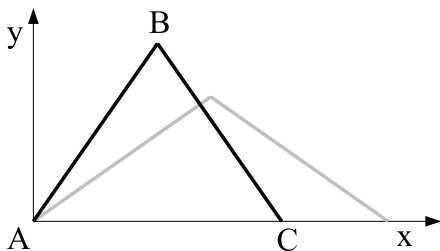
Ak vonku prší, schodíky na nástup do električky sú špinavé od blata. Keď sa však otvárajú a zatvárajú dvere, časť týchto schodíkov pri svojom pohybe pomývajú kefami pripevnenými na ich spodku. Vypočítajte tvar a plochu týchto pomývaných častí.²⁸⁰ Všimnite si tiež horné upevnenie druhej dosky dverí. V novších modeloch električiek tu nie je fixovaný jej horný roh v rovine zatvorených dverí, ale bod na upevnenom výstupku, pomerne ďaleko od samotných dverí. Čuduj sa svete, vodiaca lišta pre tento výstupok je tiež rovná. Akú polohu (vzhľadom na druhú dosku dverí) môže mať výstupok vo vodiacej lište, aby táto mohla mať tvar úsečky?

Zdroj: Úlohu vymyslel Kubus

🍃 VZORÁK KUBUS 🍃

Tvar plochy

Všimajme si iba jedno krídlo dverí, ktoré nech má pre jednoduchosť celkovú dĺžku 1. Jednotlivé dosky budú mať teda šírku $1/2$. Vynechávajúc zvislý rozmer dverí, umiestnime ich pevný bod (otáčavú tyč) A do počiatku súradnicového systému a nechajme opačný koniec dverí C pohybovať sa po osi x . Dvere budú zatvorené, keď sa tento koniec bude nachádzať v bode $[0, 1]$ a otvorené, keď sa bude nachádzať v $[0, 0]$. Kĺb spojenia dosiek dverí označme B .

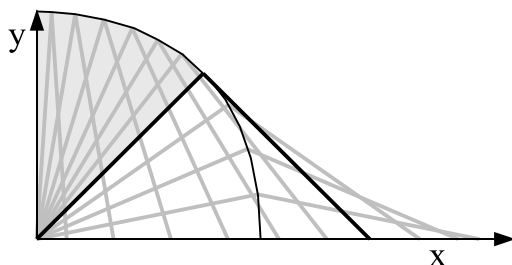


Bod B sa zrejme bude pohybovať po štvrtkružnici s polomerom $1/2$ a stredom v A . Počas jeho pobytu v hornej polovici štvrtkružnice²⁸¹ bude uhol

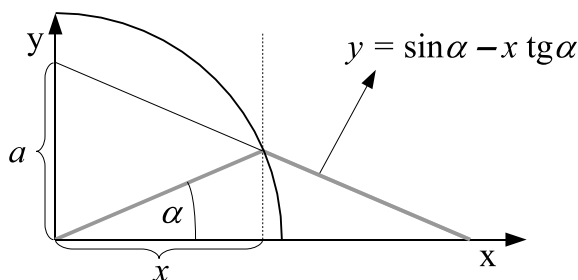
²⁸⁰Pri riešení uvažujte napríklad električky Tatra T3, kde sa jedno krídlo dverí skladá z dvoch rovnakých zvislých obdĺžnikových dosiek navzájom spojených kĺbom na zvislej hrane. Voľná hrana jednej z nich je upevnená na zvislej otáčavej tyči, hrana druhej má pohyb obmedzený v rovine prechádzajúcej touto tyčou.

²⁸¹Osminkružnica?

zvieraný dvoma doskami dverí ($\angle ABC$) ostrý, preto druhá doska dverí (BC) nebude zasahovať von z tohto kruhového výseku. Táto osminka kružnice bude teda hranicou poumývanej časti.



Ďalej bude hrať úlohu aj druhá doska. Jedným zo spôsobov ako nájsť oblasť, kam všade bude počas svojho pohybu zasahovať, je nájsť najvyšší bod (s najväčšou súradnicou y) na zvislej priamke (pre konštantné x), kam sa kedy nejaký jej kúsok dostane. Označme si uhol $\angle CAB = \alpha$. Zrejme aj $\angle ACB = \alpha$.



Po chvíľke čumenia na obrázok vidíme, že priamka BC má rovnicu²⁸²

$$y = \sin \alpha - x \operatorname{tg} \alpha$$

Extrémne hodnoty y pre fixované x a rôzne uhly α nájdeme derivovaním podľa α :

$$\begin{aligned} \frac{dy}{d\alpha} &= \cos \alpha - \frac{x}{\cos^2 \alpha} = 0 \\ x &= \cos^3 \alpha \end{aligned}$$

²⁸²Dĺžka paličky je $1/2$. Hneď vidíme, že na obrázku je $a = \sin \alpha$. Pri posune o x doľava sa y zmenší o $x \operatorname{tg} \alpha$.

Dosadením naspäť do rovnice priamky dostávame $y = \sin^3 \alpha$. Tieto body budú teda tvoriť hornú hranicu poumývanej časti schodov, samozrejme, iba pre uhly $\alpha \in \langle 0, \pi/4 \rangle$. „Dolná“ hranica je zrejme os x a ľavá hranica je os y . Patrílo by sa ešte zapísať nájdenú krivku hornej hranice neparametricky. Niektorí by mohli napísať $\alpha = \arccos \sqrt[3]{x}$, takže $y = \sin^3 \arccos \sqrt[3]{x}$. Toto je dosť škaredý tvar, o niečo príjemnejšie sa nám bude počítať, ak si všimneme, že

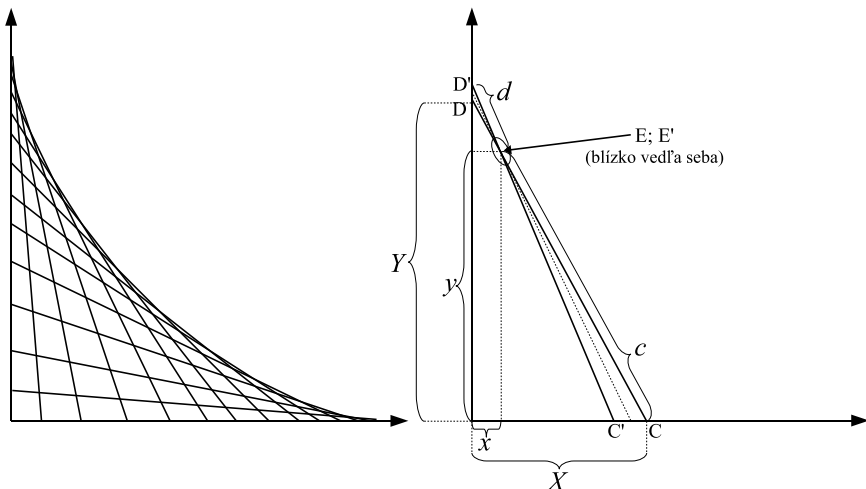
$$\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = x^{2/3} + y^{2/3} = 1$$

teda

$$y = (1 - x^{2/3})^{3/2}$$

Táto krivka sa volá astroida.

Pred tým, ako sa pustíme do počítania obsahu poumývanej plochy, ukážme si ešte jeden spôsob na nájdenie jej hraničnej krivky. Len pre sprehľadnenie situácie si označme priesečník priamky BC s osou y ako D a všimnime si, že dĺžka CD bude rovná 1 bez ohľadu na hodnotu uhla α . Úsečka CD sa bude správať ako tuhá palička o dĺžke 1, ktorej konce majú pohyb obmedzený na osi x a y . Ukážeme, že plocha, ktorú „poumýva“ úsečka CD , bude práve plná astroida.



Uvažujme nejaký bod E na hranici poumývanej plochy. Určite leží na nejakej úsečke CD (pre konkrétny uhol α). Ak teraz zvážšime α o maličký kúsok, úsečka CD sa jemne pohne (na $C'D'$) a znova bude nejaký jej bod E' ležať na hranici poumývanej plochy. Tento bod nebude ďaleko od bodu E , no a priesečník CD a $C'D'$ bude približne niekde medzi E a E' . Ak budeme takto po veľmi malých kúskoch posúvať úsečku CD , budú sa priesečníky

jej susedných polôh pohybovať veľmi blízko hraničných bodov. Ak budeme napokon zmenšovať posunutia úsečky CD do nuly, množina priesečníkov jej susedných polôh splynie s hranicou poumývanej časti. Žuvačkovu povedané, ale tvrdo pravdivé.

Po takejto úvahe už hraničnú krivku nájdeme jednoducho. Majme situáciu takú, že $C = [X, 0]$ a $D = [0, Y]$, zrejme $X = \cos \alpha$ a $Y = \sin \alpha$. Zväčšíme uhol α o malé $d\alpha$, čím sa X zväčší²⁸³ o dX a Y o dY . Ak si ešte označíme $c = |EC|$ a $d = |ED|$ (kde E je teraz už priesečník CD a $C'D'$), potom z obrázku vidíme, že platí

$$c d\alpha = -dX \sin \alpha$$

$$d d\alpha = dY \cos \alpha$$

resp.

$$\frac{c}{d} = -\frac{dX \sin \alpha}{dY \cos \alpha} = -\frac{\frac{dX}{d\alpha} \sin \alpha}{\frac{dY}{d\alpha} \cos \alpha} = \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{Y^2}{X^2}$$

Keďže však $X^2 + Y^2 = 1 = c + d$, dostávame $c = Y^2$ a $d = X^2$. Ak si označíme súradnice bodu E ako $[x, y]$, z podobnosti trojuholníkov dostávame, že E leží na astroide.

$$\begin{aligned} \frac{x}{X} &= \frac{d}{1} & \Rightarrow & x = X^3 = \cos^3 \alpha \\ \frac{y}{Y} &= \frac{c}{1} & \Rightarrow & y = Y^3 = \sin^3 \alpha \end{aligned}$$

Obsah plochy

Vidíme, že poumývaná plocha rozdelená priamkou $x = y$ sa skladá z osminy kruhu s polomerom $1/2$ a osminy plnej astroidy. Z tabuliek máme obsah astroidy $\frac{3\pi}{8}$, takže celková poumývaná plocha je $\frac{1}{8} \frac{\pi}{4} + \frac{1}{8} \frac{3\pi}{8} = \frac{5\pi}{64}$, ak sa držíme toho, že jedno zatvorené krídlo dverí má jednotkovú dĺžku. Pre celé dvere to bude dvojnásobok.

Ako však zrátame obsah astroidy bez tabuliek? V jednom kvadrante (t.j. štvrtina obsahu) to je napríklad

$$S = \int_0^1 (1 - x^{2/3})^{3/2} dx = \int_0^1 \sin^3 \arccos \sqrt[3]{x} dx,$$

ale tieto integrály sú orieškom pre nejaký mazaný softvér²⁸⁴ a nie pre nás, smrteľníkov. Pozrime sa ale na druhý postup pri počítaní tvaru poumývanej

²⁸³V skutočnosti sa zmenší, pretože dX je záporné.

²⁸⁴alebo <http://integrals.wolfram.com>

časti. Ak budeme pri posúvaní úsečky DE so zväčšujúcim sa uhlom α vyfarbovať trojuholníčky medzi bodmi C a E ($\triangle CEC'$), postupne vyfarbíme celú štvrtinu astroidy. Tento trojuholníček aproximujeme rovnoramenným, s uhlom pri vrchole E o veľkosti $d\alpha$ a dvoma stranami s dĺžkou c . Jeho obsah bude potom

$$dS = \frac{1}{2}c^2 d\alpha = \frac{1}{2}Y^4 d\alpha = \frac{1}{2}\sin^4 \alpha d\alpha$$

Obsah štvrtiny astroidy potom môžeme vypočítať:

$$S = \int_0^{\pi/2} dS = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \sin^4 \alpha d\alpha$$

Tento integrál nevyzerá nijako príjemne, ale existuje hneď niekoľko spôsobov, ako si s ním rýchlo poradiť. My si ukážeme dva z nich. Najprv budeme používať vzťahy pre sínus a kosínus polovičného uhla:

$$\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2} \quad \text{resp.} \quad \cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}$$

Pomocou týchto vzťahov môžeme prepísať:

$$\begin{aligned} \sin^4 \alpha &= \left(\frac{1 - \cos 2\alpha}{2} \right)^2 \\ &= \frac{1}{4} (1 - 2 \cos 2\alpha + \cos^2 2\alpha) \\ &= \frac{1}{4} \left(1 - 2 \cos 2\alpha + \frac{1 + \cos 4\alpha}{2} \right) \\ &= \frac{1}{8} (3 - 4 \cos 2\alpha + \cos 4\alpha) \end{aligned}$$

To je pekné. Teraz sa nám bude primitívna funkcia hľadať omnoho jednoduchšie. Úžasné však je, že ju nemusíme hľadať vôbec, pretože zo symetrie hneď vieme, že $\int_0^{\pi/2} \cos 2\alpha d\alpha = \int_0^{\pi/2} \cos 4\alpha d\alpha = 0$. Preto môžeme napísať.

$$S = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \sin^4 \alpha d\alpha = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \frac{3}{8} d\alpha = \frac{1}{2} \frac{3}{8} \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{32}$$

Iná šikovníkova cesta je metóda *per partes*. Pripomeňme, že podľa nej

$$\int_a^b u'v d\alpha = [uv]_a^b - \int_a^b uv' d\alpha.$$

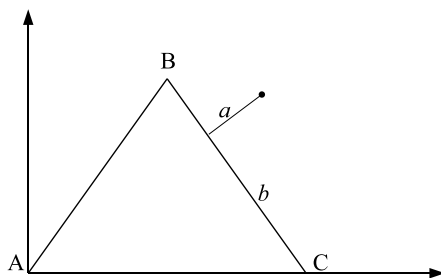
Nech S naďalej označuje hľadaný obsah štvrtiny astroidy. Nech v našej rovnici je $u' = \sin \alpha$ a $v = \sin^3 \alpha$. Tak dostávame:

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} [-\cos \alpha \sin^3 \alpha]_0^{\pi/2} + \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} 3 \cos^2 \alpha \sin^2 \alpha \, d\alpha \\ &= 0 + \frac{3}{2} \int_0^{\pi/2} \cos^2 \alpha (1 - \cos^2 \alpha) \, d\alpha \\ &= \frac{3}{2} \int_0^{\pi/2} \cos^2 \alpha \, d\alpha - 3S \\ &= \frac{1}{4} \frac{3}{2} \int_0^{\pi/2} \cos^2 \alpha \, d\alpha = \frac{3}{8} \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{32} \end{aligned}$$

Obohatení o dva zaujímavé výpočty získaného určitého integrálu sa posmelení pustíme do ďalšej časti úlohy.

Vodiaca lišta

Zostaneme pri už zavedenej súradnicovej sústave, musíme si ešte nejako popísať polohu výstupku vzhľadom na druhú dosku dverí, na ktorú je fixovaný. Nech a je jeho (orientovaná) vzdialenosť od tejto dosky a b nech je rovnobežná vzdialenosť od konca dverí C .²⁸⁵



Teraz si môžeme napísať $[x, y]$ súradnicu dverí v závislosti od ich otvorenia (uhla α):

$$\begin{aligned} x &= \cos \alpha - b \cos \alpha + a \sin \alpha \\ y &= b \sin \alpha + a \cos \alpha \end{aligned}$$

My hľadáme takú polohu výstupku *vzhľadom na druhú dosku dverí* (t.j. hodnoty a a b), pre ktorú sa s meniacim uhlom α bude výstupok pohybovať

²⁸⁵Pri zatvorených dverách a splýva so súradnicou y a $b = 1 - x$.

po priamke. To znamená, že sklon krivky pohybu výstupku $\frac{dx}{dy}$ musí byť konštantný. Tento sklon vieme vypočítať napríklad ako

$$\frac{dx}{dy} = \frac{\frac{dx}{d\alpha}}{\frac{dy}{d\alpha}} = \frac{-\sin \alpha + b \sin \alpha + a \cos \alpha}{b \cos \alpha - a \sin \alpha}$$

Aby sa sklon nemenil s meniacim sa uhlom α , musí platiť

$$\begin{aligned} \frac{d\left(\frac{dx}{dy}\right)}{d\alpha} &= 0 \\ \Downarrow \\ 0 &= \frac{d}{d\alpha} \left(\frac{-\sin \alpha + b \sin \alpha + a \cos \alpha}{b \cos \alpha - a \sin \alpha} \right) \\ 0 &= \frac{(-\cos \alpha + b \cos \alpha - a \sin \alpha)(b \cos \alpha - a \sin \alpha)}{(b \cos \alpha - a \sin \alpha)^2} \\ &\quad + \frac{(-\sin \alpha + b \sin \alpha + a \cos \alpha)(b \sin \alpha + a \cos \alpha)}{(b \cos \alpha - a \sin \alpha)^2} \\ 0 &= -\cos \alpha (b \cos \alpha - a \sin \alpha) + (b \cos \alpha - a \sin \alpha)^2 \\ &\quad - \sin \alpha (b \sin \alpha + a \cos \alpha) + (b \sin \alpha + a \cos \alpha)^2 \\ 0 &= b^2 \cos^2 \alpha + b^2 \sin^2 \alpha + a^2 \cos^2 \alpha + a^2 \sin^2 \alpha \\ &\quad - b \cos^2 \alpha - b \sin^2 \alpha \\ 0 &= a^2 + b^2 - b \\ (1/2)^2 &= a^2 + (b^2 - 1/2)^2 \end{aligned}$$

Inými slovami, výstupok fixovaný k druhej doske dverí musí ležať na kružnici so stredom v kĺbe B a polomerom $1/2$ (čo je dĺžka jednej dosky). V takom prípade sa bude pri otváraní dverí pohybovať po priamke a vodiaca lišta môže byť rovná.

Nadšenci si môžu spočítať jeho dráhu v prípade, že na spomínanej kružnici neleží.:-)

FX H6 – SKÚMAVKA



Evka sa na biológii rada hrá so skúmvkami, minule napríklad do skúmvky tvaru valca s polomerom 1 cm naliala vodu a pozorovala, aký tvar bude mať jej povrch. Nájdite kontaktný uhol medzi povrchom vody a sklom, tiež nájdite celkové prevýšenie hladiny vody na kraji a v strede skúmvky, a nakreslite tvar jej povrchu. Povrchová energia rozhrania voda-vzduch je 70 mJ.m^{-2} , energia rozhrania voda-sкло 40 mJ.m^{-2} a energia rozhrania sklo-vzduch 100 mJ.m^{-2} . Číselné výsledky úplne stačia.

Zdroj: Úlohu vymyslel Tomáš

 VZORÁK TOMÁŠ 

Aby som citoval pána všeobecne uznávaného fyzika Filipa K.: „Nakódím si to v pascle“. Získať analytické riešenie v tomto prípade totiž nie je jednoduché. Najprv si úlohu trochu sformalizujeme. Že situácia bude stredovo symetrická je nad Slnko jasnejšie. Nech teda $f(r)$ vyjadruje výšku vody vo vzdialenosti r od stredu, pričom nulu kladieme na úroveň vody, ktorá by v skúmvke bola nebyť vypuklosti, či skôr vpuklosti vody. Tento stav (rovná voda) budeme považovať za referenčný aj pri rátaní energií. Každý hneď vidí, že v porovnaní s týmto stavom má sústava energiu:

$$\begin{aligned}\Delta E = & 2\pi R f(R)(\sigma_{vs} - \sigma_{sa}) + \int_0^R 2\pi r f(r) \frac{f(r)}{2} \rho g \, dr \\ & + \int_0^R 2\pi r \sqrt{1 + f'(r)^2} \sigma_{va} \, dr,\end{aligned}$$

kde σ_{xy} je povrchová energia rozhrania medzi x a y (v -voda, s -sklo, a -air), R je polomer skúmvky a ρ hustota vody.

Tento vrcholne nepedagogický krok (grcný vzorec nám len tak padol z neba) skúsím trochu zjemniť miernym dovysvetlením jednotlivých členov. Prvý člen vyjadruje zmenu energie vnútorného povrchu skúmvky (pri zdvihnutí vody sa časť vzduchu „nahradí“ vodou). Druhý člen predstavuje zmenu potenciálnej energie ktorú dostaneme ako integrál cez veľmi užuté medzi-
valčia (polomer takéhoto medzivalčia je r , šírka dr výška $f(r)$ a jeho ťažisko sa nachádza v polovici jeho výšky, čiže $f(r)/2$. Posledný člen ráta povrchovú energiu voda-vzduch, idea rozsekaní na medzivalčia je stále živá, akurát sa lepšie pozrieme na ich hornú podstavu, ktorá nie je rovná ale šikmá. Tangens našikmenia θ je akurát derivácia funkcie f a trochu goniometrie nám

umožňuje zrátať kosínus tohto uhla. Skutočný povrch hornej „podstavy“ medzivalčia bude potom $2\pi r$ vynásobené $r/\cos\theta$. Na záver podotknime, že aby ΔE bola skutočne rozdielom energií oproti referenčnému stavu, mali by sme ešte od nej odčítať energiu voda-vzduch v referenčnom stave. Toto je však konštanta a teda na minimalizáciu ΔE (za chvíľu sa k tomu dostaneme) nemá zmysel.

Našou úlohou je teda nájsť také f , pre ktoré vyjde ΔE minimálne. Na toto existuje parádna vec, ktorá sa volá tuším variačný počet a na fyzike na matfyzu vás ju naučí v druhom ročníku Fecko. Na FKS na seminári pre drsňákov vás ju možno naučí aj Kulich. Problém s touto metódou je ten, že sa jedná vlastne o problémy dva. Menovite

- Prvý problém: Väčšina z vás nemá absolvovaného Fecka.
- Druhý problém: Nám nestačí hocijaká funcia, hľadáme takú funkciu f , ktorá spĺňa

$$\int_0^R 2\pi r f(r) dr = 0.$$

Týmto chcel básnik (akože ja) povedať, že voda v skúmanvke sa nekotí a jej množstvo je rovnaké ako v referenčnom prípade.

Preto nastupuje na rad numerika. Aby sme našli aspoň približné číselné riešenie, interval $[0, R]$ rozsekáme na hrozne prťavé kúsky o veľkosti dr a v nich si budeme pamätať hodnoty funkcie f . Integrovanie nahradíme sumáciou a deriváciu rozdielom dvoch susedných hodnôt predeleným dr . K danej f už teda poľahky vieme nájsť hodnotu ΔE ! Ako však nájsť funkciu s minimálnou ΔE ?

Prvoplánovým a pre tento problém použiteľným riešením je zobrať nejakú, hociakú f , a skúšať na ňu aplikovať drobné zmeny. Ak sa ΔE zníži, zmenu zapamätáme, ak nie, zrušíme ju. Takto skúšame postupne všetky zmeny. V okamihu, keď už žiadna zmena nevedie k zmenšeniu ΔE , prehlásime, že sme našli optimum. A čože sú to presne tie naše zmeny? Prvoplánové (zlé) riešenie je zobrať $f(r)$ a zmeniť jeho hodnotu o Δh , čo bude nejaká nami zvolená malá konštanta. Toto je však cesta do pekla – naše zmeny nám menia objem vody v skúmanvke. Preto to spravíme inak. Okrem toho, že $f(r)$ zväčšíme (zmenšíme) o Δh , zmenšíme (zväčšíme) všetky hodnoty funkcie f o presne takú hodnotu $\Delta h'$, že $\Delta h\pi((r+dr)^2 - r^2) = \Delta h'\pi R^2$. Takýmto trikom iba „prelejeme“ vodu z jedného miesta v skúmanvke na iné. A je to. Koľkože to touto skvelou metódou vyšlo? Keďže som príliš lenivý to kódovať, zacitujem pánov v.u.f. Kubinu a Mazáča: rozdiel výšok 2.8 mm, kontaktný uhol 59° .²⁸⁶

²⁸⁶Zamyslite sa nad tým, ako tento kontaktný uhol priamo vypočítať. Konkrétne si skúste si rozmyslieť, aké sily pôsobia na molekulu vody priamo na trojrozhraní voda-sklo-vzduch.

Aby som vynahradil svoju lenivosť problém vlastnoručne naprogramovať, prikladám na záver aspoň zopár filozofických otázok, nad ktorými je dobré sa zamyslieť: Ako zvoliť Δh , aby sme dostali čo najlepší výsledok za čo najkratší čas? Ako by mohla vyzeráť optimálna Δh ako funkcia konfigurácie (tj. času, výšky vody, zlepšenia za poslednú iteráciu, ...)? Sú veličiny ako σ_{sa} , σ_{vs} priamo zistiteľné nejakým meraním? Čo je pre výsledok naozaj dôležité?

V tomto konkrétnom prípade sme mali trochu šťastia – podarilo sa nám navrhnúť takú sadu drobných zmien, ktoré zachovávali našu väzbu, t.j. množstvo vody v skúmanke. Viete si predstaviť systém, kde by navrhnúť takéto zmeny nebolo jednoduché? Ako by ste postupovali potom?

Sieň [slávy]

Zoznam riešiteľov, ktorý v príslušnom ročníku dosiahli aspoň v jednej úlohe aspoň polovičný počet bodov.

Ročník 2005/2006

10 úloh

A3 A5 A7 B3 D3

E5 E8 G1 H2 H5

1. **Tomáš Bzdušek**, G Pierra de Coubertina, Piešťany
(9 – A3 A5 B3 D3 E5 E8 G1 H2 H5)
2. **Marcela Hrdá**, G Jura Hronca, Bratislava
(5 – A5 A7 D3 E5 G1)
3. **Peter Perešíni**, G Jozefa Gregora Tajovského, Banská Bystrica
(4 – A5 B3 H2 G1)
4. **Jakub Imriška**, G Jura Hronca, Bratislava
(1 – B3)

Ročník 2006/2007

9 úloh

(nie je v zbierke, úlohy však môžete nájsť na www.fks.sk/fx/fx2.php)

1. **Tomáš Bzdušek**, G Pierra de Coubertina, Piešťany, (6)
2. **Filip Kubina**, G Pavla Országha Hviezdoslava, Dolný Kubín (3)

Ročník 2007/2008

18 úloh

A1 A2 B2 B4 C2 C3

C4 C5 C6 D4 E1 E2

E4 E6 G2 H1 H3 H6

1. **Filip Kubina**, G Pavla Országha Hviezdoslava, Dolný Kubín
(14 – A1 A2 B2 B4 C2 C3 C4 C5 D4 E1 E2 E4 G2 H6)
2. **Jan Hermann**, G Český Krumlov
(11 – A2 B4 C2 C3 D4 E1 E2 E4 E6 H1 H3)
3. **Peter Vanya**, G Jura Hronca, Bratislava
(6 – C2 C3 D4 E1 E4 E6)
4. **Lukáš Konečný**, G Pierra de Coubertina, Piešťany
(4 – A1 C2 E2 H1)
5. **Michal Spišiak**, G Grösslingova 18, Bratislava
(4 – A1 B2 C3 E1)
6. **Dalimil Mazáč**, G Jána Keplera, Praha
(3 – C6 E6 H6)
7. **Mária Kieferová**, G Sv. Františka z Assissi, Žilina
(3 – C3 D4 E2)
8. **Samuel Hapák**, G Sv. Grösslingova 18, Bratislava
(2 – B2 H3)
9. **Lucia Simanová**, G Sv. Grösslingova 18, Bratislava
(1 – A1)
10. **Dávid Vendel**, G Poštová, Košice
(1 – A1)

Ročník 2008/2009

15 úloh

A4 A6 A8 B1 C1

D1 D2 E3 E7 E9

F1 F2 G3 G4 H4

1. **Eugen Hruška**, G Hlohovec

(12 – A4 A8 B1 D1 D2 E3 E7 E9 F2 G3 G4 H4)

2. **Mária Kieferová**, G Sv. Františka z Assissi, Žilina

(7 – A6 B1 D1 E3 E9 F2 G3)

3. **Ján Bogár**, G Ľudovíta Štúra, Trenčín

(4 – A4 B1 D2 G3)

4. **Prabhat Rao Pinnaka**, G Hyderabad, India

(3 – D1 E3 E9)

5. **Kateřina Honzáková**, G Jána Keplera, Praha

(2 – D1 D2)

6. **Martin Polačko**, G Alejová, Košice

(2 – B1 E9)

7. **Andrea Pločeková**, G Pierra de Coubertina, Piešťany

(2 – A6 F2)

8. **Peter Vanya**, G Jura Hronca, Bratislava

(1 – D2)

Autori [zbierky]

Tomáš Bzdušek (Bzdušo)
FMFI UK, Bratislava
bzdušo@fks.sk
<http://www.fks.sk/~bzdušo>



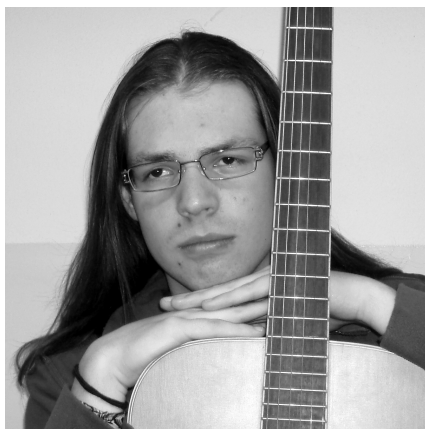
Jakub Závodný (Kubus)
University of Oxford
kubus@fks.sk
<http://www.fks.sk/~kubus>

... a kolektív ...

Marcela Hrdá (Marcelka), aklecram@gmail.com

Filip Kubina (Filip), fkubina@gmail.com

Tomáš Kulich (Tomáš), tomas.kulich@gmail.com



Jakub Imriška (Jakub)
FMFI UK, Bratislava
jakub@fks.sk
<http://www.fks.sk/~jakub>



Zdroje úloh:

Boston Area Undergraduate Physics Competition (BAUPC),
<http://www.physics.harvard.edu/academics/undergrad/problems.html>

KöMaL - *Mathematical and Physical Journal for Secondary Schools*,
<http://www.komal.hu/info/bemutakozas.e.shtml>

Fiziko-matematikus fizika Kvant,
<http://kvant.mirror1.mccme.ru/>

International Physics Olympiad,
<http://www.jyu.fi/kastdk/olympiads/>

Archív Fyzikálneho korešpondenčného seminára,
<http://www.fks.sk/archiv/archiv.php>

Richard Feynman, Robert Leighton, Matthew Sands:
Feynman's Lectures on Physics

Peter Gnädig, Gyula Honyek, Ken Riley:
200 Puzzling Physics Problems

Milan Noga:
Teória relativity (skriptá FMFI UK)

Ďalšími návrhmi prispeli Matúš Medo, Peter Maták a autori zbierky.

Názov: Zbierka FX

Autori: Tomáš Bzdušek, Jakub Imriška, Jakub Závodný
a kolektív Marcela Hrdá, Filip Kubina, Tomáš Kulich.

Sadzbú programom $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}\text{-}\mathcal{T}\mathcal{E}\mathcal{X}$ a $\mathcal{L}\mathcal{T}\mathcal{E}\mathcal{X}2\epsilon$ pripravil: Tomáš Bzdušek

Grafické riešenie obálky: Jakub Imriška

Neprešlo jazykovou úpravou.

Vydal: Trojsten (www.trojsten.sk), Bratislava, 2009

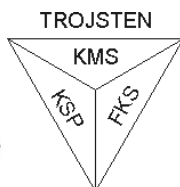
Tlač: Edis, vydavateľstvo Žilinskej univerzity

Náklad: 120 ks

Rozsah: 288 strán

ISBN: 978-80-970297-0-8

Vydané s finančnou podporou Agentúry na podporu výskumu a vývoja, projekt
LPP-0103-09.



APVV