



Vypracoval: *Jakub Imriška*

Dátum: 29.9.2008

0. Úvod, obsah

Tento text vznikol na základe otázok, ktoré si autor kládol a nechcelo sa mu hľadať odpovede na ne cez vešticu *Google*. Všetko to začalo jedným príkladom z FX (3. ročník, FX6 Romantička) o dobe trvania západu slnka na póle, ku ktorému som robil vzorák. A bolo to zaujímavé. A chcel som vedieť viac. Predovšetkým ma zaujímalo, ako približne sa mení dĺžka dňa počas roka, ďalej ako sa mení azimut, kde vychádza/zapadá slnko. A bolo mi jasné, že to chcem zistiť sám. Nie sprostredkované.

Najprv som si zvolil model (**kap. 1**), zaviedol súradnicovú sústavu (**kap. 2**), niečo málo som porátal analyticky (**kap. 3** + čosi viac). Následne som budoval geometrické riešenie (**kap. 7-9**). Až dodatočne vzniklo aj analytické riešenie dĺžky dňa a výšky slnka na poludnie (**kap. 5**). Tiež **pojednanie o excentricite (kap. 5)** a **kap. 6** vznikli dodatočne. Preto možno po úvodných 3 kapitolách preskočiť celé analytické riešenie a pozrieť sa bez straty nadväznosti pokračovať geometrickým riešením.

Obsah:

1. Model, dáta
2. Súradnicová sústava, základné vektory a veličiny
3. Finty s vektormi - analytický pohľad
4. Tak ako dlho vlastne trvá 1 deň? (analyticky)
5. Pojednanie o excentricite
6. Poloha slnka na oblohe a azimut
7. Poludnie - geometricky
8. Dĺžka dňa počas roka - geometricky
9. Kde vychádza slnko? Na východe? (geometricky)
10. Výsledky v grafoch
11. The End
12. Bonus I
13. Bonus II
14. Thanks for your attention!

1. Model, dáta

Uvažujem guľatú Zem obiehajúcu rovnomerne po kružnici okolo Slnka s pevnou osou rotácie (konštantná v čase: žiadna precesia, nutácia). Zanedbávam tiež ohyb svetla pri prechode atmosférou (pri pozorovaní objektov nízko nad obzorom je najmarkantnejší), rozmery Zeme voči vzdialenosti Zem-Slnko, obeh Zeme okolo spoločného ťažiska Zem-Mesiak, slapové javy, zakrivenie povrchu Zeme v mieste pozorovania (teda predpokladám, že pozorovateľ je nízko nad povrchom), spomaľovanie rotácie Zeme a pravdepodobne ešte mnoho iného.

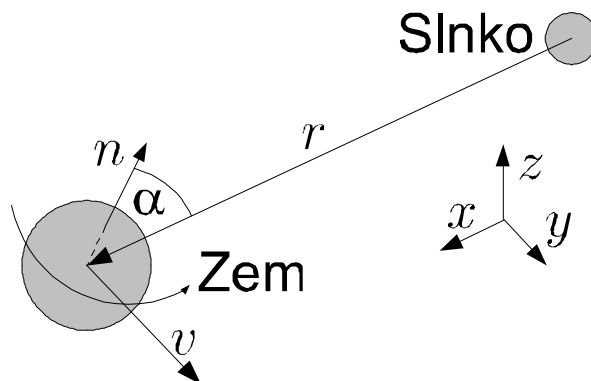
Napriek tomu si trúfam tvrdiť, že z môjho modelu vytlačím slušné výsledky. Nothing else matters...

V **kapitole 5** sa pozrieme na vplyv excentricity dráhy Zeme pri obehu okolo Slnka na chod Slnka po oblohe. (To je jediná kapitola, kde sa bude uvažovať iná ako kruhová dráha.)

Dáta o Zemi (použiteľné pre prípadné aplikácie):

- excentricita: $\varepsilon = 0.01671$
- slnečný deň: $T_2 = 1 \text{ d} = 24 \text{ h}$
- hviezdny deň: $T_1 = 23 \text{ h } 56 \text{ min } 4.09 \text{ s}$
- rok: $T_0 = 1 \text{ y} = 365 \text{ d } 6 \text{ h } 9 \text{ min } 9.54 \text{ s}$
- uhlová rýchlosť vlastnej rotácie: $\omega = \frac{2\pi}{T_1} = 7.2921159 \cdot 10^{-5} \text{ s}^{-1}$
- uhlová rýchlosť idealizovaného kružnicového pohybu: $\Omega = \frac{2\pi}{T_0} = 1.990986607 \cdot 10^{-7} \text{ s}^{-1}$
- odklon zemskej osi od normály eklitiky: $\varphi \simeq 23^\circ 26' 20'' \simeq 23.44^\circ$
(ovplyvnené nutáciou!)
- jarná rovnodennosť: 19.-21. marec
(záleží na konkrétnom roku; v dlhodobom merítku ovplyvnené precesiou!)
- letný slnovrat: 21. jún
- jesenná rovnodennosť: 22.-23. september
- zimný slnovrat: 21.-22. december
- Zem v perihéliu: 2.-4. január
- Zem v aféliu: 3.-6. júl
- veľká poloos: $a = 149597870 \text{ km}$

2. Súradnicová sústava, základné vektory a veličiny



Obr. 1. Náčrtok problému.

Uvažujme pohyb Zeme v rovine xy , z -ová os určuje smer normály ekliptiky. Za počiatočný čas $t = 0$ zvolím okamih letného slnovratu. Ďalej si porobím jednotkové vektory, s ktorými sa vyšantím.

Vektor $\vec{r} = \begin{pmatrix} \cos \Omega t & \sin \Omega t & 0 \end{pmatrix}$ je vektor jednotkovej dĺžky smerujúci od Slnka do stredu Zeme. Platí $\Omega = \frac{2\pi}{1y} \approx \frac{2\pi}{365d6h}$ je uhlová rýchlosť obehu Zeme okolo Slnka. Keďže tento vektor je počas jedného dňa prakticky nemenný, môžeme pre zjednodušenie považovať čas t pri vyšetrowaní polohy Slnka počas jedného dňa za konštantu - v takom prípade budeme používať označenie T a toto priblíženie budem nazývať "priblížením jedného dňa".

Vektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} -\sin \varphi & 0 & \cos \varphi \end{pmatrix}$ je v čase konštantný jednotkový vektor ukazujúci v smere osi rotácie Zeme. Uhol $\varphi \approx 23,5^\circ$ je odklon osi rotácie od normály ekliptiky. (Tu teda zanedbávame precesiu a nutáciu zemskej osi!)

Ďalej zavediem dva pomocné vektory $\vec{n}_1 = \begin{pmatrix} -\cos \varphi & 0 & -\sin \varphi \end{pmatrix}$ a $\vec{n}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Oba sú kolmé na $\vec{n}$ a zároveň sú kolmé na seba. Vektory $\vec{n}_2, \vec{n}_1, \vec{n}$ tvoria pravotočivú ortonormálnu bázu.

Namiesto zemepisnej šírky budem v texte používať iba polárny uhol θ definovaný ako vo sférických súradniciach! Poloha na Zemi sa odčítava od severného pólu (smeruje doň vektor $\vec{n}$, ak tento "posadíme" do stredu Zeme). Potom miesto so zemepisnou šírkou β na severnej pologuli bude mať $\theta = \frac{\pi}{2} - \beta$. Miesto so zemepisnou šírkou γ na južnej pologuli bude mať $\theta = \frac{\pi}{2} + \gamma$. Zjavne platí $\theta \in \langle 0, \pi \rangle$.

Potom jednotkový vektor od stredu Zeme k miestu na povrchu určeným polárnym uhlom θ a súčasne takému, že v čase $t = 0$ je tam poludnie (to definuje jeho zem. dĺžku), bude mať tvar

$$\vec{u} = \cos \theta \vec{n} + \sin \theta [\cos \omega t \vec{n}_1 - \sin \omega t \vec{n}_2],$$

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} -\sin \varphi \cos \theta - \cos \varphi \sin \theta \cos \omega t & -\sin \theta \sin \omega t & \cos \varphi \cos \theta - \sin \varphi \sin \theta \cos \omega t \end{pmatrix},$$

kde $\omega = \frac{2\pi}{\text{hviezdny deň}} \approx \frac{2\pi}{23h56min}$ je uhlová rýchlosť rotácie Zeme okolo vlastnej osi. Vektor $\vec{u}$ je prirodzene aj jednotkovým vektorom určujúcim smer nadhlavníka na danom mieste. (Tu neuvažujeme sploštenie Zeme!)

Veličina $\omega_0 = \omega - \Omega = \frac{2\pi}{1\text{d}} = \frac{2\pi}{24\text{h}}$ je uhlová rýchlosť otáčania Zeme okolo vlastnej osi vzhľadom na Slnko.

Ďalej sa dá zapísať vektor ukazujúci v mieste na povrchu určenom vektorom $\vec{u}$ na juh (je kolmý na $\vec{u}$ a zároveň má v čase $t = 0$ nulovú y -ovú komponentu a tiež rotuje) a porátať potom, kde slnko vychádza a kde zapadá

$$\vec{n}_{juh} = -\sin\theta \vec{n} + \cos\theta [\cos\omega t \vec{n}_1 - \sin\omega t \vec{n}_2],$$

$$\vec{n}_{juh} = \begin{pmatrix} \sin\varphi \sin\theta - \cos\varphi \cos\theta \cos\omega t & -\cos\theta \sin\omega t & -\cos\varphi \sin\theta - \sin\varphi \cos\theta \cos\omega t \end{pmatrix}.$$

Môžeme zaviesť aj jednotkový vektor v smere na východ

$$\vec{n}_{vychod} = \vec{u} \times \vec{n}_{juh},$$

$$\vec{n}_{vychod} = \begin{pmatrix} \cos\varphi \sin\omega t & -\cos\omega t & \sin\varphi \sin\omega t \end{pmatrix}.$$

Vektory $\vec{u}, \vec{n}_{juh}, \vec{n}_{vychod}$ tvoria pravotočivú ortonormálnu bázu. Možno ich použiť na zavedenie súradníc pozemského pozorovateľa v mieste určenom vektorom $\vec{u}$.

Jednotkový vektor priemetu vektora $\vec{r}$ do dotykového roviny pozorovateľa v mieste na Zemi určenom vektorom $\vec{u}$ je

$$\vec{r}_{\vec{u}} = \frac{\vec{r} - (\vec{r} \cdot \vec{u})\vec{u}}{|\vec{r} - (\vec{r} \cdot \vec{u})\vec{u}|}.$$

3. Finty s vektormi - analytický pohľad

Veľká Finta na určenie výšky slnka nad obzorom

$$\vec{u} \cdot \vec{r} = \cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha = -\cos\left(\frac{\pi}{2} - \psi\right) = -\sin \psi$$

kde uhol α je odklon smeru k slnku od miestneho nadhlavníka a $\psi = \frac{\pi}{2} - \alpha$ je výška slnka nad horizontom v mieste na povrchu určenom vektorom $\vec{u}$. Teda pre $\sin \psi$ dostávame

$$\begin{aligned}\sin \psi &= \cos \theta \sin \varphi \cos \Omega t + \sin \theta \cos \varphi \cos \Omega t \cos \omega t + \sin \theta \sin \Omega t \sin \omega t, \\ \sin \psi &= \cos \theta \sin \varphi \cos \Omega t + \frac{\sin \theta}{2} [(\cos \varphi + 1) \cos(\omega - \Omega)t + (\cos \varphi - 1) \cos(\omega + \Omega)t].\end{aligned}$$

Pre 1 konkrétny deň určený časom T dostaneme

$$\begin{aligned}\sin \psi &= \cos \theta \sin \varphi \cos \Omega T + \frac{\sin \theta}{2} [(\cos \varphi + 1) \cos \omega_0 t + (\cos \varphi - 1) \cos(\omega_0 + 2\Omega)t] \\ \sin \psi &= \cos \theta \sin \varphi \cos \Omega T + \frac{\sin \theta}{2} \{(\cos \varphi + 1) \cos \omega_0 t + (\cos \varphi - 1) [\cos \omega_0 t \cos 2\Omega T - \sin \omega_0 t \sin 2\Omega T]\}\end{aligned}$$

Analýza toho výrazu nám ukáže, že pre 1 deň a dané miesto je prvý člen konštantný. Hlavný člen je zjavne druhý, ktorý nesie v sebe nosnú informáciu o rotácii voči Slnku. Tretí člen je vďaka výrazu $\cos \varphi - 1$ oveľa menší ako druhý (amplitúda je 23-krát menšia) a vykazuje tiež dennú periódu, ktorá je však modulovaná frekvenciou 2Ω . Náзорnejšie si to môžeme ešte prepísať na tvar

$$\begin{aligned}\sin \psi &= \cos \theta \sin \varphi \cos \Omega T + \frac{\sin \theta}{2} \sqrt{A^2(T) + B^2(T)} \cos \omega_0(t - \tau(T)), \\ \text{kde } A &= (\cos \varphi + 1) + (\cos \varphi - 1) \cos 2\Omega T \\ B &= (\cos \varphi - 1) \sin 2\Omega T \\ \tau &= \arcsin \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}} \\ A^2 + B^2 &= 4(1 - \sin^2 \varphi \cos^2 \Omega T) \quad \text{po algebraickej úprave}\end{aligned}$$

Dá sa overiť, že existuje ohraničenie $|\tau(T)| \lesssim 20 \text{ min}$, resp. $\sqrt{A^2(T) + B^2(T)} \in \langle 1.83; 2 \rangle$.

Diskusia: Pohľad na vzorec pre $\sin \psi$ odhaľuje, že poludnie nenastáva každých 24h ani v našom peknom modeli! (Kazí to funkcia $\tau(T)$.) Totiž, poludnie (polnoc) je tam, kde sa rovina určená vektormi $\vec{r}$ a $\vec{n}$ pretína so Zemou. Pomôže mi **obr. 3**, na ktorom vidím, že slnko neobieha okolo vektora $\vec{n}$ (ten by trčal z dotykovej roviny pólu nahor) rovnomerne. Z obrázku vidím, že uhlová rýchlosť priemetu Slnka do roviny pólu (ktorá je určujúca otáčanie roviny poludnia/polnoci) sa počas roka mení. Už aj pre rovnodennosť a slnovrat máme rozličné uhlové rýchlosti. Relatívne zmeny dosahujú až približne 9 % vo veličine Ω_{priemet} , čo spôsobí posun poludnia až o cca 20 s denne (tu si treba uvedomiť, že $T = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{2\pi}{\omega - \Omega_{\text{priemet}}}$). *Toto zistenie ma veľmi prekvapilo. Fyzika je však taká. Veľmi málo vecí je presných. Sú to skôr výnimky. Naše šťastie je to, že nikdy nemerame presne...*

4. Tak ako dlho vlastne trvá 1 deň? (analyticky)

Ako prvé sa pozrime na maximálnu výšku slnka $\psi_{\max}$ nad obzorom počas dňa. To je celkom jednoduché, zjavne

$$\sin \psi_{\max} = \cos \theta \sin \varphi \cos \Omega T + \frac{\sin \theta}{2} \sqrt{A^2(T) + B^2(T)}$$

$$\psi_{\max} = \arcsin \left[\cos \theta \sin \varphi \cos \Omega T + \sin \theta \sqrt{1 - \sin^2 \varphi \cos^2 \Omega T} \right]$$

*Pozn.: tento výsledok je v zhode s výsledkom extrapolácie geometrického náhľadu (**kap. 7**), dáva prirodzene vždy ten "rozumný" uhol, čiže z intervalu $\langle -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \rangle$.*

Východ/západ slnka je určený rovnicou $\vec{u} \cdot \vec{r} = 0 \Leftrightarrow$

$$0 = \cos \theta \sin \varphi \cos \Omega T + \frac{\sin \theta}{2} \sqrt{A^2(T) + B^2(T)} \cos \omega_0(t - \tau(T)),$$

$$t_{1,2} = \frac{1}{\omega_0} \left[\pi - \arccos \left(\frac{2 \sin \varphi \cos \Omega T}{\sqrt{A^2(T) + B^2(T)}} \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \right) \right] + \tau(T).$$

Potom dĺžka dňa vyjde

$$t_{\text{deň}} = t_2 - t_1 \simeq \frac{2}{\omega_0} \arccos \left(\frac{2 \sin \varphi \cos \Omega T}{\sqrt{A^2(T) + B^2(T)}} \cot \theta \right)$$

Pozn.: Výsledok je presne rovnaký ako výsledok vychádzajúci z geometrie!

Rovnaká Finta prichádza na scénu: skálarový súčin $\vec{n}_{\text{juh}} \cdot \vec{r}(t) = -\cos \Psi$, kde Ψ je odklon od juhu. Ak ako čas t položíme čas západu/východu, tak by $\pi - \Psi$ mal byť azimut, kde vychádza/zapadá slnko.

5. Pojednanie o excentricite

V tejto kapitole pojednáme o vplyve excentricity na pohyb Slnka po oblohe. Je to jediná kapitola, kde sa neuvažuje pohyb Zeme po kružnici okolo Slnka.

Vplyv malej excentricity na dĺžku trvania dňa zrejme netreba vyšetrovať. Veď sme si už povedali, že pri vyšetrovaní polohy Slnka na oblohe počas jediného dňa môžeme pokojne člen Ωt považovať za konštantu ΩT , čo je celkom iste oprávnené, lebo rozdiely sú zjavne dostatočne malé (najmarkantnejší rozdiel je pri zvýšení priemetu uhlovej rýchlosti Slnka na horizont, kde sa prejaví denne rozdielom 4 min).

Zrejme však sa excentricita môže prejavíť na posune poludnia voči modelu s kružnicovou dráhou. Preto si niečo porátame. Budeme pracovať v rovine. Do počiatku súradnicovej sústavy umiestnime Slnko (a teda vďaka $M_{Sun} \gg M_{Earth}$ platí, že sa v počiatku bude nachádzať aj jedno z ohnisk elipsy, po ktorej obieha Zem). Súradnice Zeme označím v kartézskej podobe $(x; y)$, v polárnej $(r; \varphi)$. Využijeme 2. Keplerov zákon (plocha, ktorú opíše sprievodič planéty je konštantná) v tvare

$$r^2 \frac{d\varphi}{dt} = konst = \frac{2\pi ab}{T_0} = \frac{2\pi a^2 \sqrt{1-\varepsilon^2}}{T_0}. \quad (5.I)$$

Ďalej si pomôžeme rovnicou elipsy s jedným ohniskom v počiatku

$$\frac{(x - \varepsilon a)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad (5.II)$$

ktorú prepíšeme do polárnych súradníc $(x; y) = (r \cos \varphi; r \sin \varphi)$

$$\frac{(1 - \varepsilon^2 \cos^2 \varphi)}{(1 - \varepsilon^2)} r^2 - 2a\varepsilon \cos \varphi - a^2(1 - \varepsilon^2) = 0.$$

Jediné kladné reálne riešenie pre r je

$$r(\varphi) = \frac{1 - \varepsilon^2}{1 - \varepsilon \cos \varphi} a. \quad (5.III)$$

Dosadením do rovnice (5.I) dostanem diferenciálnu rovnicu pre $\varphi(t)$

$$\frac{1}{(1 - \varepsilon \cos \varphi)^2} \frac{d\varphi}{dt} = \frac{2\pi}{(1 - \varepsilon^2)^{3/2} T_0}. \quad (5.IV)$$

Rovnica je to separovateľná a riešime ju integráciou $\int_{t_1}^{t_2} \dots dt$, pričom ako čas t_1 použijem čas, kedy sa Zem nachádza v aféliu ($\Rightarrow \varphi_1 = 0$); v čase t_2 bude polárny uhol nadobúdať hodnotu φ_2

$$\int_0^{\varphi_2} \frac{d\varphi}{(1 - \varepsilon \cos \varphi)^2} = \frac{2\pi}{(1 - \varepsilon^2)^{3/2}} \frac{t_2 - t_1}{T_0}.$$

Integrál riešime univerzálnou trigonometrickou substitúciou

$$\begin{aligned} u &= \tan \frac{\varphi}{2}; \cos \varphi = \frac{1 - u^2}{1 + u^2}; d\varphi = \frac{2du}{1 + u^2} \\ \Rightarrow 2 \int_0^{\tan \frac{\varphi_2}{2}} \frac{(1 + u^2)du}{[(1 - \varepsilon) + u^2(1 + \varepsilon)]^2} &= \frac{2\pi}{(1 - \varepsilon^2)^{3/2}} \frac{t_2 - t_1}{T_0} \end{aligned}$$

a ďalej rozkladom na parciálne zlomky (preznačenie $\varphi_2 \rightarrow \varphi; t_2 \rightarrow t$) ... bff (Mathematica je naša

spása!)

$$\arctan\left[\sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \tan \frac{\varphi}{2}\right] + \frac{\varepsilon\sqrt{1-\varepsilon^2} \sin \varphi}{2(1-\varepsilon \cos \varphi)} = \pi \frac{t-t_1}{T_0}. \quad (5.V)$$

Rovnica (5.V) je implicitná rovnica pre $\varphi(t)$ platná pre $|t-t_1| \leq \frac{T_0}{2}$. Explicitná forma nie je vyjadriteľná v algebraickej podobe. Môžeme však ľahko vyjadriť funkciu $t(\varphi)$ a tú fitovať nejakou jednoduchšou krivkou, napr. môžeme napísať

$$t(\varphi) = t_1 + t_{\text{kružnicový obeh}}(\varphi) + \Delta t(\varphi),$$

$$\text{kde } t_{\text{kružnicový obeh}}(\varphi) = \frac{\varphi}{\Omega}$$

a $\Delta t(\varphi)$ rozvinúť do Fourierovho radu

$$\Delta t(\varphi) = \frac{\varepsilon}{2\Omega} \sin \varphi + \frac{K}{\Omega} \sin 2\varphi + \alpha(\varphi) = \frac{\varepsilon}{2\Omega} \sin \varphi + \beta(\varphi),$$

$$\text{kde } K = \frac{2(1-\varepsilon^2)^{3/2} - 2 + 3\varepsilon^2}{\varepsilon^2} \approx 0,00021$$

$$\text{a platí } |\alpha(\varphi)| \leq 8 \text{ s, resp. } |\beta(\varphi)| \leq 18 \text{ min } \quad \forall \varphi : |\varphi| \leq \pi.$$

Dostaneme fit

$$\Omega(t-t_1) \simeq \varphi + \frac{\varepsilon}{2} \sin \varphi + \frac{K}{\Omega} \sin 2\varphi, \quad (5.VI)$$

ktorý tiež nie je invertibilný v algebraickej podobe. Približne však platí formula

$$\varphi^*(t) = \Omega(t-t_1) - \gamma \sin \Omega(t-t_1),$$

kde γ je konštanta nájdená s ohľadom na minimalizáciu výrazu $|t(\varphi^*(t)) - t|$ na intervale $\langle -\pi; \pi \rangle$. Pre hodnotu $\gamma = 0.033419$ platí $|t(\varphi^*(t)) - t| \leq 30 \text{ min}$. Obdobne sa dajú "hádať" ďalšie členy a získavať presnejšie aproximácie. Napr., pre presnejšie výpočty sa dá použiť vzorec

$$\varphi^{**}(t) = \Omega(t-t_1) - \gamma \sin \Omega(t-t_1) + \delta \sin 2\Omega(t-t_1), \quad (5.VII)$$

$$\text{kde } \delta = 0.000349$$

$$\text{a platí } |t(\varphi^{**}(t)) - t| \leq 30 \text{ s } \quad \forall t : |t-t_1| \leq \frac{T_0}{2}.$$

Záver: Z formúl (5.VI), resp. (5.VII) už vidíme, že chyba pri určení uhla $\varphi(t)$ oproti kružnicovému modelu je pod hranicou 2° . To znamená, že Slnko bude niekedy počas roka prebiehať oblohou o najviac 8 min inokedy ako v našom modeli (za ten čas sa Zem otočí vďaka vlastnej rotácii o tie 2°).

Pozn.: Vplyv meniacej sa vzdialenosti neštudujeme.

6. Poloha slnka na oblohe a azimut

Ako prvé dokážeme, že pozorovateľ na Zemi na mieste danom vektorom $\vec{u}$ vidí slnko v rámci dňa pohybovať sa v rovine (tá sa nazýva ekliptika). *Dôkaz urobím preto, aby som sa o tom presvedčil, keďže si to neviem pekne predstaviť.*

Zvoľme za bázu pozorovateľa trojicu vektorov $\vec{u}, \vec{n}_{juh}, \vec{n}_{východ}$. Zapišeme vektor do slnka $-\vec{r} = \begin{pmatrix} -\cos\Omega T & -\sin\Omega T & 0 \end{pmatrix}$ - uvažujeme ho konštantný počas dňa - v súradniciach pozorovateľa

$$x = -\vec{r} \cdot \vec{u} = \sin\theta \cos\varphi \cos\omega t \cos\Omega T + \cos\theta \sin\varphi \cos\Omega T + \sin\theta \sin\omega t \sin\Omega T,$$

$$y = -\vec{r} \cdot \vec{n}_{juh} = \cos\theta \cos\varphi \cos\omega t \cos\Omega T - \sin\theta \sin\varphi \cos\Omega T + \cos\theta \sin\omega t \sin\Omega T,$$

$$z = -\vec{r} \cdot \vec{n}_{východ} = \cos\omega t \sin\Omega T - \cos\varphi \sin\omega t \cos\Omega T.$$

Ďalej nám už len stačí ukázať, že pre $\forall t$ platí, že bod $\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}$ leží v jednej konkrétnej rovine. Môžeme si tipnúť, že normála tejto roviny bude vektor $\vec{n}$, tak si tiež nájdeme jeho súradnice v sústave pozorovateľa

$$x_{\vec{n}} = \vec{n} \cdot \vec{u} = \cos\theta,$$

$$y_{\vec{n}} = \vec{n} \cdot \vec{n}_{juh} = -\sin\theta,$$

$$z_{\vec{n}} = \vec{n} \cdot \vec{n}_{východ} = 0.$$

Mimochodom, zhruba v tomto smere je Polárka. V dne, v noci! Ostáva nám rovnica s 1 neznámou

$$\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{\vec{n}} & y_{\vec{n}} & z_{\vec{n}} \end{pmatrix} = d,$$

$$\sin\varphi \cos\Omega T = d.$$

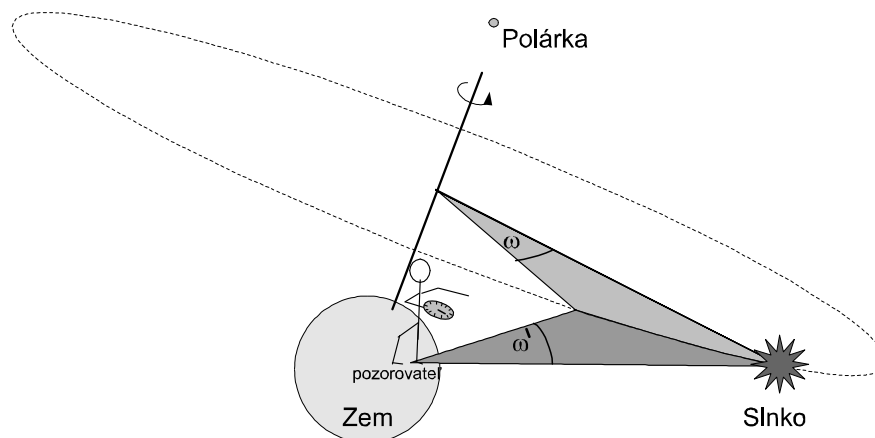
Výborné (d vyšlo pre konkrétny deň konštanta). Dôkaz je hotový.

Ďalej ukážeme, že uhlová rýchlosť pohybu Slnka je pre pozorovateľa konštantná (opäť v priblížení jedného dňa). *Tomuto som ochotný veriť, ale pre úplnosť som si to preveril.* Na to nám stačí určiť

$$\omega_{pozorovaná} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2},$$

$$\omega_{pozorovaná} = \frac{3\omega}{4} + \frac{\omega}{4}(\cos 2\varphi - \cos 2\Omega T) + \frac{\omega}{8}[\cos(2\varphi - 2\Omega T) + \cos(2\varphi + 2\Omega T)].$$

Výsledok je možno trochu prekvapivý, ale každopádne uveriteľný. Počas dňa je uhlová rýchlosť slnka na oblohe konštantná, ale v priebehu roka sa mení. Nie veľmi výrazne, keďže uhol φ je relatívne malý. Na rovnodennosť dosahuje maximum, konkrétne ω . Počas slnovratov opisuje slnko menšiu kružnicu a preto je aj jeho uhlová rýchlosť nižšia.



Obr. 2. Ilustračný obrázok k $\omega_{\text{pozorovaná}} \stackrel{\text{ozn.}}{=} \omega'$ a využitiu hodiniek.

Teraz nám už nič nebráni, aby sme zhodnotili funkčnosť metódy určovania severo-južného smeru pomocou ručičkových hodín! Na základe predošlých 2 tvrdení s dôkazom a tvrdenia z **kap. 7** o tom, že na poludnie je slnko nad severo-južným smerom, možno konštatovať, že hodinky možno použiť na určenie tohoto severo-južného smeru. Postup ako to treba urobiť, by už mal byť jasný:

A. Hodinky natočím tak, aby ciferník bol rovnobežný s ekliptikou (rovina zdanlivého pohybu slnka po oblohe).

B. Nastavím hodinovú ručičku na slnko.

C. Predelím uhol medzi hodinovou ručičkou a polohou, kde bude hodinová ručička na poludnie (miestne!!!), na polovicu, a dostanem smer v rovine ekliptiky, kde bude/bolo slnko na poludnie. Tento smer sa nachádza nad severo-južným smerom.

Dôkaz funkčnosti: Metóda zjavne funguje na miestne poludnie. V iných časoch funguje tiež, lebo uhlová rýchlosť smeru daného polovicou uhla medzi hodinovou ručičkou a pevným smerom na ciferníku je konštantná, konkrétne $\frac{2\pi}{T_2}$. Pohyb slnka po ekliptike prebieha tiež rovnomerne (viď dôkaz vyššie) a v rámci ekliptiky (rovina) tiež uhlovou rýchlosťou $\frac{2\pi}{T_2}$ (POZOR: uhlová rýchlosť, ktorú vidí pozorovateľ je iná, ale to nevadí, lebo hodinky nám ukazujú len smer do ekliptiky! Viď ilustračný **obr. 2**, kde $\omega = \frac{2\pi}{T_2}$ a $\omega_{\text{pozorovaná}}$ je označená ako ω'). Točenie prebieha v rovnakom zmysle. Tým je dôkaz hotový.

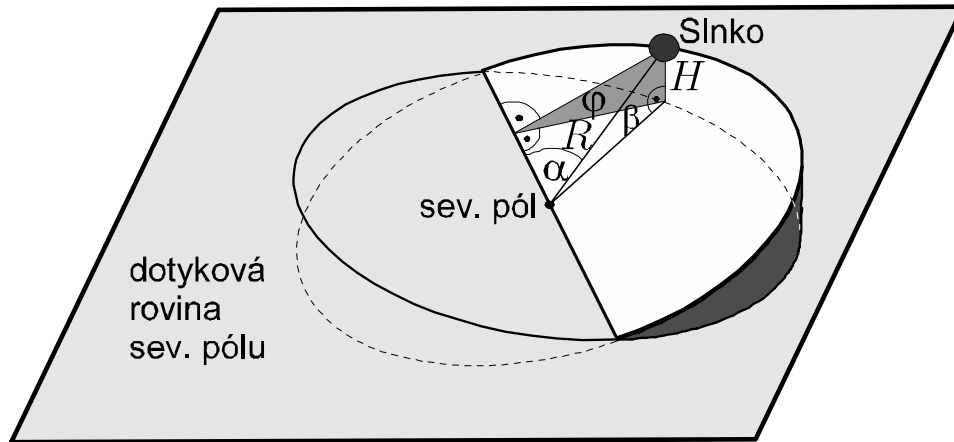
Pozn.: miestne poludnie sa najjednoduchšie určí ako čas v strede medzi východom a západom slnka (ak je horizont nie veľmi členitý!).

Pozn.: v priblížení jedného dňa je pohyb slnka po oblohe taký istý ako pohyb všetkých hviezd - t.j. slnko sa pohybuje po kružnici okolo svetového pólu (zhruba okolo Polárky).

Pozn.: vedieť na oblohe určiť rovinu pohybu slnka nemusí byť celkom jednoduché! V podstate by bolo treba poznať aspoň 3 body, kadiaľ po oblohe prechádzalo a v zmysle predošlej poznámky si domyslieť celú kružnicu (resp. jej viditeľnú časť). Potom však už teoreticky žiadne hodinky nepotrebujeme, keďže v strede tej kružnice je svetový pól!

7. Poludnie - geometricky

Pre náš model je správny vzťah pre výšku slnka na poludnie $\theta + \arcsin(\sin \varphi \cos \Omega t)$ pre slušné zem. šírky (vysvetlím ďalej). Platí presne, avšak poludnie vskutku nenastáva každých 24 h. Ukážeme najprv, že to platí pre severný pól (preň $\theta = 0$)

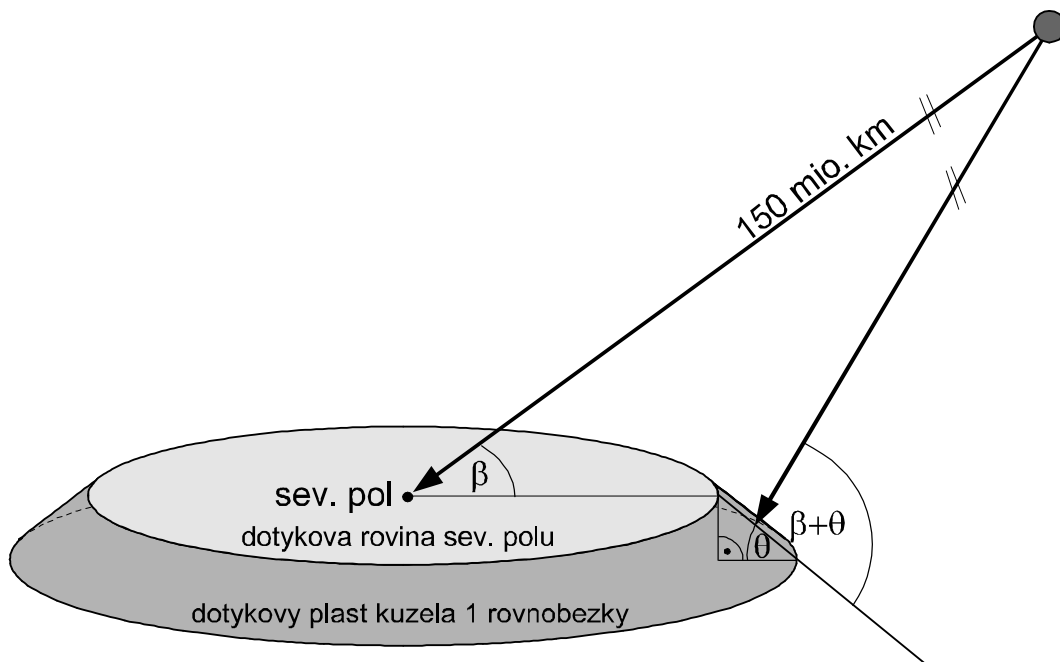


Obr. 3. Zdanlivý pohyb slnka pri pohľade zo severného pólu.

$$\Rightarrow \beta = \arcsin(\sin \varphi \sin \alpha) = \arcsin(\sin \varphi \cos \Omega t)$$

Pozn.: $\sin \rightarrow \cos$ kvôli tomu, že čas t nám beží od letného slnovratu a nie ako uhol α od rovnodennosti ako je to na obrázku.

Teraz môžeme situáciu extrapolovať aj na iné zemepisné šírky, poslúži nám tiež obrázok



Obr. 4. Ten dotykový plášť je taký pásik zo sféry, na ktorom je náš sledovaný bod. z ktorého by malo byť jasné aj to, že na pravé miestne poludnie sa slnko nachádza nad

severo-južným smerom.

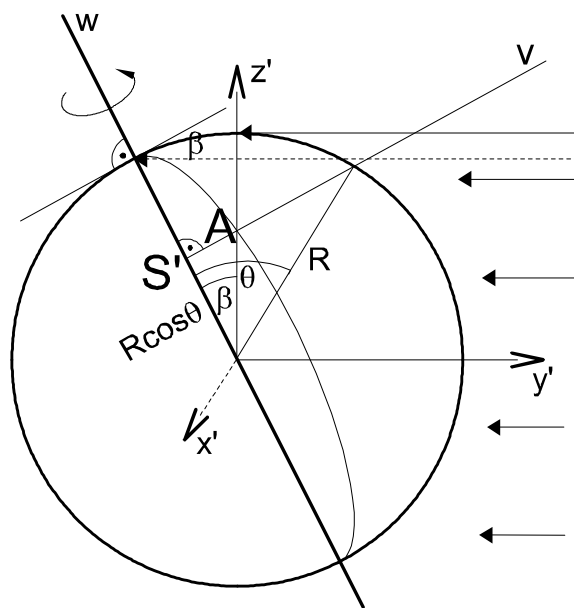
Výsledok teda je, že výška slnka na poludnie na mieste určenom polárnym uhlom θ v čase t je ten rozumný uhol z $\{\beta + \theta, \pi - \beta - \theta\}$, zjavne treba zobrať odlišný pre rôzne pre zem. šírky z polárnych oblastí, či z rozmedzia obratníkov (a to som myslel tými rozumnými zemepisnými šírkami).

Numericky platí veľmi presne (max. odchýlka nepresiahne $\delta = 18'$), že výška slnka na poludnie je $\theta + \varphi \cos \Omega t$ pre slušné zem. šírky (pre tie medzi obratníkmi to platí iba pre časť roka a pre tie na južnej pologuli južne od obratníka Kozorožca to platí ako: $\pi - \theta - \varphi \cos \Omega t$). To funguje len vďaka tomu, že $\sin 23,5^\circ \approx 23,5^\circ \frac{\pi \text{ rad}}{180^\circ}$ s presnosťou lepšou ako 3 %.

8. Dĺžka dňa počas roka - geometricky

Analytické riešenie sme predložili v rámci **kapitoly 4**. Dokonca veľmi prehľadné a stručné, si tvrdím povedať. Radi by sme dospeli ku konsenzu s geometrickou predstavou. Tento prístup už svojou povahou v záznamovej forme žiaľ nemôže byť natoľko prehľadný...

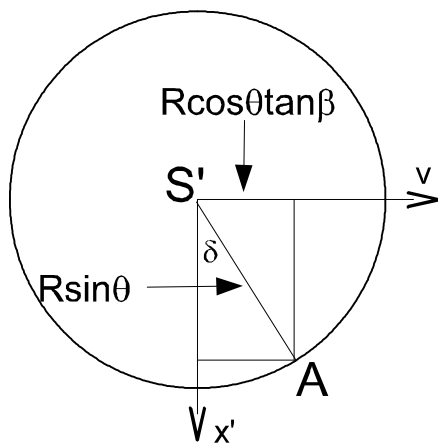
Ideme preskúmať, ako sa v našom modeli rádovo (tie sekundové až minútové odchýľky nám neublížia) mení dĺžka dňa počas roka na danom mieste. Pomôžeme si, ako ináč, obrázkom



Obr. 5. V mieste A (rovnobežke, na ktorej sa nachádza prislúcha mu polárny uhol θ) práve vychádza slnko (to je vpravo a šípky znázorňujú dopadajúce lúče).

Uhol β (na tomto obr. má zápornú veľkosť!) je ten istý, čo v predošlej kapitole.

Z **obr. 5** (priemet situácie do roviny zemská os - Slnko) vieme, že dĺžka priemetu vzdialenosti $S'A$ do roviny $y'z'$ je rovná $R \cos \theta \tan \beta$. Pomôžeme si ďalej ďalším obrázkom



Obr. 6. Priemet situácie z predošlého obrázka do roviny určenej vektormi x' a v .

odkiaľ zistíme, že $\sin \delta = \frac{\cos \theta \tan(-\beta)}{\sin \theta} = -\cot \theta \tan \beta$ (to znamienko mínus je za to, že na **obr. 5** je uhol β chápaný ako záporný). Počas dňa sa bod A pohybuje po kružnici znázonenej na **obr. 6** a osvetlený bude zrejme na časti kružnice so stredovým uhlom o veľkosti $\pi - 2\delta$. Čiže dĺžka dňa potom bude

$$t_{\text{svetlo}} = \frac{\pi - 2\delta}{2\pi} 24 \text{ h}$$

$$t_{\text{svetlo}} = \left(\frac{1}{2} + \frac{\arcsin(\cot \theta \tan \beta)}{\pi} \right) 24 \text{ h}$$

keďže pre ľubovoľný uhol ϑ platí $\arcsin \vartheta + \arccos \vartheta = \frac{\pi}{2}$, tak dostávame

$$t_{\text{svetlo}} = \left(1 - \frac{\arccos(\cot \theta \tan \beta)}{\pi} \right) 24 \text{ h}$$

$$t_{\text{svetlo}} = \left(1 - \frac{1}{\pi} \arccos \left(\frac{\sin \beta}{\sqrt{1 - \sin^2 \beta}} \cot \theta \right) \right) 24 \text{ h}$$

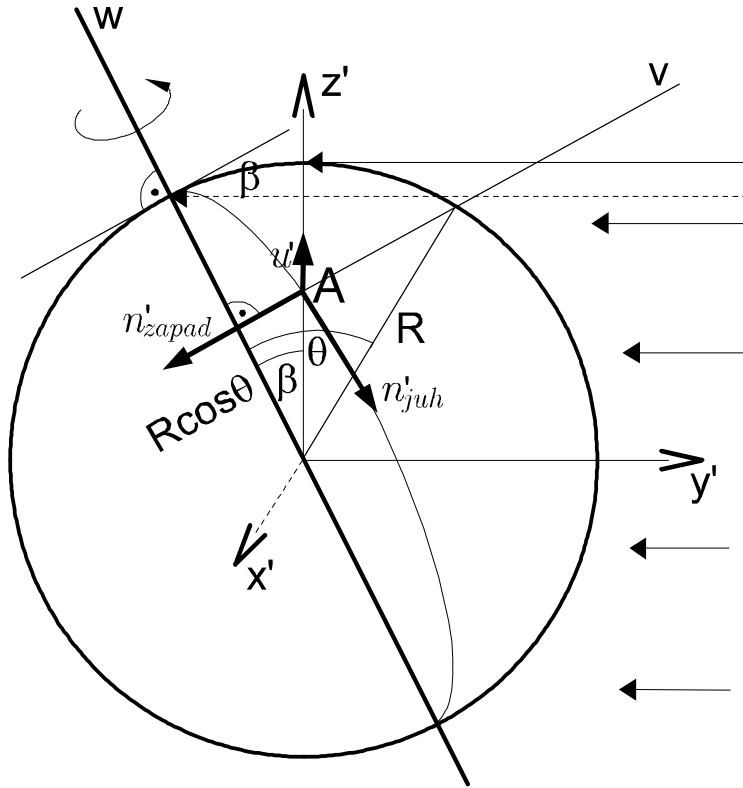
čo po dosadení uhla β z predošlej kapitoly dáva

$$t_{\text{svetlo}} = \left(1 - \frac{1}{\pi} \arccos \left(\frac{\sin \varphi \cos \Omega t}{\sqrt{1 - \sin^2 \varphi \cos^2 \Omega t}} \cot \theta \right) \right) 24 \text{ h}$$

Tak napr. u nás kolíše dĺžka dňa s amplitúdou cca 3 h 50 min. Viac nájdete v **kap. 10** na **grafe 1**.

9. Kde vychádza slnko? Na východe? (geometricky)

Prišiel čas, keď spočítame azimut, kde vychádza slnko. Pomôžeme si opäť obrázkom. Užijeme rez Zeme rovinou *zemská os - Slnko*, v ktorej poznáme uhol medzi lúčom zo Slnka a morskou osou (uhol β z **kapitoly 7**). Ďalej vieme, že poludnie/polnoc je na priemete Zeme (úžnica), a východ/západ v rovine kolmej na lúči a prechádzajúcej stredom Zeme.

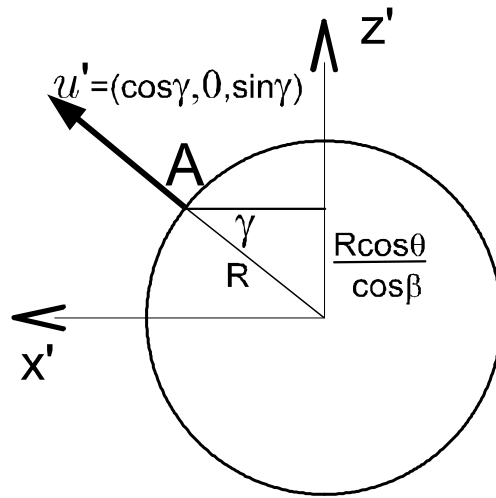


Obr. 7. Rez Zeme rovinou zemská os - Slnko. V mieste A vychádza slnko.

Zavediem vhodné súradnice $x'y'z'$, v ktorých určím vektor určujúci smer zo Slnka prichádzajúcich lúčov $\vec{r} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Obr. 8 nám pomôže určiť v rovine $x'z'$ vektor normály na povrchu skúmaného miesta $\vec{u} = \begin{pmatrix} \cos \gamma & 0 & \sin \gamma \end{pmatrix}$, kde $\sin \gamma = \frac{\cos \theta}{\cos \beta}$, teda

$$\vec{u'} = \begin{pmatrix} \sqrt{1 - \left(\frac{\cos\theta}{\cos\beta}\right)^2} & 0 & \frac{\cos\theta}{\cos\beta} \end{pmatrix}$$



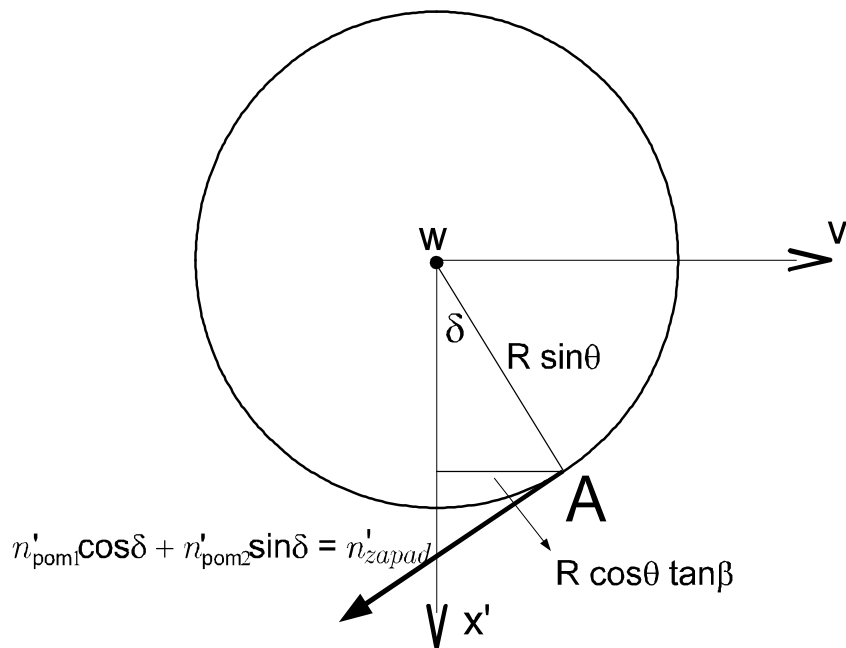
Obr. 8. Priemet do roviny $x'z'$. Odtiaľto určíu uhol γ .

Pokračujem určením "poludníka" (δ) - vid' **obr. 9** -, na ktorom leží mnou skúmané miesto A na Zemi a určením vektoru ukazujúceho na západ. Ten nájdeme v rovine kolmej na zemskú os (w), v ktorej leží rovnobežka $\frac{\pi}{2} - \theta$. Pomôžem si tiež pomocnými vektormi

$\vec{n}'_{pom1} = \begin{pmatrix} 0 & -\cos \beta & \sin \beta \end{pmatrix}$ (tu treba dať opäť raz pozor, lebo tak ako to je na **obr. 7** je $\sin \beta$

záporné!; tento vektor má smer v a orientáciu zhodnú s priemetom vektora $\vec{n}'_{ZAPAD}$) a

$\vec{n}'_{pom2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, ktoré sú na seba kolmé a ležia v rovine rovnobežky $\frac{\pi}{2} - \theta$, po ktorej sa pri otáčaní Zeme pohybuje bod A.



Obr. 9. *Priemet do $x'v$.* Odtiaľto určíme $\overrightarrow{n'_{ZAPAD}}$.

V minulej kapitole sme už ukázali, že $\sin \delta = -\cot \theta \tan \beta$. Potom z **obr. 9** určíme

$$\begin{aligned}\overrightarrow{n'_{ZAPAD}} &= \cos \delta \overrightarrow{n'_{pom1}} + \sin \delta \overrightarrow{n'_{pom2}} \\ \overrightarrow{n'_{ZAPAD}} &= \cos \delta \begin{pmatrix} 0 & -\cos \beta & \sin \beta \end{pmatrix} + \sin \delta \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \overrightarrow{n'_{ZAPAD}} &= \begin{pmatrix} \sin \delta & -\cos \delta \cos \beta & \cos \delta \sin \beta \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Ďalej využijeme, že vektory $\overrightarrow{n'_{ZAPAD}}$, $\overrightarrow{n'_{JUH}}$ a $\vec{u}$ musia byť na seba kolmé, teda

$$\begin{aligned}\overrightarrow{n'_{JUH}} &= \vec{u} \times \overrightarrow{n'_{ZAPAD}} = \begin{pmatrix} \sqrt{1 - \left(\frac{\cos \theta}{\cos \beta}\right)^2} & 0 & \frac{\cos \theta}{\cos \beta} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \sin \delta & -\cos \delta \cos \beta & \cos \delta \sin \beta \end{pmatrix} \\ \overrightarrow{n'_{JUH}} &= \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \delta & \frac{\cos \theta}{\cos \beta} \sin \delta - (\cos \delta \sin \beta) \sqrt{1 - \frac{\cos^2 \theta}{\cos^2 \beta}} & -(\cos \beta \cos \delta) \sqrt{1 - \frac{\cos^2 \theta}{\cos^2 \beta}} \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Ďalej už len určíme uhol ϑ medzi smerom na juh $\overrightarrow{n'_{JUH}}$ a smerom ku slnku pomocou skal. súčinu

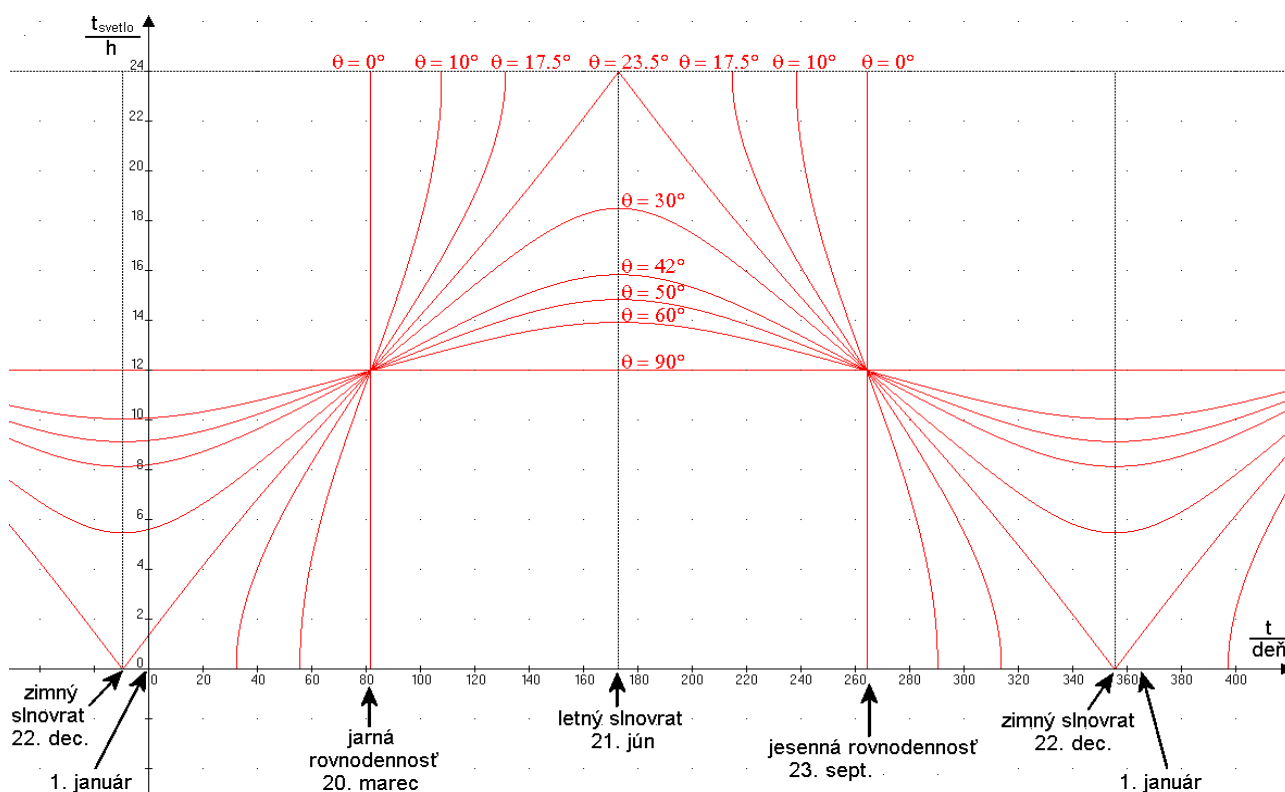
$$\begin{aligned}\cos \vartheta &= -\vec{r} \cdot \overrightarrow{n'_{JUH}} = \frac{\cos \theta}{\cos \beta} \sin \delta - \sin \beta \cos \delta \sqrt{1 - \frac{\cos^2 \theta}{\cos^2 \beta}} \\ \cos \vartheta &= -\frac{\cos \theta}{\cos \beta} \frac{\tan \beta}{\tan \theta} - \sin \beta \sqrt{1 - \left(\frac{\tan \beta}{\tan \theta}\right)^2} \sqrt{1 - \left(\frac{\cos \theta}{\cos \beta}\right)^2} \\ \cos \vartheta &= -\frac{\cos^2 \theta}{\cos^2 \beta} \frac{\sin \beta}{\sin \theta} - \sin \beta \sqrt{1 - \frac{\sin^2 \beta \cos^2 \theta}{\cos^2 \beta \sin^2 \theta}} \sqrt{1 - \frac{\cos^2 \theta}{\cos^2 \beta}} \\ \cos \vartheta &= -\frac{\sin \beta}{\cos^2 \beta \sin \theta} \left[\cos^2 \theta + \sqrt{(\cos^2 \beta \sin^2 \theta - \sin^2 \beta \cos^2 \theta)(\cos^2 \beta - \cos^2 \theta)} \right] \\ \cos \vartheta &= -\frac{\sin \beta}{\cos^2 \beta \sin \theta} \left[\cos^2 \theta + \sqrt{\frac{1}{4}(\cos 2\beta - \cos 2\theta)^2} \right] \\ \cos \vartheta &= -\frac{\sin \beta}{\cos^2 \beta \sin \theta} \left[\cos^2 \theta + \frac{1}{2}((2\cos^2 \beta - 1) - (2\cos^2 \theta - 1)) \right] \\ \cos \vartheta &= -\frac{\sin \beta}{\sin \theta} \\ \vartheta_{od\ juhu} &= \arccos\left(-\frac{\sin \beta}{\sin \theta}\right) = \pi - \arccos \frac{\sin \beta}{\sin \theta} \\ \vartheta_{od\ východu} &= \vartheta_{od\ juhu} - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} - \arccos \frac{\sin \beta}{\sin \theta}\end{aligned}$$

Finálny výsledok determinujúci odchýľku (kladná znamená severnejšie, záporná južnejšie) v azimute miesta, kde vychádza slnko počas roka na mieste na Zemi určenom polárnym uhlom θ

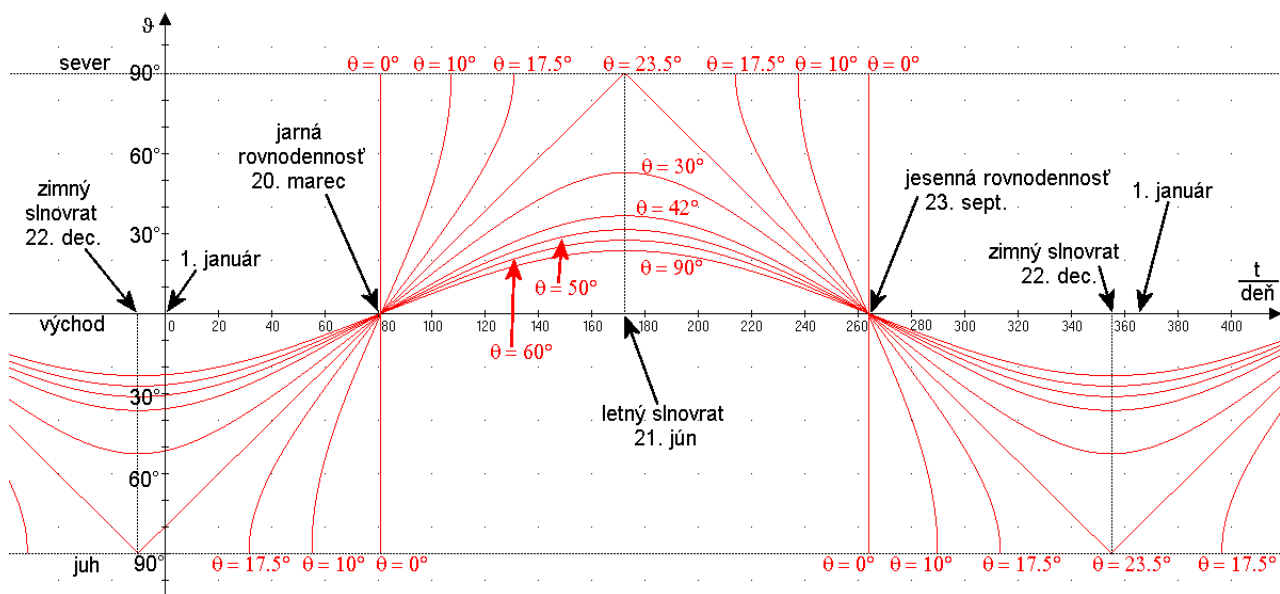
$$\vartheta_{od\ východu} = \frac{\pi}{2} - \arccos \frac{\sin \varphi \cos \Omega t}{\sin \theta}$$

Tak napr. u nás kolíše azimut východu slnka s amplitúdou cca $36,5^\circ$, viac sa dá nájsť v nasledovnej kapitole v **grafe 2**.

10. Výsledky v grafoch



Graf 1. Graf závislosti dĺžky dňa od dňa v roku pre vybrané zemepisné šírky na severnej pologuli.



Graf 2. Graf závislosti azimutu východu slnka od dňa v roku pre vybrané zem. šírky na sev. pologuli.

11. The End

V tejto kapitole by sa patrilo povedať čosi o tom, nakoľko je náš model použiteľný, aká je jeho presnosť, prediskutovať možné korekcie a podobne. Nakoľko to by som sa musel pustiť do riešenia tých zložitejších problémov (a to nebol môj cieľ), tak nič také nebude.

Ale treba povedať, že grafy vyzerajú rozumne. Takže fatálne chybné by tie výsledky nemali byť. Taktiež som robil námatkovú kontrolu a aj keď som s mojím kompasom nebol schopný meraním určiť odchýľku od výpočtov, aspoň rádový súhlas som zaznamenal. Čo sa dĺžky dňa týka, tak tu bol výsledok podrobený konfrontácii s údajnými časmi východu a západu slnka (zaujímavý je samozrejme rozdiel) podľa *Bratislavských novín* a výsledok bol značne uspokojujúci, presnosť dosiahla asi 10 min (koncom novembra, čiže blízko pri dosahovaní amplitúdy) - čo je na úrovni diskusie o tom, či za východ Slnka považujeme čas, kedy sa vrch slnečného kotúča dotkne horizontu (zospodu), alebo prijmeme astronomickú definíciu (ktorá sa vyhýba aj lomu svetla v atmosfére), totiž, že to je okamih, keď stred Slnka reálne je na úrovni horizontu (vidíme ho kvôli lomu kdesi vyššie!).

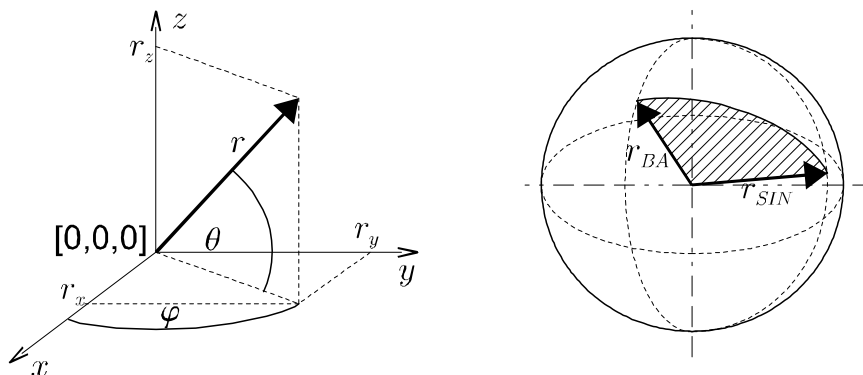
Čo sa samotného času význačných denných udalostí (východ slnka, západ slnka, poludnie, poľnoc) týka, tak tu mi zatiaľ chýba nejaký kalibračný bod. O poludní sme napríklad zistili, že (odhliadnuc od ľudských komplikácií v podobe letného a zimného času) voči nejakému času má rozptyl do 28 min (20 min za funkciu $\tau(T)$ - vid' **kap. 3** - a 8 min za excentricitu - vid' **kap. 5**). Tento ročný pohyb denných udalostí zatiaľ nie je overený z iných zdrojov.

12. Bonus I

Príklad: Vypočítaj čas letu lietadla priemernou rýchlosťou $v = 850 \text{ km h}^{-1}$ z Bratislavy (48° severnej zemepisnej šírky, 18° východnej zemepisnej dĺžky) do Singapúru (1° severnej zemepisnej šírky, 104° východnej zemepisnej dĺžky)! $R_Z = 6378 \text{ km}$.

Riešenie: Opäť využijeme vektory a skalárny súčin. Vektory zapíšeme jednoducho, ak si spomenieme na sférické súradnice

$$\vec{r} = R_Z(\cos \theta \cos \varphi, \cos \theta \sin \varphi, \sin \theta)$$



Obr. 10. Vľavo je vektor určený v sférických súradniciach r, θ, φ .

Vpravo Zem s vektormi do BA a SIN a vyšrafovanou rovinou letu.

Teraz metódou pozriem (na obrázok) a vidím tipnem, že dráha lietadla bude v rovine určenej vektormi $\vec{r}_{BA}$ a $\vec{r}_{SIN}$. Využijem skalárny súčin a určím uhol α , ktorý vektory zvierajú. Potom L je dĺžka oblúka kružnice o polomere R_Z so stredovým uhlom α , teda:

$$L = R_Z \alpha = R_Z \arccos\left(\frac{\vec{r}_{BA} \cdot \vec{r}_{SIN}}{R_Z^2}\right)$$

$$\alpha = \arccos(\cos \theta_{BA} \cos \varphi_{BA} \cos \theta_{SIN} \cos \varphi_{SIN} + \cos \theta_{BA} \sin \varphi_{BA} \cos \theta_{SIN} \sin \varphi_{SIN} + \sin \theta_{BA} \sin \theta_{SIN})$$

$$\text{Výsledok: } T = \frac{L}{v} = \frac{R_Z}{v} \alpha \approx 11 \text{ h } 20 \text{ min.}$$

13. Bonus II

Pri západe slnka vidíme, že slnečný kotúč je sploštený (UPOZORNENIE: použite okuliare na pozorovanie zatmenia slnka!). To je v dôsledku ohybu lúčov prechádzajúcich atmosférou pod veľkým uhlom. Slnko je v skutočnosti nižšie ako sa javí.



Obr. 11. *Fotka východu slnka nad Krasňanmi, BA, 20. 12. 2006.*

14. Thanks for your attention!



Obr. 12. *Nebeská mechanika premietnutá do KRÁSNA.
(Ako optický prístroj sú tu použité sklenené presýpacie
hodiny plávajúce vo vode v sklenenom valci.)*