FYZIKÁLNY KOREŠPONDENČNÝ SEMINÁR

vzorové riešenia 3. série
A-kategória (starší)
16.ročník
letný semester
školský rok 2000/2001

FKS, KZDF FMFI UK
Mlynská dolina
842 48 Bratislava
`fks@center.fmph.uniba.sk`
`www.fks.sk`

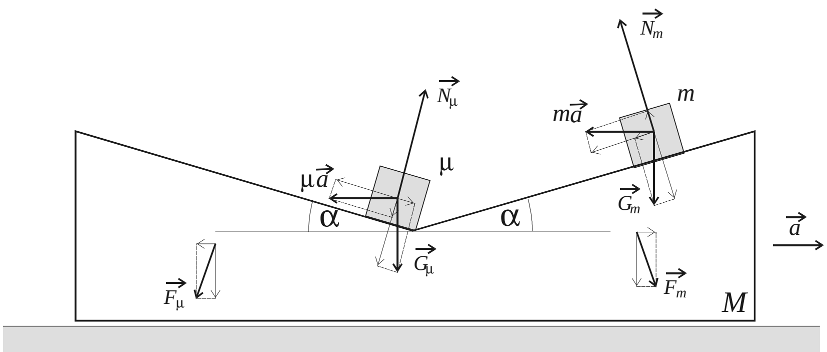
A-3.1 Vyhlodaný hranol (opravoval Stano)

*Na vodorovnej rovine je položený vyhlodaný hranol hmotnosti **M** (pozri obrázok), ktorý sa po nej môže bez trenia pohybovať. V najnižšom mieste leží kocôčka s hmotnosťou **μ**. Na naklonenej časti hranolu leží kocôčka o hmotnosti **m**. Aj malé kocôčky sa môžu pohybovať po vyhlodanom hranole bez trenia. Aká musí byť splnená podmienka pre hmotnosti **M**, **m**, a **μ** a uhol **α**, aby sa po uvoľnení kocôčky **m** kocôčka **μ** začala voči hranolu **M** pohybovať?*

Na začiatok by som poznamenal, že kocôčka μ sa začne pohybovať kvôli zákonu zachovania hybnosti a nie preto, že na ňu kocôčka m narazí ako si podaktorí z vás mysleli. Keď totiž máme izolovanú sústavu, ktorá je v pokoji, čiže hybnosť jej ťažiska je nulová a jedna jej časť sa začne pohybovať, musí sa v tom istom okamihu pohnúť opačným smerom iná jej časť. Výsledná hybnosť musí byť opäť nulová. Alebo ak chcete, ak sa jej ťažisko nepohybovalo predtým, nesmie sa ani potom.

Predstavte si, že kocôčka m na hranole nie je. Vtedy by sa nedialo nič, pretože kocka μ by bola „zapretá“ o roh vyhlodaného miesta. Keď by sa však už mala začať pohybovať, situácia by vyzerala ako na obrázku.

Na hranol pôsobia dve prítlačné sily od malých kocočiek, N_μ a N_m. Tie mu udeľujú zrýchlenie a. Prejdime teraz do sústavy hranola. Táto je neinerciálna, preto pridáme ku každému telesu zotrvačnú silu $F_a = -$ *hmotnosť* $\times\, a$. Výsledná sila pôsobiaca na hranol v x-ovom smere musí byť v tejto sústave nulová, pretože hranol sa v nej nehýbe.



Na obe kocôčky pôsobia teda tri sily: tiažová sila, zotrvačná sila a sila reakcie podložky. Reakcia podložky je vlastne taká veľká, aby vyvážila zložku výslednice tiaže a zotrvačnej sily kolmú na naklonenú rovinu. Pre kocôčku m je reakcia podložky rovná

$$N_m = mg\cos\alpha - ma\sin\alpha\ ,$$

a pre kocku μ je

$$N_\mu = \mu g\cos\alpha + \mu a\sin\alpha\ .$$

To sú ale zo zákona akcie a reakcie práve opačné sily, ako tie, ktorými pôsobia kocôčky na hranol. Kocka m ho teda urýchľuje a μ ho spomaľuje. Teraz sa znova vrátime k obrázku a pozrieme sa ako sa rozkladajú tieto sily. Ich zvislá zložka nás nezaujíma, pretože o tú sa postará podložka (stôl). Vodorovný pohyb hranola teda spôsobuje rovnobežná zložka. A preto pre výslednú silu pôsobiacu na hranol v jeho vlastnej neinerciálnej sústave (ak pridáme aj zotrvačnú silu pôsobiacu na samotný hranol) musí platiť:

$$0 = N_m \sin\alpha - N_\mu \sin\alpha - Ma,$$

$$0 = mg\cos\alpha\sin\alpha - ma\sin^2\alpha - \mu g\cos\alpha\sin\alpha + \mu a\sin^2\alpha - Ma$$

$$a = \frac{(m-\mu)g\sin\alpha\cos\alpha}{M + m\sin^2\alpha + \mu\sin^2\alpha}$$

Podmienka na to, aby sa kocôčky μ pohla, je (ako vidíme z obrázku) $\mu\, a\cos\alpha > \mu\, g\sin\alpha$. A keď do tejto nerovnosti dosadíme zrýchlenie, po niekoľkých úpravách dostaneme:

$$m\ \cos 2\alpha > M + \mu,$$

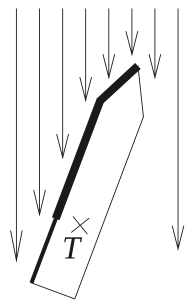
z čoho môžeme usúdiť, že hmotnosť kocôčky m musí byť vždy väčšia ako súčet hmotností hranola M a druhej kocôčky μ. A sklon rovín nesmie byť väčší ani rovný ako 45°. Toť fsio.

A-3.2 Neovládaná loď (opravoval Braňo Saxa)

Možno ste si niekedy všimli, že loď, ktorá vypne motory a prestane kormidlovať, sa začne po chvíľke otáčať okolo zvislej osi vzhľadom na smer svojho pôvodného pohybu. Funguje to na veľkých lodiach plaviacich sa po mori alebo po Dunaji, ale aj na kanojkách a kajakoch. Prečo je to tak? Čo núti loď, aby sa neplavila ďalej rovno, ale otáčala sa?

Prečo sa tie lode točia? A prečo točí suseda, keď si vypije? A vôbec, prečo sa ešte natáčajú nové diely Priateľov? Určite za to môže Coriolisova sila, aj keď neviem prečo, ale aj tak jej veľmi nerozumiem... Žiaľ, nie za všetko točenie na svete môže chúďa Coriolisova sila, aj keď chápem, že pokušenie zbaviť sa problému takto jednoducho bolo pre mnohých riešiteľov lákavé.

Ak by za otáčanie lodí po vypnutí motorov a opustení kormidla mohla naozaj táto sila, všetky lode na severnej pologuli by sa v tej chvíli točili stále do tej istej strany. Takto to naozaj nie je a tí z vás, ktorí majú akú-takú skúsenosť s loďou vedia, že sa to točí všelijako.



Pohyb lode sa dá popísať smerom pohybu ťažiska lode a smerom rotačného pohybu lode okolo tohoto ťažiska. Nás zaujíma ten druhý pohyb. Na to aby loď rotovala, musí na ňu pôsobiť nejaký moment síl. Keď loď prestane kormidlovať a vyone motory, zotrvačnosťou sa ešte bude pohybovať, pretože doteraz mala nejakú relatívnu rýchlosť oproti vode (veď lode sa nenechávajú uniesť prúdom). S veľkou pravdepodobnosťou nepôjde úplne rovno v smere svojej osi, ale trochu na jednu alebo druhú stranu. Ak by aj nie, nejaká nepravidelnosť ju z toho smeru určite vychýli. Predstavme si teraz, ako na takú loď pôsobí voda, ktorá sa z hľadiska lode pohybuje proti smeru pohybu lode. Dôležité je si uvedomiť, že lode sa stavajú tak, že majú ťažisko posunuté vždy trochu dozadu, čo je dané jednak tvarom lode, ale hlavne rozložením hmotnosti. Situácia potom vyzerá tak ako na obrázku.

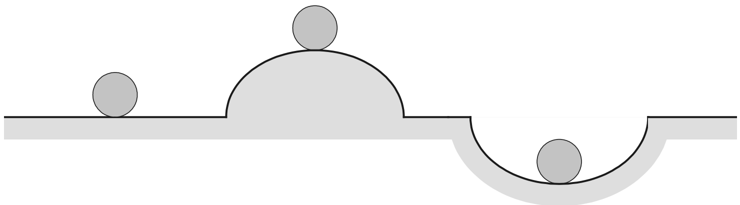
Voda pôsobí silou na celú ľavú stranu lode (stredne zvýraznená), no vzhľadom na polohu ťažiska je plocha medzi provou a ťažiskom väčšia ako plocha za ťažiskom. Preto aj výsledný moment síl bude spôsobovať v tomto prípade pravotočivý smer otáčania. Ak by sa loďka po prerušení kormidlovania vychýlila naopak málo do ľavej strany, voda by pôsobila rovnako na pravú stranu lode.

Celý efekt sa dá hádam jednoduchšie pochopiť, ak sa vžijete do sústavy spojenej s loďou. Predstavte si, že ste na lodi, ktorá je v ťažisku upevnená ku dnu a okolo tečie rieka (loď je otočená proti prúdu). Loď sa môže otáčať len okolo ťažiska a tak akonáhle sa loď vychýli vplyvom nejakej vlnky na jednu alebo druhú stranu, prúd ju strhne a otočí. Rovnako si môžete predstaviť, čo by sa dialo, keby takáto loď bola uchytená v bode výrazne vpredu, alebo výrazne vzadu.

A-3.3 Rozliata ortuť (opravoval Matúš)

V nádobe tvaru valca s prierezom S a výškou H je hélium, uzavreté ľahkým piestom. Na pieste je naliata ortuť až po okraj nádoby, teda do výšky h tak, ako na obrázku. Nad povrchom ortuti je atmosferický tlak p_a. Systém je v rovnováhe, teplota okolia je T_0. Uvažujte izotermický dej v plyne a určte minimálnu hodnotu h, pri ktorej je ešte systém v stabilnej rovnovážnej polohe. Ak by sme uvažovali adiabatický dej, bola by spomínaná minimálna hodnota h väčšia, alebo menšia?

Úloha nebola jednoduchá. Jej najväčšou záludnosťou bolo použitie pojmu stabilná rovnováha. Čo značí to magické slovíčko stabilná? Rovnováhu môže dosiahnuť aj ceruzka postavená na hrot. Je to ťažké, ale ak sa budete dosť dlho snažiť, podarí sa vám to. Prečo je to také ťažké túto rovnováhu nastoliť? Lebo je ide rovnovážnu polohu vratkú – aj najmenšie vychýlenie ceruzky do strany (napríklad kvôli tornádu na druhej strane Zeme) spôsobuje zväčšenie tejto výchylky a nakoniec pád na podložku. Nebude na škodu zopakovať si notoricky známe mechanické zobrazenia rovnovážnych polôh, na obrázku za sebou postupne nasledujú indiferentná, vratká a stabilná rovnovážna poloha.



Späť k nášmu zadaniu. Už teda vieme, že cieľom je zistiť, či je náš piest uzatvárajúci hélium „guľôčkou v jamôčke“, alebo nie. Ako to zistiť? Pri skúmaní rovnovážnosti polohy je dôležité zaoberať sa malou výchylkou. A tým, či bude smerovať k jej zväčšovaniu, alebo utlmeniu.

Na začiatku je piest v rovnováhe. Teda sily naňho pôsobiace – tlak plynu a tiaž ortuti spojená s atmosferickým tlakom p_A – sa vyrovnávajú. Môžeme teda pre počiatočný tlak plynu p_0 zapísať ($\rho_0 SH$ je hmotnosť ortuti tvaru valca na pieste):

$$p_0 S = mg + p_A S = \rho_0 Shg + p_A S,$$

$$p_0 = p_A + h\rho_0 g.$$

Piest je teda v rovnováhe, sily pôsobiace nahor a nadol sa navzájom kompenzujú. Čo sa však stane, keď sa piest vychýli? Označme veľkosť tejto výchylky x a majme na pamäti, že je to nejaké malé číslo. Vychýlenie piesta nadol znamená zvýšenie tlaku hélia a zväčšenie sily pôsobiacej na piest smerom nahor. Sila pôsobiaca nadol sa nezmení (množstvo ortuti na pieste ani atmosferický tlak sa nemenia) preto podľahne v súboji a piest sa posunie späť (smerom hore).

Pri vychýlení piesta smerom hore to také jednoduché nie je. Smerom nadol pôsobí teraz sila veľkosti $F_1 = m\acute{}g + p_A S$, m´ je zmenšená hmotnosť ortuti, pretože zdvihnutím piesta jej časť musela vytiecť. Ak dosadíme ako pri hľadaní rovnováhy, dostaneme

$$F_1 = S\,(h-x)\,\rho_0 g + p_A S.$$

Vidíme, že veľkosť tejto sily sa zmenšila. Čo tlaková sila hélia? Z rovnice pV = konšt. platnej pre izotermický dej (je jednoduchým dôsledkom stavovej rovnice ideálneho plynu) dostaneme výsledný tlak plynu $p\acute{}$

$$p_0 V = p\acute{}(V+Sx),$$

$$p\acute{} = \frac{p_0 V}{V+Sx} = p_0 / (1 + Sx/V),$$

$$p\acute{} = p_0\,(1 - Sx/V).$$

Objem V je pôvodný objem hélia, zrejme $V = S(H-h)$. Použili sme známe priblíženie, podľa ktorého pre malé čísla približne platí $1/(1+y) = 1-y$ (môžete si to vyskúšať na kalkulačke). No a naša malá výchylka x spôsobí, že člen Sx/V je naozaj malý. Výsledná sila F_2 tlačiaca piest nahor je teda $F_2 = Sp_0(1 - x/(H-h))$.

Prichádza kľúčový okamih. Rovnovážna poloha je stabilná, ak sa takto vychýlený piest vracia do pôvodnej polohy, teda keď sila pôsobiaca nadol je väčšia než tá pôsobiaca nahor. V slovách matematiky dostávame

$$F_1 > F_2,$$
$$p_A S + S(h-x)\rho_0 g > (p_A + h\rho_0 g)\, S\,(1 - x/(H-h)),$$
$$(H-h)(p_A + (h-x)\rho_0 g) > (p_A + h\rho_0 g)(H-h-x) = (p_A + h\rho_0 g)(H-h) - (p_A + h\rho_0 g)x,$$
$$(H-h)(p_A + h\rho_0 g) - (H-h)x\rho_0 g > (p_A + h\rho_0 g)(H-h) - (p_A + h\rho_0 g)x,$$
$$h > \frac{H}{2} - \frac{p_A}{2\rho_0 g}.$$

Vidieť, že väčšina členov vypadla (dôsledok predchádzajúcej rovnováhy), veľkosť výchylky x nakoniec taktiež nezohráva úlohu (a to je dobre!). Ak je výška ortuti menšia než $h_{\min}$, je zle a ortuť sa (ak zanedbávame trenie medzi piestom a nádobou, to by spoľahlivo umŕtvilo akúkoľvek malú výchylku) zrejme sama vyleje. Premyslite si, ako by to asi vyzeralo v praxi. Zaujímavé správanie, že?

Posledná otázka sa týkala úvahy o adiabatickom deji v héliu. Teda ak by steny nádoby neviedli teplo dokonale, ale naopak vôbec. Vtedy použitím Poissonovej rovnice pre adiabatický dej pV^{κ} = konšt. dostaneme pre silu F_2 vzťah $F_2 = Sp_0(1 - \kappa x/(H-h))$. A keďže $\kappa = 1{,}67$ (pre hélium), vidíme, že F_2 klesá rýchlejšie než v prípade izotermického deja a teda sile F_1 tiaže ortuti je ľahšie piest vrátiť do rovnovážnej polohy. Dokáže to teda aj prípadoch, kedy to predtým nezvládala, maximálna výška ortuti sa teda zmenší.

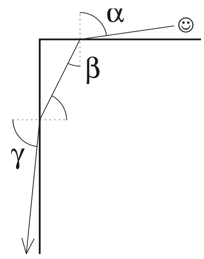
Vaše riešenia (až na výnimky) vôbec nepracovali s pojmom stabilnej rovnováhy. Pritom to bolo pre príklad kľúčové. Uznávam, v príkladoch sa príliš často stabilita nezjavuje. Aspoň intuitívny pocit čo vlastne znamená by ste však mať mohli. Snáď k tomu pomohol práve tento vzorák. Pridám aj zmienku o vašom postupe, ktorý mi dosť dlho spôsoboval bolenie hlavy. Idea mnohých bola vziať počiatočné podmienky S, h, p, p_A a hľadať stabilnú hodnotu h_S pri tlaku $p_S = p_A + hS\rho_0 g$. Dosadením do rovnice pV = konšt. dostaneme (pričom $V_S = (H-h_S)\,S$)

$$p_S V_S = pV,$$
$$(H-h_S)(p_A + h_S\rho_0 g) = (H-h)(p_A + h\rho_0 g).$$

Túto ste (takmer všetci!) riešili ako kvadratickú pre h_S a dostali výsledok, dva korene. Jeden bol zlý (záporný), ten ste vylúčili. Stačí sa však pozrieť na rovnicu a vidíme, že keďže ľavá a pravá strana sú vlastne totožné až na zámenu h za h_S, zrejme musí byť $h_S = h$ riešením! Toto je zrejmé aj z toho, že keď na začiatku tam tá rovnováha pri výške h bola, musí to byť jedno z riešení rovníc, ktoré iba hľadajú rovnováhu, nič viac. Kto nie je lenivý, môže sa pohrať s diskriminantom spomínanej kvadratickej rovnice (mne tá zábavka zabrala zhruba hodinu…) a zistiť, že skutočne jedným riešením je h a druhým niečo zložitejšie, každopádne záporné. Toto riešenie teda nevedie k ničomu novému, len k presvedčeniu sa o tom, že ak predpokladáme na začiatku piest v rovnováhe, tak skutočne je v rovnováhe... No, nie príliš cenný výsledok :-) Poučné však je, že niekedy cennejší ako výrazy na dva riadky je rozumný pohľad na vec a zamyslenie sa nad tým, čo vlastne má výjsť (je očakávané) a čo skutočne vyšlo.

A-3.4 Opatrnosť na rohu (opravoval Nagi)

Predstavte si, že idete popri stene modernej budovy - obrovskej sklenenej kocky. Aký musí byť index lomu skla n, aby ste mohli vidieť, či náhodou niekto nestojí za najbližším rohom?



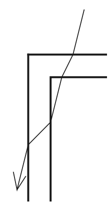
Pri lome lúča na rohu plnej kocky nastanú dva lomy. Prvý smerom dovnútra skla a druhý (dúfame) von z budovy, za roh a ku nám, ako na obrázku. Aby sme teda za ten roh dovideli, nesmie pri druhom lome nastať úplný odraz. Otázka znie, pod akým uhlom α dopadá lúč z objektu za stenou na stenu, aby pri danom n úplný odraz na druhom rozhraní ešte tesne nenastal? Bude to vtedy, ak $\gamma = 90^\circ$ (my takto pozeráme paralelne so stenou). Pre uhly β a γ platí zo zákona lomu

$$\sin\gamma = n\sin(\beta - 90^\circ),$$
$$1 = n\sin(\beta - 90^\circ) = n\cos\beta,$$
$$\sin\beta = \sqrt{1-\frac{1}{n^2}},$$
$$\sin\alpha = n\sin\beta = \sqrt{n^2-1}\,.$$

Ak má reálne existovať taký uhol α, pod ktorým by lúč spoza rohu došiel presne ku nám, musí byť $\sqrt{n^2-1} \leq 1$, a teda pre index lomu musí platiť známe

$$n \leq \sqrt{2},$$

čo pre obyčajné sklo splnené nie je (má index lomu podľa tabuliek asi 1,5).



Keďže sme s riešením príliš rýchlo hotoví, môžeme sa ešte zamyslieť nad niečím zaujímavejším. Čo ak by kocka nebola plná (ako v zadaní), ale mala iba nejakú hrúbku stien. Z obrázka vidíme, že za roh vidieť vždy! Smer, ktorým sa pozeráme je dokonca ten istý, pod akým dopadal na sklo lúč z ulice za rohom. A potom si uvedomíme, že je to o tom istom, ako keby sme pozerali cez okno domu s oknom aj do druhej ulice.

Skúste sa teraz ešte zamyslieť nad tým, ako by taký obraz v praxi vlastne vyzeral. Kto chce, môže si to vyskúšať. Kazí nám to ale moderná technológia a vysoká odrazivosť sklenených stien a okien (ľudia nechcú, aby im pozerali do kancelárií a domov). Takže večer pozor na rohoch, nie sú zo skla!

Príjemné prázdniny, nenechajte si všetky ťažko získané vedomosti a skúsenosti vyfúkať, vytopiť a vyopaľovať z hláv. V septembri (termín prvej série bude 26.9.) si Vás opäť nájde

vaše **FKS**.