Fyzikálny korešpondenčný seminár
25. ročník, 2009/2010
FKS, KTFDF FMFI UK, Mlynská dolina, 84248 Bratislava
e-mail: otazky@fks.sk web: http://fks.sk

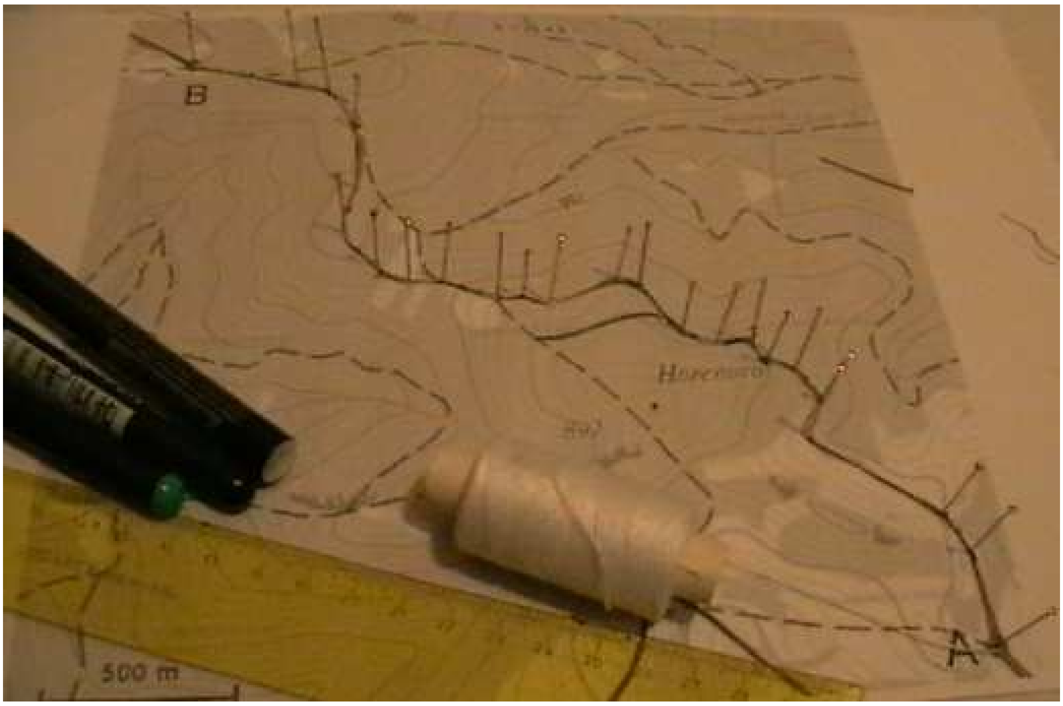
Vzorové riešenia 1. kola letnej časti 2009/2010

1.1 Mapa (opravoval Marcel)

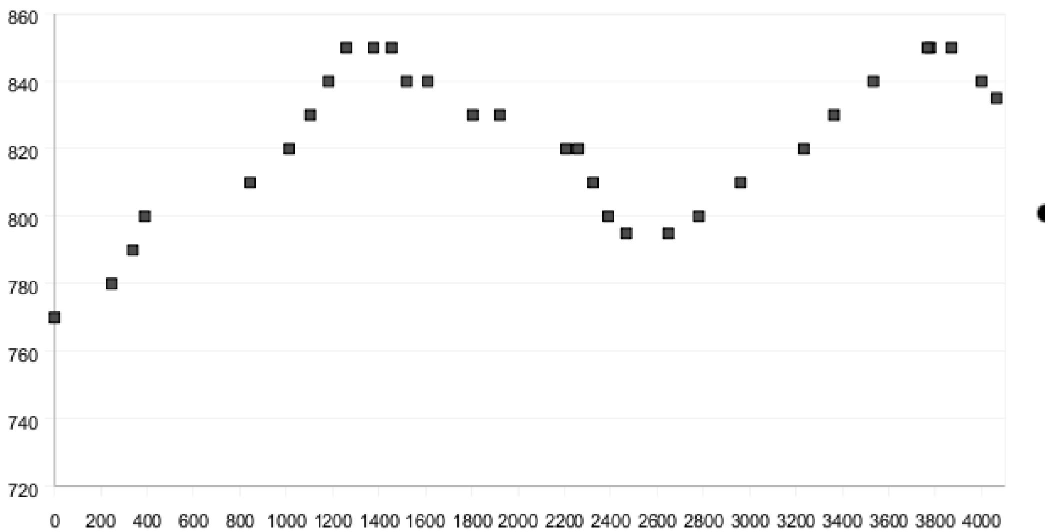
Poriadne si prezrite priložený kus mapy a nakreslite výškový profil značkovanej trasy A-B. To znamená, zostrojte graf, ktorý bude mať na x-vej osi vzdialenosť prejdenú po značke a na y-vej osi nadmorskú výšku. Pre lepšie pochopenie zadania si pozrite výškový profil východnej časti Nízkych Tatier na druhom obrázku.

Vzorové riešenie bolo jednoduché i keď trochu prácne. Možno ste už počuli o tom ako sa najpresnejšie merajú vzdialenosti na mape. Nie? Tak takto: zoberme si nitku a položme ju na mapu na trasu cesty (napríklad sa dá tak, že mapu položíme na polystyrén a napicháme špendlíky tam, kde sa cesty ohýbajú – čím viac špendlíkov, tým presnejšie a medzi ne dáme nitku tak, aby ju držali na trati) a vystrieme ju. Jej odmeraním dostaneme dĺžku (obr. 5). Už len zistiť výšku. Keď máme ešte nitku na mape tak dvoma fixami označíme vrstevnice ktoré prechádzajú cez nitku (cestu) – jednou farbou tie, cez ktoré sme šli dolu a druhou tie, čo sme išli hore. Odmeriame, akú vzdialenosť od začiatku nitky sú tieto značky a dostaneme tabuľku, z ktorej spraviť graf je mechanická robota. Všetko ešte musíme prenásobiť mierkou mapy, s ktorou robíme. Uvedomte si, že z mapy sa dajú vyčítať len výškové body (obr. 2) – čiže ako trať stúpala a klesala medzi nimi nevieme – vieme iba, že sa pohybovala v rozmedzí rozdielu medzi dvoma vrstevnicami. Môžeme však uvažovať, že to bolo približne rovnomerné. Z toho môžeme spraviť trať cesty napríklad ako na obr. 3. Všetky údaje na grafoch sú v metroch.

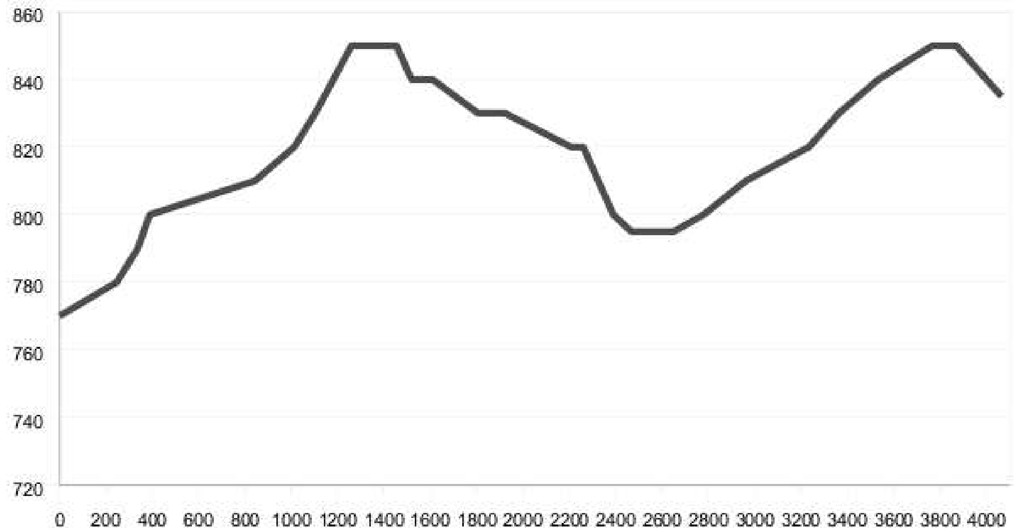
Seminár podporujú:



Obr. 1: Postup



Obr. 2: Výškové body



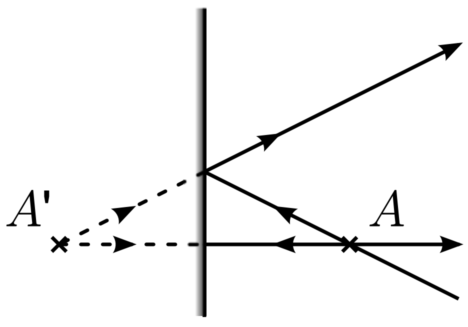
Obr. 3: Výška

1.2 Panoptikum domáce (opravoval Samo)

Vezmite dve rovinné zrkadlá a dajte ich kolmo na seba do tvaru písmena L. Čo uvidíte, keď sa pozriete do miesta kde sa obe nožičky spájajú? Koľko obrazov vidíte, kde sú asi umiestnené a ako sú popreklápané? Vysvetlite, prečo je to tak.

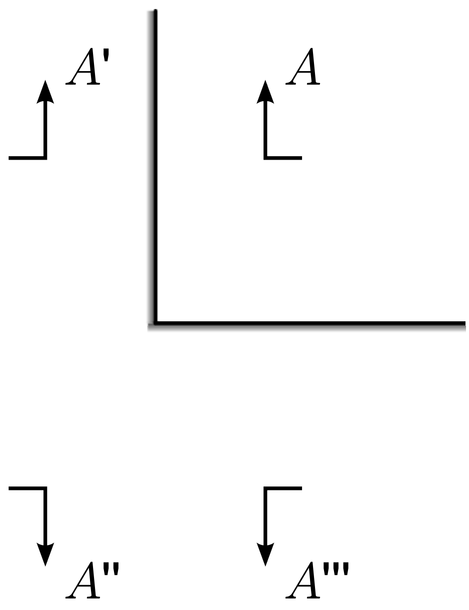
Skôr, než začneme riešiť úlohu zo zadania, preskúmame ako funguje zobrazovanie jedným rovinným zrkadlom.

Uvažujme zrkadlo a pred ním stojaci bod A, ako na obr. 4. Lúče svetla vychádzajúce z bodu sa odrážajú od zrkadla a dopadajú do nášho oka. Všimnime si, že lúče *vyzerajú úplne rovnako*, ako keby vychádzali z bodu A'. Toto je veľmi dôležité pozorovanie, znamená to totiž, že naše *oko nie je schopné rozoznať*, či vidí odraz v zrkadle alebo skutočne existujúci bod A' za zrkadlom. Hovoríme, že bod A sa zrkadlom zobrazuje do bodu A'. Pre rovinné zrkadlo platí, že A' je osovo súmerný podľa zrkadla s A, dôkaz prenecháme nadšenému čitateľovi.



Obr. 4: Jedno zrkadlo

Vyzbrojení potrebnými znalosťami môžeme prejsť k riešeniu pôvodného problému zo zadania. Stojíme v bode A (pre jednoduchosť znázornený ako šípka) a pozeráme sa do miesta, kde sa zrkadlá spájajú. Po zobrazení prvým zrkadlom bude náš obraz v bode A', osovo súmerným s bodom A. Následným zobrazením druhým zrkadlom dostaneme bod A''. Všimnime si, že A'' vznikol zložením dvoch osových súmerností podľa osí, ktoré zvierajú uhol $90\,°$. Matematika nám hovorí, že zloženie dvoch osových súmerností je to isté, ako otočenie o dvojnásobok uhla, ktorý osi zvierajú. To znamená, že uvidíme jav nevídaný, uvidíme sa bez toho, aby sme mali prevrátenú ľavú a pravú stranu v zrkadle. Ďalším zobrazením ešte vieme dostať bod A''', ktorý je osovo súmerný s bodom A podľa druhého zrkadla a to je už aj všetko, čo zobrazovaním vieme dostať. Ak totiž skúsime ľubovoľný z bodov zobraziť niektorým zrkadlom, zobrazí sa na už existujúci bod. Dostávame teda štyri obrazy, dva prevrátené, dva nie.

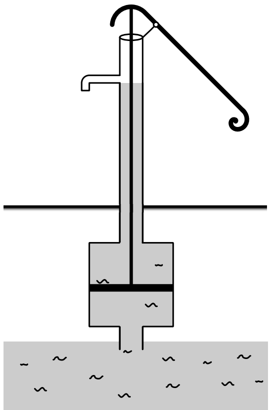


Obr. 5: Odrazy v panoptiku

1.3 Pumpa obyčajná (opravovala Halucinka)

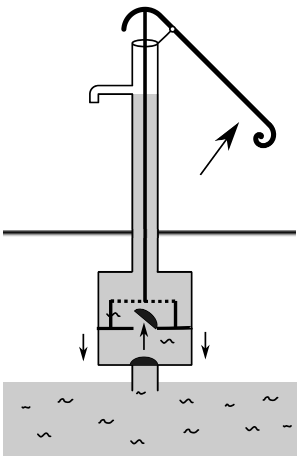
Na obrázku vidíte náčrtok Pumpy obyčajnej (*Pumpus vulgaris*). Obrázok však nie je kompletný – dokreslite doň, čo treba tak, aby pumpa dobre fungovala a stručne vysvetlite, prečo to funguje.

Ako taká pumpa funguje? Prvé čo by človek dokreslil namiesto otáznika je jednoduchý piest.

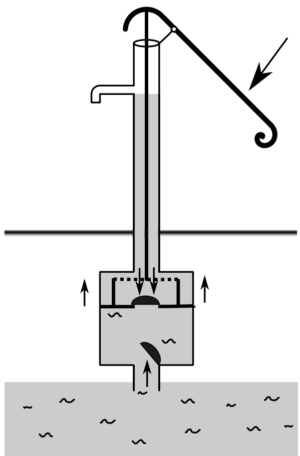


Obr. 6: Pumpa

Keď zatlačíme ramenom pumpy, piest sa posunie vyššie a keď pritiahneme rameno, tak sa piest posunie nižšie. Problémom však je, že pritom sa celá pumpa a aj voda vrátila do pôvodného stavu. Teda takýmto piestom sme si nepomohli. Teraz si predstavme špeci čarovný piest, ktorý by pri jeho ceste dole prepúšťal cez seba vodu, ale keby putoval hore, tak by vodu neprepúšťal. Porozmýšľajme, že to by riešilo všetky naše problémy. Keby sme zatlačili na rameno pumpy, tak by piest išiel hore, teda by vodu pumpoval vyššie a vyššie a keby sme pritiahli rameno späť, tak by ten piest klesol, ale hladina vody by ostala rovnaká (pretože by prepúšťal cez seba všetku vodu). A toto by sa opakovalo, až kým by sa voda v pumpe nedostala tak vysoko, aby začala vytekať. Lenže kde získať taký čarovný piest? Nebude síce vyzerať tak praobyčajne, ale vieme si niečo také vyrobiť. Čáry máry, žabie očká čvik, ukáž sa, čarovný piestik:



Obr. 7: Stav pri zatlačenom ramene pumpy



Obr. 8: Stav pri pritiahnutom ramene pumpy

Namiesto otáznika sme teraz vsunuli špeci dve klapky. Klapka funguje tak, že jedným smerom keď na ňu tlačí voda, tak sa otvorí, ale keď na ňu tlačí voda z druhej strany, tak sa ani za nič neotvorí. Jedna klapka je v pieste a druhá dole. Čiarkovaná čiara na obrázku znamená, že tade prejde voda, len piest musí byť nejako uchytený. Čo sa teraz deje pri stlačení ramena pumpy? Náš piest s klapkou sa posúva hore, teda vrch piestu naráža na vodu a teda táto voda tlačí na klapku, aby sa neotvorila. Preto piest všetku vodu nad ním vysúva vyššie a vyššie. A čo sa deje pod piestom? Stúpajúci piest vytvára podtlak a naša dolná klapka sa tým pádom otvorí a vpúšťa do rúry pumpy ďalšiu vodu. Akonáhle sa táto voda bude chcieť pohnúť naspäť dole pod zem, tak bude tlačiť na našu dolnú klapku, ktorá ju nepustí späť. Teda voda, ktorá už prešla dolnou klapkou hore sa už naspäť nevráti.

Ako to vyzerá, keď potiahneme rameno pumpy? Piest s klapkou začne klesať, tlačí vodu pred sebou, ktorá tlačí na spodnú klapku. Spodná klapka sa zaklapne a nič nepustí nižšie. Teda teraz voda spätne tlačí na náš piest s klapkou zdola. Teda klapka sa pod týmto tlakom otvorí a nad piestom sa ocitne viac vody. Následne zase potlačíme na rameno pumpy a piest sa začne dvíhať, čiže voda, ktorá sa dostala nad piest, začne tlačiť na stúpajúci piest a zaklapne vrchnú klapku. To znamená, že táto voda už ostane nad vrchnou klapkou, až kým sa nevypumpuje.

Celý systém teda funguje tak, že keď zatlačíme na rameno pumpy, tak sa nám hladina vody zdvihne (vďaka priechodnej spodnej klapke a nepriechodnej vrchnej klapke) a keď pritiahneme, tak piest vrátime do dolnej polohy, ale hladina vody nám ostane, kde bola (vďaka nepriechodnej spodnej klapke a priechodnej vrchnej klapke). Toto pumpovanie opakujeme, až kým voda nestúpne dostatočne vysoko na to, aby mohla vytekať otvorom, ktorým chceme.

Vaše riešenia boli všelijaké. Za riešenia podobné tomu na prvom obrázku vo vzoráku (jediný piest) som dávala málo bodíkov (okolo 3). Potom boli také riešenia, ktoré počítali s nestlačiteľnosťou vzduchu alebo s tým, že voda sa nejakým smerom pohne len preto, že to chcete – sklamem vás, ani jedno nefunguje. Ale v princípe som sa potešila, koľko rôznorodých riešení som dostala napriek tomu, že sa plus-mínus správne riešenie dalo vygoogliť do minúty (ale googlenie je tiež poučné, lebo nie všetko, čo je na nete, je správne). A ste zlatí a veľa vody vám prajem.

1.4 Explózia (opravoval Kubo Jursa, vzorák Poli)

Vezmite také to šišaté plastové vajíčko, ktoré dostanete keď vyrabujete Kinder vajce. Keď ho naplníte malým množstvom sódy bikarbóny a octu a vajíčko rýchlo uzavriete, začne prebiehať búrlivá chemická reakcia, ktorá v konečnom dôsledku spôsobí malý „výbuch“ vajíčka. Pokúste sa čo najpresnejšie zistiť, aký veľký tlak dokáže popísaná chemická reakcia vyrobiť (nebyť toho, že vajíčko pomerne ľahko rozdrapí). Presné množstvo sódy bikarbóny aj octu, pre ktoré meranie zrealizujete, si môžete zvoliť sami.

Ako sa tak človek pozrie po všakovakých komunikačných kanáloch experimenty veľmi neletia. Tento je ale veľmi zaujímavý, doslova explozívny. Pozrime sa, čo po nás zadanie mohlo chcieť.

Máme nejako určiť aký tlak je vnútri nášho vajíčka po reakcii.

1. Možeme dať do vajíčka tlakovú sondu a zmerať tlak. Tento sposob naráža na jednochuchý problém. Priemerný riešiteľ (ba dokonca ani vedúci) takúto sondu nevlastní.

2. Môžeme zmerať objem plynu uvoľnený pri reakcii (napríklad balónom). Potom nasadíme nejaké rovnice pre deje s (ideálnym) plynom a máme výsledok.

3. Možeme sa nejako snažiť zistiť z pohybu vajíčka, aké naň pôsobili sily a z toho určiť aký v ňom bol tlak. Tento spôsob naráža na viacero problémov, napríklad ťažko je presvedčiť vajíčko, aby sa neroztrhlo skôr, ako dobehne celá chemická reakcia (ako po nás chce zadanie). Navyše, spraviť samotnú teoretickú predpoveď, teda odpovedať na otázku: „ako vysoko vyletí vajco, ak vnútri je tlak 10 MPa“, je veľmi ťažké.

4. Na záver je tu drsná chemická rátačka. Tento spôsob v sebe skrýva jeden zádrheľ, ktorý úspešne neprekonal nikto z vás, o tom však bude reč neskôr.

Postup, ktorý sa mne javí najviac ako bezproblémový, je ten druhý. Povedzme si ešte pár slov o tom, ako to odmerať a prečo je tento spôsob dobrý. Zoberieme si napríklad balón alebo inú pružnú nádobu. Do nej vhodíme náš ocot a sódu. Reakcia reaguje, balón sa plní. Ak nám vadí to, že balón je pružný (teda plyn bude pod vyšším tlakom), použijeme voľnejší balón, alebo spravíme fintu s dvoma nádobami.[1]

Pri meraní si všimneme ešte jednu dôležitú vec: teplota plynu sa prakticky nezmenila. Toto bude dôležité o chvíľu a toto je aj dôvod, prečo nikto, kto úlohu čisto „vyrátal“, nedostal plný počet bodov. Skutočne, čo ak sa reakciou vzniknutý plyn strašne schladí? Jeho tlak potom bude výrazne menší, ako keby sa ohrial! Na základe výpočtu je veľmi ťažké usúdiť čosi o teplote výsledného plynu.

Poznáme tiež objem vajíčka (hneď po tom ako ho odmeriame). Teraz nám už stačí použiť stavovú rovnicu pre ideálny plyn. Náš dej môžeme považovať za izotermický, viď diskusia vyššie.

$$p_0 V_0 = p_1 V_1 p_1 \qquad = p_0 \frac{V_0}{V_1} \tag{1}$$

Všimnime si, že sme v tomto riešení nepoužili žiadnu chemickú vedomosť a merali sme dva objemy. Čo už môže byť jednoduchšie?

Tak, ako sme popísali vo vzoráku, sme experiment aj realizovali (akváriá nemáme, takže iba s balónom). Zobrali sme 1 lyzičku octu a 1 čajovú lyžičku sódy bikarbóny. Náš balón sa nafúkol na objem 0,6 l. Objem vajíčka z vašich meraní je 45 ml. Po dosadení do stavovej rovnice dostávame tlak

$$p_1 \approx p_a \frac{600}{45} \approx 13{,}3\,\mathrm{bar} \approx 1{,}33\,\mathrm{MPa}$$

Poznámka: bar – 1 atmosféra je staršia jednotka tlaku, je pomerne nepraktická, pretože jej hodnota v pascaloch je 101 325 Pa, ale je nazorná na predstavu, aký veľký tlak niekde je. Experiment máme skončený a možeme riešiť ostatné úlohy FKS.

Povedzme si pár slovami, ako zistíme, že máme experiment zle. Vajíčko sa roztrhne. Roztrhne sa preto, že je v ňom tlak. Ale aj okolo vajíčka je tlak (zrejme atmosferický). Ak je váš výsledok 15 Pa; 52,74 Pa; 191,825 MPa a atmosferický tlak je 100 kPa, tak asi niečo nie je v poriadku. Tlak vo vajíčku musí byť určite vyšší ako atmosferický, ale zase nemal by byť ani 2 000-krát vyšší. Preto je dobré si pred experimentom vždy odhadnúť, aký približne bude výsledok a ak nám ani rádovo nesedí s meraním, hľadajme chybu.

1.5 Perpetum nemobilné (opravoval JAno)

Keď bol Boris ešte malý, nechýbal mu dobrý úmysel. Vymýšľal preto rôzne konštrukcie, ktorými chcel pomôcť ľuďom k svetlým zajtrajškom. Na obrázku vidíte jeden z jeho pokusov o Perpetum mobile. Jeho myšlienka je prostá – keď sa sklená rúrka aj s celou buľvovitou rozšíreninou naplní vodou (napríklad metódou orálneho nacucnutia), tiaž vody v buľve mnohonásobne prevýši tiaž vody v rúrke. Preto voda začne z buľvy vytekať, otáčať kolesom a znova sa nacucávať do rúrky. Kde je v jeho dômyselnej konštrukcii chyba?

Ako už bolo spomenuté v zadaní, kľúčovú rolu bude hrať v tomto predstavení voda a jej tiaž. Ako pôsobí tiaž na vodu? Tak, že voda „sa tlačí“ (padá) nadol, kým jej v tom nič nebráni. Ak

[1] zoberieme veľké a menšie akvárium, väčšie naplníme vodou, menšie doň umiestnime hore nohami. Do menšieho teraz môžme vypustiť náš plyn.

jej v tom niečo (za)bráni, voda sa bude tlačiť (nadol) na prekážku a sama na seba. Toto tlačenie (v statickom prípade) fyzik popisuje ako hydrostatický tlak. Tento je spôsobený tiažou vodného stĺpca nad daným miestom a jeho veľkosť je $\rho g H$, pričom tieto tri symboly označujú hustotu kvapaliny (vody), gravitačné zrýchlenie a výšku vodného stĺpca. Pokiaľ by táto výška nebola jednoznačne určená[2], znamená to spravidla, že sústava nie je v rovnováhe (voda má tendenciu kamsi tiecť) a použitie horeuvedeného vzorca sa stáva nemiestne.

Keď tvrdenie o vodnom stĺpci dovedieme poctivo do konca, zistíme mnohé prekvapivé závery. Napríklad, že je jedno či vodou naplníme písmeno `U`, `V` alebo `A` (bez strednej čiarky a s pridaným „dnom"), tlak pri dne nijako nezávisí od tvaru nádoby a ani od hmotnosti vody v nej. Alebo, že aj 1 dcl vody naliaty v dlhočiznej a úzkej zvislo orientovanej rúrke môže spôsobiť jej roztrhnutie. A najväčší joke je, že je úplne jedno, či zvislá rúrka naplnená vodou po určitú výšku bude, alebo nebude v sebe obsahovať buľvovité rozšírenia – tlak pri jej spodku bude rovnaký.

Z pohľadu tlakov prestáva byť situácia záhadnou. Tlak spôsobený vyšším stĺpcom (ľavá časť rúrky bez buľvy) je vyšší ako tlak pravej časti rúrky s buľvou – ak by sme teda vodu nechali „samu na seba" začala by sa kvôli týmto tlakom liať v presne opačnom smere, než by Boris čakal. Ako však ukazuje okolitý svet, je pravdepodobné, že s presvedčivým reklamným šotom je možné aj z takto nefunkčného nápadu spraviť úspešný biznis.

Viacero z vás videlo problém v tom, že do rúrok budú vnikať bublinky vzduchu, následne sa vodný stĺpec roztrhne... Toto však nie je kľúčový problém navrhovaného zariadenia – stačilo by napríklad otvory, ktorými voda vyteká, voliť dostatočne úzke, alebo sofistikovanejšie namontovať na ne ventily. Problém so zariadením je však principiálny, voda (a to ani v najpočiatočnejšej fáze) nebude tiecť tak, ako sa zadanie snažilo sugestívne tvrdiť.

1.6 Marsrobot (opravoval Jakub)

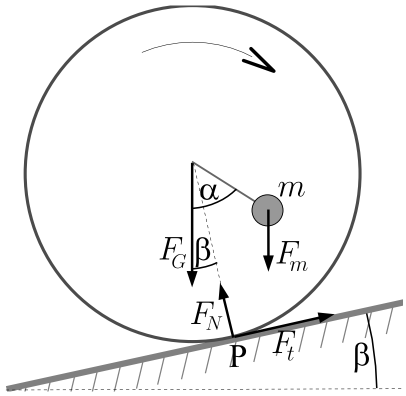
Najnovší výrobok preslávenej značky Matel je nový robot pre prieskum Marsu. Má tvar pogumovanej gule, ktorá neprešmykuje, kde sa len dá. Guľu samotnú by asi sotva predali ako prieskumníka pre Mars, tak doň ešte vmontovali závažie na tyči, ktoré motorček umiestnený na horizontálnej osi robota môže vychyľovať zo zvyčajnej polohy (teda, zo smeru nadol). Robot má polomer R, závažie je od stredu vzdialené $r = 0{,}8R$, celková hmotnosť robota je M, závažie váži m. Robot zrýchľuje tak, že motorčekom vychýli závažie do smeru, kam sa hodlá rozbehnúť a počas rozbehu ho udržuje vychýlené stále rovnako veľký uhol od zvislice. Podobne vie robot ísť aj do kopca. Určte

a) aké najväčšie zrýchlenie vie robot na rovine vyvinúť,

b) po akom najprudšom svahu sa vie pohybovať!

Príklad vyriešime pre obe časti (a aj b) jedným šmahom. Uvažujme teda robota idúceho do kopca s uhlom β a so závažím, ktoré motorček sústavne vychyľuje tak, aby so zvislou osou zvieralo uhol α.

[2] Napríklad na dne vodou naplnenej U-trubice s nerovnako dlhými ramenami, ktoré sú naplnené vodou do rôznych výšok môžme namerať rôzne výšky vodného stĺpca, podľa toho ktorý koniec sa uľúbi nášmu oku.



Obr. 9: Obrázok k silám

V prvom rade zanalyzujeme pôsobiace sily. Na telo robota (= robot bez závažia) pôsobí gravitačná sila $F_{\mathrm{G}} = (M - m)g$, na závažie pôsobí gravitačná sila $F_m = mg$, na robota pôsobí ďalej podložka normálovou silou F_{N} a trecou F_{t}. Tým sme vymenovali všetky sily, ktoré na robota pôsobia *zvonka*. Isteže, cez motorček pôsobí telo robota na závažie a aj naopak.

Teraz by sme mohli použiť Newtonove zákony na to, aby sme vyjadrili pre nás neznáme sily F_{N} a F_{t}, to však môžeme obísť vhodnou voľbou vzťažného bodu pre počítanie momentov. Zvoľme si ako vzťažný bod v ľubovolnom okamihu (stojaci) bod dotyku gule s podložkou. Potom vo vyjadrení celkového momentu pôsobiacich síl nebudú figurovať sily F_{N} a F_{t}, lebo ich rameno je nulové. Celkový moment (zvonka) pôsobiacich síl po troške duševnej námahy dostaneme

$$M_{\mathrm{celk}} = -R(M - m)g \sin\beta + mg(r \sin\alpha - R \sin\beta)\,. \tag{2}$$

Newtonove zákony nám poskytujú pre každú jednu sústavu telies rovnicu[3]

$$\Delta L = M_{\mathrm{celk}}\, \Delta t\,, \tag{3}$$

kde ΔL je zmena momentu hybnosti sústavy (vzhľadom na vybraný bod) za čas Δt. Rovnica hore platí, ak je vzťažný bod, vzhľadom na ktorý počítame M_{celk}, rovnaký ako pre moment hybnosti L. Moment hybnosti sústavy[4] je $L = I_P\,\omega + m\big(R - r\cos(\alpha - \beta)\big)v$, kde ω je uhlová rýchlosť otáčania robota a I_P je moment zotrvačnosti tela robota bez závažia vzhľadom na bod dotyku P,[5] ktorý pomocou Steinerovej vety môžeme vyjadriť aj ako $I_P = I_S + (M - m)R^2$;[6] ten druhý člen je moment zotrvačnosti závažia. Potom zmena momentu hybnosti ΔL je $I_P\,\Delta\omega + m\big(R - r\cos(\alpha - \beta)\big)\Delta v$. Ak rovnicu (3) predelíme Δt, tak dostaneme

$$I_P\,\varepsilon + m(R - r\cos(\alpha - \beta))a = M_{\mathrm{celk}}\,, \tag{4}$$

kde ε je uhlové zrýchlenie robota.

[3] Korektne by táto rovnica mala byť zapísaná vektorovo.

[4] Rýchlokurz momentu hybnosti sústavy hmotných bodov indexovaných cez i: $L = \sum_i m_i\, r_i\, v_{\mathrm{obv,i}}$, kde m_i je hmotnosť i-teho hmotného bodu, r_i je jeho vzdialenosť od vzťažného bodu (dotykový bod P v našom prípade) a $v_{\mathrm{obv,i}}$ je obvodová rýchlosť i-teho bodu okolo vzťažného bodu.

[5] Pre body tela robota totiž platí $v_{\mathrm{obv,i}} = \omega r_i$ a teda $L = \omega\left[\sum_i m_i\, r_i^2\right]$, pričom moment zotrvačnosti I_P je práve výraz v hranatej zátvorke.

[6] Kde sme predpokladali, že telo robota je rotačne symetrické a má teda ťažisko v strede S.

V zadaní ďalej máme informáciu, že robot na podložke neprešmykuje. Preto obvodová rýchlosť v každom okamihu musí byť zhodná s rýchlosťou stredu. Preto aj zrýchlenie musí byť vždy zhodné so zrýchlením obvodovej rýchlosti. Môžeme teda zapísať rovnicu

$$R\varepsilon = a, \tag{5}$$

Z rovníc (2) a (4) s využitím (5) dostanem rovnicu

$$a = \frac{mr\sin\alpha - RM\sin\beta}{I_P + mR^2 - mrR\cos(\alpha-\beta)}\,Rg = \frac{mr\sin\alpha - RM\sin\beta}{I_S + MR^2 - mrR\cos(\alpha-\beta)}\,Rg, \tag{6}$$

odkiaľ máme výsledok časti a) položením $\beta = 0$, a maximalizovaním výrazu (6). Toto sa dá nájsť pomocou derivovania a nájdenia stacionárneho bodu, čo nebolo cieľom zadania.[7] Za zjednodušujúceho predpokladu, že platí $MR^2 + I_S \gg mrR$, môžeme nepríjemný člen s kosínusom v menovateli zanedbať a dostávame maximum pre $\alpha = 90\,°$, konkrétne $a \approx mrRg/(MR^2 + I_S)$. Časť b) vyriešime, ak budeme hľadať β také, že pri $\alpha = 90\,°$ je $a \geq 0$. Nájdeme $\beta \leq \arcsin(mr/MR)$.

Hodnotenie: Časť a) bola za 5 bodov, b) za 4 body. Časť b) bola vo všeobecnosti úspešnejšia. Snáď jediné patologické prípady boli, že si človek nesprávne „vycucal“ z prsta uhol odklonu $\alpha = \beta + 90\,°$, alebo naoko prefíkané tvrdenie, že na naklonenej rovine bude maximálne zrýchlenie robota rovné maximálnemu z časti a) zmenšené o zložku tiažového zrýchlenia smerom nadol, $g\sin\beta$. Že to tak nie je, vidno z explicitného riešenia (6). S časťou a) boli problémy – mnohí z vás ignorovali momenty všemožných síl, zaznamenal som množstvo patavedeckých prístupov, v podstate na úrovni rozmerovej analýzy. Skoro všetci si zvolili konkrétny moment zotrvačnosti $I_S = \frac{2}{5}(M-m)R^2$ pre telo gule (iní ani nerozlišovali M a $M-m$), čo sa síce nestretávalo so zrážkou bodov, ale nepovažujem to za rozumné. Mimochodom, prázdna homogénna sféra má $I_S = \frac{2}{3}MR^2$, čo by sme mohli považovať za horný odhad I_S, nakoľko telo robota bude mať okrem plášťa aj motorček a ten bude zrejme bližšie pri osi rotácie.

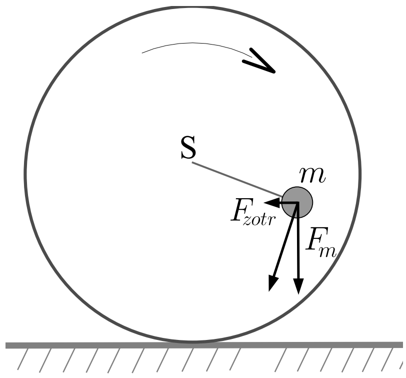
Poznámka 1: Časť b) sa dala veľmi jednoducho vyriešiť vyšetrením rovnovážneho stavu robota (úloha, či dokáže netočiaci sa robot stáť na naklonenej rovine danej uhlom β je ekvivalentná s úlohou b), lebo v oboch riešime nakoniec rovnicu pre $a = 0$). Stačilo položiť moment síl vzhľadom na bod P rovný nule a hneď vypadlo riešenie.

Poznámka 2: K momentu hybnosti L prispieva aj motorček a jeho otočné súčasti. Ak uvažujeme, že všetky prevody sú mechanicky pevne spojené, tak skutočne môžeme písať $L = I_S\,\omega$, avšak I_S sa vo všeobecnosti nemusí rovnať štandartnému výrazu $\sum_i m_i\, r_i^2$, lebo niektoré otáčavé súčasti motora môžu rotovať inou uhlovou rýchlosťou (nejakým jej násobkom k) a teda do sumy prispejú násobené tým k.

Poznámka 3: Prečo nedosahuje Marsrobota najväčšie zrýchlenie pre $\alpha = 90\,°$? Keď sa pozrieme na problém z iného uhla pohľadu – konkrétne z pohľadu tela robota, ktoré je roztáčané momentom, ktorým naň pôsobí závažie na tyči – tak očakávame, že najväčšie zrýchlenie dosiahne robot vtedy, keď bude tento moment maximálny. Maximálny bude vtedy, keď sila pôsobiaca na závažie bude

[7] Presné riešenie je $a = \frac{mrRg}{\sqrt{(MR^2+I_S)^2-(mrR)^2}}$ a nastáva pre $\alpha = \arccos\frac{mrR}{MR^2+I_S}$.

kolmá na rameno. Na závažie v tomto pohľade pôsobí však aj zotrvačná sila a preto je ideálny uhol α o málo menej ako $90\,^\circ$, viď obr.



Obr. 10: Obrázok k max. zrýchleniu, pozn. 3

1.7 Obruče (opravoval Filip)

Máme tri obruče, všetky vyrobené z rovnakého drôtu. Vrchné dve majú rovnaký polomer, spodná je o čosi väčšia. Tri špagáty dĺžky nesmiernej pripojíme k najvrchnejšej a najspodnejšej obruči tak, aby miesta uchytenia tvorili rovnostranný trojuholník. Obruč prostredná, nech sa voľne kĺže po takto zhotovenej konštrukcii. Zrátajte, aká vertikálna vzdialenosť bude medzi strednou a spodnou obručou, keď systém chytíme za obruč najvrchnejšiu (tak, aby bola vodorovná) a v gravitačnom poli zeme ho necháme ustáliť sa!

Predým, než sa pustíme do krvopotného rátania, zamyslime sa, čo vlastne chceme dostať. Stáva sa totiž, že sa niekde pomýlime, vyjde nám výsledok a potom sa snažíme presviedčať opravovateľa o nejakej volovine… Prečo sa to teda ustáli v nejakej polohe? Ako už je v prírode zvykom, telesá sa snažia zaujať miesta s najnižšou potenciálnou energiou.

Horná obruč je zavesená, tá sa pohnúť nemôže. No zvyšné dve si navzájom „konkurujú“ – stredná obruč sa snaží pohnúť dolu, tým však zmenší dĺžku lana medzi strednou a spodnou, a uhol odklonenia špagátu sa zväčší, čím dolnú obruč „povytiahne hore“ – naopak, keď sa poklesnúť snaží dolná obruč, vytláča dohora tú strednú – odporúčam si to nakresliť. Očakávame preto, že výsledok bude nejakým kompromisom – nebude to ani poloha, keď má minimálnu energiu dolná obruč, ani tá stredná.

K riešeniu takéhoto typu úloh existujú dva spôsoby. Jedným z nich je napísať si sily. Elegantnejší prístup je však cez energie. Načrtnime si však aspoň približne, ako sa to dá rátať cez sily. Nech špagát medzi dolnou a strednou obručou zviera so zvislicou uhol α. Označme napätie v špagátiku F. Vodorovné zložky síl od špagátikov priviazaných na spodnú obruč sa nám musia vyrušiť – intuitívne cítime, že nám obruč nepôjde do žiadnej strany. Vertikálne zložky sa sčítajú a musia vyrušiť tiaž spodnej obruče:

$$3F\cos(\alpha) = Mg$$

Touto silou sú napnuté celé špagátiky. Môžeme si teraz všimnúť, že v mieste strednej obruče sa špagátik ohýba. Pôsobiaca sila na strednú obruč bude preto vektorovým súčtom napäťových síl v špagátiku. Opäť nás zaujímajú len vertikálne zložky. Z obrázka vyplýva, že ten súčet je

$$3 \cdot 2F\sin(\tfrac{1}{2}\alpha)$$

Tento súčet sa musí vyrovnať tiaži strednej obruče. Treba si ešte napísať vzťahy pre uhly a výšky a zvyšok sú už len škaredé úpravy. Venujme sa radšej druhému prístupu.

Pointa postupu cez energie je minimalizovať potenciálnu energiu celej sústavy[8]. Tak poďme nato. Označme si energie obručí ako E_h, E_s a E_d (horná, stredná a dolná). Teraz je na nás, aby sme si zvolili hladinu nulovej potenciálnej energie. Pre nás za nás, nech je to napríklad v mieste zavesenia hornej obruče – jej potenciálna energie bude tak nulová a nebude strašiť vo výpočtoch. Vzdialenosť medzi hornou a strednou obručou označme h_hs a strednou a dolnou h_sd. Celková potenciálna energia sústavy bude tak (všimnime si znamienka!):

$$E_\mathrm{p} = 0 - mgh_\mathrm{hs} - Mg(h_\mathrm{hs} + h_\mathrm{sd}) = -g\big[h_\mathrm{hs}(m+M) + h_\mathrm{sd}M\big]$$

Máme tam dve neznáme výšky a radi by sme sa ich zbavili. V zadaní sa spomína, že špagát je dĺžky nesmiernej. Označme si ju d. Síce ju nepoznáme, ale môžeme dúfať, že sa jej počas výpočtov zbavíme. Keď si teraz nakreslíme obrázok spodných dvoch obručí tak vidno, že vertikálna vzdialenosť je h_sd a horizontálna $r_2 - r_1$. Z Pytagorovej vety si ľahko dopočítame dĺžku špagátiku s medzi obručami. Nad strednou obručou tak bude zvyšok:

$$h_\mathrm{hs} = d - s = d - \sqrt{h_\mathrm{sd}^2 + (r_2 - r_1)^2}$$

Po dosadení do vzorca pre potenciálnu energiu sústavy dostávame:

$$E_\mathrm{p} = -g\left[\left(d - \sqrt{h_\mathrm{sd}^2 + (r_2 - r_1)^2}\right)(m+M) + h_\mathrm{sd}M\right]$$

Vidíme, že pre danú dĺžku špagátikov je energia už len funkciou závislou od vertikálnej vzdialenosti spodných obručí h_sd. Hľadáme minimum tejto funkcie, čiže ju môžeme zderivovať podľa premennej h_sd a položiť rovnú nule.

$$\frac{\mathrm{d}E_\mathrm{p}}{\mathrm{d}h_\mathrm{sd}} = 0 = -g\left[\left(-\frac{2h_\mathrm{sd}}{2\sqrt{h_\mathrm{sd}^2 + (r_2 - r_1)^2}}\right)(m+M) + M\right]$$

Toto upravíme – predelíme g-čkom, presunieme na druhú stranu:

$$\frac{h_\mathrm{sd}}{\sqrt{h_\mathrm{sd}^2 + (r_2 - r_1)^2}}(m+M) = M$$

Teraz prenásobíme menovateľom a umocníme. Dostaneme:

$$h_\mathrm{sd}^2(m+M)^2 = M^2\big[h_\mathrm{sd}^2 + (r_2 - r_1)^2\big]$$

A už len vyjadríme h_sd:

$$h_\mathrm{sd}^2 = \frac{M^2(r_2 - r_1)^2}{(m+M)^2 - M^2}$$

$$h_\mathrm{sd} = \frac{M(r_2 - r_1)}{\sqrt{m^2 + 2mM}} = \frac{r_2 - r_1}{\sqrt{(m/M)^2 + 2m/M}}$$

[8] Nie jednotlivých častí.

Posledná vec je uvedomiť si, že keď sú obruče z rovnakého drôtu, tak ich hmotnosti budú v rovnakom pomere ako ich polomery, čiže:

$$h_{\mathrm{sd}} = \frac{r_2 - r_1}{\sqrt{(r_1/r_2)^2 + 2r_1/r_2}}$$

Výsledok už máme. No pri derivovaní netreba zabúdať, že nám vyšiel len extrém. Nevieme, či je to minimum alebo maximum. K plnému počtu bodov som teda očakával, že okrem výsledku uvediete aj nejakú diskusiu o tom, prečo je to minimum. Pokiaľ ste to nevedeli, stačilo energiu zderivovať aj druhý krát a ukázať, že druhá derivácia je kladná – známka toho, že sme našli minimum.