Fyzikálny korešpondenčný seminár
25. ročník, 2009/2010
FKS, KTFDF FMFI UK, Mlynská dolina, 84248 Bratislava
e-mail: otazky@fks.sk web: http://fks.sk

Vzorové riešenia 2. kola letnej časti 2009/2010

2.1 Luskáčik (opravovala Marika, vzorák Samko)

„Kríza – nekríza, dačo robiť treba“, povedal si podnikateľ Cyprián a vynašiel nový dizajn luskáčiku na orechy. A keďže Cypriána múza kopla skutočne dôsledne, vymyslel luskáčik ešte jeden. Obe jeho veľdiela si môžte pozreť na obr. a obr. . Ktorým z nich rozlúskneme orech menšou vynaloženou silou a prečo? Celkové dĺžky ramien luskáčikov sú v oboch prípadoch rovnaké, takisto rovnaké sú vzdialenosti od kĺbu spájajúceho ramená po miesto, kde sa orech dotýka ramien.

Zabudnime na formality a pusťme sa hneď do rátania. Prosím, cíťte sa ako doma. Oba luskáčiky sú len obyčajné páky. Ak označíme a dĺžku od rukoväte prvého luskáčika po kĺb a b dĺžku od kĺbu po orech, tak prvý luskáčik zväčší silu, ktorou pôsobíme, v pomere a/b. Pri druhom luskáčiku je dĺžka od orecha po kĺb b, no a od kĺbu po rúčku je to $a+b$. Takže silu zväčšuje v pomere $(a+b)/b$, čo je zrejme viac, ako prvý luskáčik. Orech teda rozlúskneme ľahšie druhým luskáčikom.

2.2 Roztápačka (opravoval Marek)

Je známe, že pokiaľ máme pohár po okraj naplnený vodou a v ňom pláva kus ľadu, voda ani po roztopení ľadu nepretečie cez okraj pohára.

a) Vysvetlite, prečo je to tak.

b) Pretiekla by nejaká kvapalina, keby ľad plával namiesto vody v oleji?

Hustoty použitých záležitostí sú: $\rho_{\mathrm{voda}} = 1\,000\,\mathrm{kg/m^3}$, $\rho_{\mathrm{lad}} = 900\,\mathrm{kg/m^3}$, $\rho_{\mathrm{olej}} = 950\,\mathrm{kg/m^3}$.

Na začiatku máme v pohári nejaký objem vody V a ponorenú časť ľadu V_1(zvyšná časť ľadu vyčnieva nad pohár, a teda nerátame, že je v pohári). Po roztopení ľadu zostane objem V rovnaký, takže nám stačí porovnať V_1 s objemom vody, ktorá vznikne roztopením ľadu. Označme si hmotnosť ľadu $m_{\text{ľadu}}$. Vieme, že keď sa ľad roztopí, tak voda, ktorá tým vznikne, bude mať takú istú hmotnosť, ako mal ľad, takže

$$
\begin{aligned}
m_{\text{ľadu}} &= m_{\mathrm{voda}} \\
m_{\text{ľadu}} &= V_{\mathrm{voda}}\rho_{\mathrm{voda}} \qquad (1)
\end{aligned}
$$

kde m_{voda}, V_{voda} a ρ_{voda} sú hmotnosť, objem a hustota ľadu po tom, čo sa roztopí. Ďaľej vieme, že keď sa ľad voľne vznáša na hladine kvapaliny, tak na neho pôsobí vztlaková sila F_{vz}, ktorá sa rovná tiaži kvapaliny vytlačenej ľadom a tá je rovná jeho tiažovej sile F_g, teda

$$
\begin{aligned}
F_g &= F_{\mathrm{vz}} \\
m_{\text{ľadu}} g &= V_1 \rho_{\mathrm{voda}} g
\end{aligned}
$$

Seminár podporujú: iuventa APVV

$$m_{\text{ľadu}} = V_1\rho_{\text{voda}} \tag{2}$$

kde g je gravitačné zrýchlenie. Porovnaním rovníc (1) a (2) dostaneme

$$V_{\text{voda}}\rho_{\text{voda}} = V_1\rho_{\text{voda}}$$
$$V_{\text{voda}} = V_1$$

inak povedané, objem ponorenej časti ľadu je taký istý ako objem vody, ktorá vznikne roztopením celého ľadu, preto sa hladina vody v pohári nezdvihne.

Ak dáme do pohára namiesto vody olej, tak sa zmení V_1 na nejaké V_2, a teda rovnosť (2) sa zmení tiež:

$$m_{\text{Ľ}} = V_2\rho_{\text{olej}}$$

Znovu porovnáme s rovnicou (1):

$$V_2\frac{\rho_{\text{olej}}}{\rho_{\text{voda}}} = V_{\text{voda}}$$

Po dosadení hustôt zistíme, že

$$\tfrac{95}{100}V_2 = V_{\text{voda}}\,,$$

teda roztopený ľad zaberie „len“ 95% objemu V_2, čiže hladina v pohári dokonca ešte klesne.

2.3 Roboty (opravoval Samko)

Na súťaži v programovaní robotov sa v osobnom súboji stretli dva jedince, robot R_1 a R_2. Úloha pre robotov je velmi jednoduchá – roboty uchopia lano a začnú sa pretahovať, silnejší vyhráva. Roboty dokážu ťahať silami F_1 a F_2 nezávisle na tom, akou rýchlosťou a akým smerom sa hýbu. Roboti majú kolieska a po podložke neprešmykujú. Keď roboti začali ťahať, spôsobilo to, že celá sústava sa pohla zrýchlením veľkosti a v smere prvého z robotov. Zrazu sa však z prvého robota zadymilo a jeho motor sa pokazil (čo pre nás znamená, že odvtedy $F_1 = 0\,\mathrm{N}$). Vyhrávať teda začal robot druhý, ktorý úspešne ťahal sústavou zase so zrýchlením a, ale v svojom smere. Koľkokrát je prvý robot silnejší ako druhý, ak viete, že je dvakrát taký ťažký?

Na to, aby robot mohol ťahať, musí sa o niečo oprieť. V našom prípade je to niečo zem a robot sa o ňu opiera kolesami. Ak robot dokáže ťahať silou F, znamená to, že dokáže ostať stáť na mieste, ak sa ho touto silou budeme snažiť odtiahnuť. Lenže, súčet síl pôsobiacich na robota musí byť v prípade stojaceho robota nulový. Teda robot sa rovnako veľkou silou F odtláča kolesami od zeme. Inak povedané, dokáže primäť zem, aby na neho pôsobila trecou silou F v opačnom smere.

Na našej súťaži ťahali roboty z plných síl. Prvý sa odtláčal silou F_1, na druhého zem pôsobila silou F_2 v opačnom smere. Celková sila na nich pôsobiaca teda bola $F_1 - F_2$ a spôsobila ich zrýchlenie veľkosti a. Ak označíme M súčet ich hmotností, tak musí platiť:

$$F_1 - F_2 = a/M\,.$$

Keď vypadol prvému robotu motor, celková sila na nich pôsobiaca bola už len F_2. Veľkosť zrýchlenia to však neovplyvnilo, platilo teda:

$$F_2 = a/M\,.$$

Platí teda:

$$F_1 - F_2 = F_2\,,$$

čiže prvý robot je dvakrát silnejší ako druhý.

K vašim riešeniam: Množstvo z vás dospelo k správnemu výsledku, dokonca k správnym rovniciam, ale len Andrejovi Vlčekovi sa podarilo mať aj správny postup. Popíšeme si teda, v čom ste najčastejšie robili chyby.

Všetci ste svorne zanedbávali trenie, odvolávali ste sa pritom na zadanie, ktoré hovorí, že roboty neprešmykujú. Kvízová otázka: „Keď postavíme jedného robota na ľad a druhého na šmirgeľ papier, ktorému budú prešmykovať kolesá?“ A je správne! Na ľade nie je trenie veľmi malé, preto na kolesá nebude pôsobiť takmer žiadna trecia sila a robot bude len stáť na mieste a kolečká sa mu budú pretáčať, ako mne očičká pri čítaní vašich riešení. Zapamätajte si, preto prosím nasledovnú múdrosť: *Keď kolesá neprešmykujú, znamená to, že koeficient trenia je dostatočne veľký na to, aby zabránil kolesám sa šmýkať po podložke!* Nebyť trenia, naše roboty sa nie sú schopné vôbec pohnúť, ťažko by sa mohli preťahovať lanom! Sily F_1, F_2, ktoré ste spomínali vo svojich riešeniach, teda nie sú žiadne sily robotov, sú to trecie sily, ktorými pôsobí zem na robotov.

Druhá chyba, ktorú ste všetci robili, sa dá vyjadriť vetou z vašich riešení: „Prvý robot pôsobí na druhého silou F_1 a druhý na prvého robota silou F_2“. To však nie je možné! Oba roboty na seba musia pôsobiť rovnako veľkými silami opačného smeru, ako im to káže tretí Newtonov zákon o akcii a reakcii. Navyše, keby na prvého robota pôsobila celková sila F_2 a na druhého F_1, nemohli by sa hýbať rovnakým smerom!

Čo dodať? Hodnotil som prísne, väčšina z vás dostala po štyri body. Keby ste však tento príklad mali všetci na plný počet, bol by zbytočný – nič by ste sa na ňom nenaučili. Tak teda dúfam, že vás tento príklad niečo naučil a ďalšie príklady z mechaniky už budete dávať ľavou zadnou.

2.4 Straty (opravoval Robo)

Položte na plynový sporák hrniec s vodou a ohrejte ju na bod varu. Aká je priemerná účinnosť sporáku pri tomto deji? Skúste toto číslo čo najpresnejšie odmerať.

Zdravím všetkých milovníkov varenia (hoci len vody v hrnci). Na úvod si vyjasnime pojem účinnosti. Vo všeobecnosti sa pod účinnosťou rozumie podiel energie využitej pri určitom deji k celkovej dodanej energii. V našom konkrétnom prípade (a príklade) varenia vody v hrnci na plynovom sporáku sa pod účinnosťou rozumie podiel tepla dodaného vode v hrnci k celkovému teplu, ktoré vzniklo spálením plynu na horáku sporáka.

Ďalšou skutočnosťou hodnou spomenutia už na samotnom začiatku je rozmanitosť možností prístupu k úlohe. Zadanie príkladu je do istej miery skúpe, hovorí sa v ňom len o plynovom sporáku, vode (a nie držkovej polievke) v hrnci a ohriatí na bod varu. Určite mi dáte za pravdu, že výsledná účinnosť deja závisí od tepelných strát, ktoré zase závisia od materiálu hrnca a teploty vody (straty so zvyšujúcou teplotou rastú). Účinnosť sporáka bude tiež závisieť od množstva zohrievanej vody, veľkosti hrnca, typu sporáka, veľkosti horáka, veľkosti plameňa (či púšťam plyn do horáka „naplno“), (ne)prikrytia hrnca pokrievkou, tlaku vzduchu (ergo nadmorskej výšky sporáka) a mnohých iných faktorov. Vzhľadom na silnú závislosť účinnosti sporáku od poňatia experimentálneho prístupu k úlohe bolo potrebné v riešení podmienky merania uviesť. Ja som meral účinnosť za nasledovných podmienok: 1 liter studenej vody z vodovodu (s teplotou $T_1 = 14 \pm 1\,°\mathrm{C}$[1]), naplno pustený plyn na stredne veľkom horáku, hrniec bez pokrievky na sporáku v Banskej Bystrici (cca 400 m.n.m.), teplota varu „určená voľným okom“; značke sporáku reklamu robiť nebudem, pretože ma svojou účinnosťou sklamal :-). Meranie som opakoval päťkrát.

[1] odchýlka pri odčítaní na ortuťovom teplomeri

Teplo Q' spotrebované na ohrev vody v hrnci (zanedbajme teplo potrebné na ohrev samotného hrnca) možno vyjadriť známym vzťahom:

$$Q' = cm(T_2 - T_1)\,, \tag{3}$$

kde c je merná tepelná kapacita vody (z tabuliek $c = 4\,200\,\mathrm{J\,kg^{-1}K^{-1}}$), m hmotnosť vody (v mojom prípade 1 liter, čo je 1 kilogram), $T_2 = 100\,°\mathrm{C}$ (teplota varu vody) a $T_1 = (14 \pm 1\,°\mathrm{C}$ (teplota vody pred ohrevom). Pri výpočte dodaného tepla spaľovaním plynu nám pomôže veličina výhrevnosť plynu. Na wikipédii[2] možno nájsť údaj, že (dolná) výhrevnosť zemného plynu distribuovaného v slovenských domácnostiach je $H = 34\,250\,\mathrm{kJ\,m^{-3}}$. Prenásobením objemom plynu ΔV spotrebovaným pri ohreve (jednoduchým odčítaním z plynomera) dostanem hľadaný udaj o dodanom teple:

$$Q = H\Delta V \tag{4}$$

Hľadanú účinnosť η nášho „ohrevového“ deja dostaneme predelením vzťahu (3) vzťahom (4), teda:

$$\eta = Q'/Q = \frac{cm(T_2 - T_1)}{H\Delta V} 100\,\% \tag{5}$$

Po dosadení poslednej neznámej (meranej) veličiny do vzťahu (5), a to objemu spotrebovaného plynu (spriemerovaného z piatich meraní) $\Delta V = (0{,}048 \pm 0{,}0064)\,\mathrm{m^3}$, som dostal výslednú účinnosť môjho sporáku 21,4 %.

Keďže úloha je experimentálna, ostáva nám dopočítať chybu meranej veličiny – účinnosti. Absolútna chyba pri určovaní teploty ohrievanej vody bola 1 °C, absolútnu chybu pri určovaní teploty varu odhadujem na 3 °C,[3] chyba pri odčítaní z plynomera bola $0{,}0002\,\mathrm{m^3}$, odchýlka z merania objemu spáleného plynu $0{,}0064\,\mathrm{m^3}$, chyba hmotnosti z nepresného dávkovania vody 0,01 kg. Odchýlku výhrevnosti zemného plynu od tabuľkovej úrovne, keďže je ťažko odhadnuteľná, neuvažujme.

Účinnosť podľa vzťahu (5) závisí priamo úmerne od hmotnosti a rozdielu teplôt a nepriamo úmerne od objemu spotrebovaného plynu, preto relatívna chyba výsledku bude súčtom relatívnych chýb týchto veličín. V mojom prípade je relatívna chyba účinnosti 19 %, t.j. účinnosť môjho sporáka pri ohreve hrnca s vodou za v úvode popísaných podmienok merania je $(21 \pm 4)\,\%$. Vami namerané účinnosti sa pohybovali v širokom intervale hodnôt (rádovo od 20 % do 50 %). Ako správne som uznal všetky riešenia s „rozumnými“ výsledkami, avšak strhával som dva body za chýbajúcu diskusiu a odhad (resp. výpočet) chyby merania, ktoré k 9 bodovému riešeniu experimentálky patria. A teraz si môžeme zaliať vodu na chutný čajík…

2.5 Numerická úloha (opravovala Tinka)

Vieme, že pokiaľ chceme na rovine hodiť hádzancom čo najďalej, treba hádzať pod uhlom $45\,°$. Čo však, ak uvážime realistickejšiu situáciu (to znamená, zarátame odpor vzduchu)? Môžete predpokladať, že odporová sila má vždy veľkosť

$$F_\mathrm{d} = \tfrac{1}{2} C S \rho v^2$$

kde ρ je hustota vzduchu, v rýchlosť pohybu hádzanca, S je prierez hádzanca a $C = 0{,}5$. Ďalej, hádzanec má tvar gule s polomerom r. Za akých podmienok pri hádzaní rýchlosťou $v_0 = 75\,\mathrm{km/h}$ vyjde optimálny uhol

[2] http://sk.wikipedia.org/wiki/Zemnný_plyn

[3] nepresnosť v určení teloty varu sa tiež podieľa na odchýlke objemu spáleného plynu

hodu o viac ako 5° iný? Úlohu nie je potrebné riešiť presne (teda analyticky), postačí nám numerický výsledok získaný z akejkoľvek vami spravenej simulácie v ľubovoľnom programovacom jazyku, či prostredí, kde sa čosi podobné dá realizovať (napr. aj Excel).

Táto úloha nebola ťažká, len bolo treba si poriadne uvedomiť, ako by sme niečo také vedeli spočítať, prečo to máme spraviť iba numericky a potom mať patričnú trpezlivosť.

Problémom je, že máme neustále sa meniace zrýchlenie, ktoré závisí od aktuálnej rýchlosti.[4]. A my vieme najlepšie robiť s konštantnými rýchlosťami, nanajvýš tak konštantnými zrýchleniami. Tak poďme pracovať s nimi. Tvárme sa, že ak zoberieme nejaký krátky časový úsek Δt, tak rýchlosť bude konštantná a všetky zrýchlenia sa prejavia až na konci tohoto úseku, kedy sa rýchlosť skokovite zmení – pričíta sa k nej zrýchlenie (konštantné, lebo závisí iba od g a od aktuálnej rýchlosti, ktorá je konštantná) krát čas po ktorý sa „zbieralo“ a bude znova konštantná po čas Δt. To nie je pravda, ale dúfajme, že pre maličké Δt to bude dobré priblíženie. Rozdeľme si ešte tento pohyb na vodorovnú a vertikálnu zložku – gravitácia pôsobí iba v jednom smere. A ako to bude s odporovou silou? Tá sa patrične rozloží do týchto smerov. Keď si označíme m hmotnosť hádzanca a $v_\mathrm{k}^\mathrm{x}, v_\mathrm{k}^\mathrm{y}$ horizontálnu resp. vertikálnu zložku rýchlosti hádzanca v k-tom časovom úseku dĺžky Δt, tak po preložení hore napísaného do reči rovníc dostaneme[5]

$$v_\mathrm{k+1}^\mathrm{x} = v_\mathrm{k}^\mathrm{x} - \frac{CS\rho}{2\,m}\sqrt{(v_\mathrm{k}^\mathrm{x})^2 + (v_\mathrm{k}^\mathrm{y})^2} \cdot v_\mathrm{k}^\mathrm{x}\Delta t$$

$$v_\mathrm{k+1}^\mathrm{y} = v_\mathrm{k}^\mathrm{y} - \frac{CS\rho}{2\,m}\sqrt{(v_\mathrm{k}^\mathrm{x})^2 + (v_\mathrm{k}^\mathrm{y})^2} \cdot v_\mathrm{k}^\mathrm{y}\Delta t - g\Delta t$$

Vidíme, že to celé závisí len od $CS\rho/(2m)$. To je príjemné, nazvime si túto konštantu K a budeme zisťovať dĺžku doletu v závislosti od K a uhla ϕ pod ktorým hádžeme. $v_0^\mathrm{x} = \cos(\phi)v_0$, podobne $v_0^\mathrm{y} = \sin(\phi)v_0$.

Ďalší postup už záleží od vkusu. Zvoľte si metódu dosádzania a konštantu podľa ľubovôle. Ja osobne som použila $\Delta t = 0{,}01\,\mathrm{s}$. Postupne spočítate dostatočne veľa nových rýchlostí, aj dráh ktoré sa prešli. Keď bude celková dráha prejdená vo vertikálnom smere znova nulová, znamená to, že hádzanec dopadol, a že aj horizontálne prejdená vzdialenosť je už konečná. Mne osobne vyšli takéto výsledky:

ta tabulka

Je intuitívne, že keď málo zmením uhol, tak sa málo zmení vzdialenosť dopadu, rovnako ako, že optimálny uhol bude len jeden. Preto z tejto tabuľky môžem celkom zodpovedne vyčítať, že tento uhol bude o viac ako 5° iný cca pre $CS\rho/(2m) > 0{,}031$.

Neviem ako vy, ale mne to predstavu o reálnom svete veľmi nedalo. Skúsme tam teda dosadiť nejaké realistické hodnoty, napríklad $\rho = 1{,}275\,\mathrm{kg/m^3}$ a guličku s polomerom 5 cm. Výjde, že môže mať hustotu nanajvýš dákych $154\,\mathrm{kg/m^3}$, čo je veľmi málo (iba nafukovacie také bývajú. A tie sa naozaj sprosto hádžu). Takže ak v praxi budete hádzať guľou, teória o 45° nie je vôbec na zahodenie. Akonáhle to ale bude mať menší polomer, alebo zemiakovitejší tvar, ideálny uhol bude klesať. A naozaj, to asi sami poznáte

[4]Fajnšmekri znalí difiek si môžu nasledujúci postup prerobiť na exaktnú sústavu diferenciálnych rovníc. Aj tak im to bude nanič.

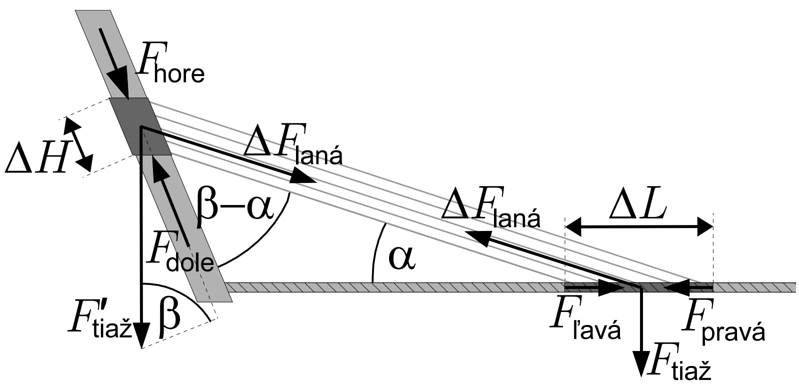
[5]Fajnšmekri si môžu všimnúť, že po prehodení v_k^x vľavo, predelení Δt a limitnom prechode dostanú presne to isté, čo už mali. Náhoda? Možno… ale eé. Aj tak je im to nanič, Samko tvrdí, že analytické riešenie by to nemalo mať.

Väčšina z vás sa so základnou myšlienkou vyrovnala celkom dobre, jediný zmätok bol s tým, akú veličinu ste skúmali. Ak ste zvolili hustotu vzduchu za udanú, to sa ešte dalo uznať, keďže príklad zaváňal praxou, ale voliť napríklad hmotnosť je nepatričné (a najmä úúúplne zbytočné ;)). A tak.

2.6 Most cez Dunaj (opravoval Kubo)

V Bratislave je premávka cez dunajské mosty vždy čulá. Preto sa magistrát rozhodol vybudovať nový most. Treba preklenúť rieku šírky $L = 300\,\mathrm{m}$. Miestny hlavný architekt rozhodol, že most bude vyzerať podľa obrázka. Na vás je, aby most nespadol a pritom nebol ani priveľmi nákladný – treba navrhnúť parametre α a β tak, aby žiadne napätia v materiáloch neprevýšili pätinu ich medze pevnosti, a zároveň, aby cena mosta bola minimálna. Most bude mať betónovú mostovku (to, po čom jazdia autá) a pilier, a oceľové laná. Hmotnosť $1\,\mathrm{m}$ mostovky má byť $20\,\mathrm{t}$. Konštrukcia je vymyslená tak, že pilier a aj mostovka môžu byť v každom mieste zaťažené iba v pozdĺžnom smere (nemá v nich byť šmykové napätie). Oceľové laná sú veľmi husto rozmiestnené a navzájom rovnobežné. Potrebné údaje: hustota betónu $\rho_{\text{betón}} = 2\,000\,\mathrm{kg\,m^{-3}}$, hustota ocele $\rho_{\text{oceľ}} = 7\,800\,\mathrm{kg\,m^{-3}}$, medza pevnosti betónu v tlaku $\sigma_{\text{betón}} = 40\,\mathrm{MPa}$, medza pevnosti ocele v ťahu $\sigma_{\text{oceľ}} = 2\,\mathrm{GPa}$, cena $1\,\mathrm{kg}$ ocele stojí 47-násobok $1\,\mathrm{kg}$ betónu. Predpokladajte, že hmotnosť lanovia a automobilov na moste je zanedbateľná voči hmotnosti mostovky – dodatočne to overte.

Tento na pohľad netradičný a priam praktický príklad nie je až taký zložitý, ako sa môže na prvý (neporiadny) pohľad zdať. Podmienka pozdĺžneho zaťaženia všetkých súčastí mosta je totiž značne obmedzujúca. Načrtnem, čo z toho vyplýva: Pre mostovku to znamená, že jednotlivé kusy mostovky môžu na seba pôsobiť iba vo vodorovnom smere a teda celá ich tiaž musí byť nesená zvislou zložkou ťahovej sily lán. Pomocou parametra α vieme potom vyjadriť ťahovú silu v lanách. Podobne to funguje aj pre pilier, kde sa zložky kolmé na pilier musia v každom segmente piliera vyrušiť (zložka tiažovej sily so zložkou ťahovej sily lán v smere kolmom na pilier). To nám určuje hmotnosť každého segmentu piliera. V ďalšom texte si ukážeme, že prierez piliera musí byť nutne konštantný a ďalej sa už treba len popasovať s podmienkami pevnosti a minimalizovaním ceny.



Obr. 1: Pôsobiace sily

Trocha geometrie na úvod: Zo sínusovej vety ľahko vyjadríme dĺžku piliera $H = L\sin\alpha/\sin(\beta-\alpha)$.[6] Keďže nosné laná sú navzájom rovnobežné, tak z rovnoľahlosti vidíme, že laná nesúce úsek mostovky dĺžky ΔL sú upevnené na segmente piliera dlhom $\Delta H = \Delta L\sin\alpha/\sin(\beta-\alpha)$.

[6] Výška piliera nad zemou potom je $H\sin\beta$.

Vieme, že dĺžková hustota mostovky je $\lambda = 20\,\mathrm{t\,m^{-1}}$; teda ťahová sila v lanách upnutých na dĺžke mostovky ΔL musí byť (aby zvislé zložky síl na vybraný úsek mostovky boli nulové) rovná

$$\Delta F_{\text{laná}} = \frac{\Delta L\,\lambda\,g}{\sin\alpha}\,, \tag{6}$$

Rovnako môžeme postupovať pozerajúc na pilier dĺžky ΔH: zložky síl pôsobiace na segment v kolmom smere sa musia vyrušiť a teda musí platiť $\Delta F_{\text{laná}}\sin(\beta-\alpha) = \Delta H\lambda'\,g\,\cos\beta$, kde λ' je dĺžková hustota daného segmentu piliera. Odtiaľ s využitím (6) dostaneme

$$\lambda' = \frac{\sin^2(\beta-\alpha)}{\sin^2\alpha\ \cos\beta}\,\lambda\,, \tag{7}$$

čo znamená, že prierez piliera bude konštantný.

Pozrime sa teraz trochu na tie pevnosti. Ak sa pozeráme na pozdĺžnu silu v mostovke, tak vidíme, že sila sa pozdĺž mostovky zvýši o $\Delta F_{\text{laná}}\ \cos\alpha$ na každom úseku dĺžky ΔL. Najväčšia bude teda pri päte piliera a bude mať veľkosť $F_{\text{mostovka}} = L\lambda g/\tan\alpha$. Táto sila musí byť menšia ako jedna pätina (označím magickú konštantu $\kappa = \frac{1}{5}$) súčinu medze pevnosti betónu a prierezu mostovky, čo zapíšem takto

$$\begin{aligned} \frac{L\lambda\,g}{\tan\alpha} = F_{\text{mostovka}} \quad &\le \quad \kappa\,\sigma_{\text{betón}}\,S_{\text{mostovka}} = \kappa\,\frac{\lambda\,\sigma_{\text{betón}}}{\rho_{\text{betón}}}\,, \\ \tan\alpha_0 \overset{\text{ozn}}{=} \tfrac{3}{4} = \frac{L\,g\,\rho_{\text{betón}}}{\kappa\,\sigma_{\text{betón}}} \quad &\le \quad \tan\alpha \qquad \Leftrightarrow \qquad \alpha_0 \le \alpha\,, \end{aligned} \tag{8}$$

V pilieri je situácia „navlas podobná“: sila rastie smerom k jeho päte, a to o $\Delta F_{\text{laná}}\cos(\beta-\alpha) + \Delta H\lambda' g\sin\beta$ na každom segmente dĺžky ΔH. Vyjadrime teraz silu v päte piliera iba cez zadané veličiny a parametre α, β; pomôžeme si pritom rovnicami (6), (7) a vyjadreniami veličín H a ΔH; k slovu príde aj súčtový vzorec,

$$\begin{aligned} F_{\text{pilier}} &= \left[\Delta F_{\text{laná}}\ \cos(\beta-\alpha) + \Delta H\ \lambda'\ g\ \sin\beta\right]\frac{H}{\Delta H}\,, \\ &= \frac{L\lambda\,g}{\sin\alpha\ \cos\beta}\left[\cos(\beta-\alpha)\ \cos\beta + \sin(\beta-\alpha)\ \sin\beta\right]\,, \\ &= \frac{L\lambda\,g\ \cos\alpha}{\sin\alpha\ \cos\beta}\,, \end{aligned}$$

Potom podmienka pre pevnosť piliera bude

$$\begin{aligned} \frac{L\lambda\,g\ \cos\alpha}{\sin\alpha\ \cos\beta} = F_{\text{pilier}} \quad &\le \quad \kappa\,\frac{\lambda'\,\sigma_{\text{betón}}}{\rho_{\text{betón}}} = \kappa\,\frac{\sin^2(\beta-\alpha)}{\sin^2\alpha\ \cos\beta}\,\frac{\lambda\,\sigma_{\text{betón}}}{\rho_{\text{betón}}}\,, \\ \tan\alpha_0 = \frac{L\,g\,\rho_{\text{betón}}}{\kappa\,\sigma_{\text{betón}}} \quad &\le \quad \frac{\sin^2(\beta-\alpha)}{\sin\alpha\ \cos\alpha}\,, \\ \alpha + \arcsin\sqrt{\tan\alpha_0\ \sin\alpha\ \cos\alpha} \quad &\le \quad \beta\,, \end{aligned} \tag{9}$$

Dá sa pomerne ľahko ukázať, že aby sme k uhlu α našli uhol β menší ako 90°, tak musí platiť $\alpha < \frac{\pi}{2} - \alpha_0$.[7]

[7] Teda pre $\tan\alpha_0 > 1$ by úloha nemala riešenie.

Poďme konečne vyjadriť cenu mosta: bude to cena lán, cena piliera a cena mostovky. Mostovka je vždy rovnako drahá, takže mi stačí minimalizovať cenu zvyšku. Hmotnosť piliera je

$$H\lambda' = \frac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin\alpha\ \cos\beta}\,L\lambda' = \frac{\sin\beta\ \cos\alpha - \cos\beta\ \sin\alpha}{\sin\alpha\ \cos\beta}\,L\lambda = \frac{\tan\beta}{\tan\alpha}\,L\lambda - L\lambda\,.^{8}$$

Aká je však hmotnosť lán? Na unesenie dĺžky ΔL mostovky musia laná na tomto úseku znášať bezproblémov silu $\Delta F_{\text{laná}}$, čiže prierez lán nesúcich tento úsek musí byť podľa našich inžinierskych podmienok aspoň $\Delta F_{\text{laná}}/(\kappa\ \sigma_{\text{oceľ}})$. Dĺžky lán tvoria aritmetickú postupnosť a teda priemerná dĺžka je (opäť radno využiť sínusovú vetu) $l = L\sin\beta/[2\sin(\beta-\alpha)]$. Hmotnosť lán teda je $l\Delta F_{\text{laná}}L/ /(\kappa\ \sigma_{\text{oceľ}}\Delta L)$. Vidíme, že hmotnosť lán sa zmenšuje s rastúcim β, lebo dĺžka l sa tým skracuje. To je protichodný trend oproti tomu, ako sa správa hmotnosť piliera.

Cena mosta bude (až na násobiacu konštantu) rovná (po utrasení)

$$\text{cena} = \frac{\sin^2(\beta-\alpha) + Q\ \sin\beta\ \cos\beta}{\sin\alpha\ \cos\beta\ \sin(\beta-\alpha)}\,L\lambda\,, \qquad \text{kde } Q = \frac{47}{2}\frac{L\ g\ \rho_{\text{oceľ}}}{\kappa\ \sigma_{\text{oceľ}}}\,, \tag{10}$$

Žiaľ, pri hľadaní minima funkcie (10) sa podmienky (8) a (9) nedajú použiť priamočiaro. Človek by si (avšak mylne) mohol myslieť, že most bude vo všeobecnosti najlacnejší vtedy, keď budú nerovnosti (8) a (9) dosahovať akurát rovnosť. No nie je to tak pre ľubovolný pomer cien ocele a betónu (čiže pre akékoľvek Q), keďže funkcia ceny (10) je súčet 2 členov, ktoré sa správajú odlišne pre rastúce β – jeden z nich rastie a druhý (násobený Q-čkom) klesá. Najjednoduchšie východisko z tejto zapeklitej situácie je napísať si programček, ktoré bude hľadať minimum numericky. Bude jednoducho skúšať α z rozmedzia $\alpha_0 \approx 36{,}87^\circ$ až $\frac{\pi}{2} - \alpha_0 \approx 53{,}13^\circ$ a k tomu β z rozmedzia $\alpha + \arcsin\sqrt{\tan\alpha_0\ \sin\alpha\ \cos\alpha}$ až 90° a vypočítavať pre zvolené α, β cenu podľa vzorčeka (10) a hľadať, kde je cena najnižšia. Ukáže sa, že pre nami zvolené parametre zo zadania to vychádza tak, že najekonomickejšie je zvoliť $\alpha = \alpha_0 \approx 36{,}87^\circ$, $\beta = 2\alpha_0 \approx 73{,}74^\circ$. Pomer hmotnosti lán ku hmotnosti mostovky je $\frac{1}{13}$, čiže sme skutočne mohli hmotnosť lán s pokojným svedomím zanedbať voči tiaži mostovky.

Hodnotenie: za ukázanie nutnosti homogénneho prierezu piliera 2b, za podmienku pre pevnosť mostovky 2b, za podmienku pre pevnosť piliera 2b, za vyjadrenie hmotnosti lán a overenie predpokladu 2b, za nájdenie optimálnych uhlov α, β posledný bod.

2.7 Filipova elektrická štvorcotyč (opravoval Filip)

Majme nabitý štvorec so stranou A. My sedíme v jeho rohu a odmeriame intenzitu E_1. Následne vystrihneme z neho štvorec so stranou $\frac{1}{2}A$ vrátane miesta, kde sedíme. Zostane nám už iba také L. Otázka je, akú intenzitu nameriame teraz? No a nebuďme zlí. Prezraďme si rovno riešenie.

Výsledná intenzita je zjavne rovnaká, ako keby sme na veľký štvorec prilepili malý s opačným nábojom. Stačí teda sčítať len tieto dve intenzity podľa princípu superpozície. A aká je teda intenzita E_2 od malého štvorca? Každému elementu malého štvorca vieme pomocou rovnoľahlosti priradiť element rovnakého tvaru dvojnásobných rozmerov v dvojnásobnej vzdialenosti patriaci veľkému štvorcu. No a aké sú čiastkové intenzity od týchto elementov? Náboj je úmerný ploche, čiže štvornásobný, vzdialenosť je dvojnásobná, po umocnení sa to navzájom vyhubí a intenzity sú rovnaké. Teraz môžeme presumovať/preintegrovať celý štvorec a vidíme, že $E_1 = E_2$. Čiže výsledná intenzita je $E = E_1 - E_2 = 0$. Čiže to L-ko na nás vlastne vôbec nepôsobí? Kde je (a je vôbec) chyba v úvahe?

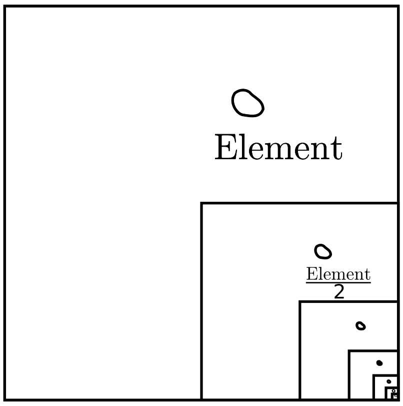
[8] Odkiaľ sa dá s využitím (9) vidieť, že pilier bude najlacnejší pre $\alpha = \alpha_0$, $\beta = 2\alpha_0$.

Uvedený postup v zadaní príkladu vyzerá úplne fajn, no nie? Predsa takto sa riešia *všetky* podobné príklady. A práve to je problém, že všetky. Aj tie, kedy sa to riešiť nedá. Na fyzike je úplne krásne, že veľká časť úloh sa dá riešiť trikovo, no netreba zabúdať, že aj triky majú svoje obmedzenia, kedy ich môžeme použiť a kedy už nie. To je aj tento prípad.

Už na prvý pohľad je zjavné, že čosi nám na výsledku nesedí. Ideme teda hľadať chybu.

Pozrime sa detailnejšie na úvahu o tom, že každému elementu vieme priradiť element s dvojnásobnými rozmermi dva krát ďalej. S týmto nijako nepohneme, fyzika (i zadanie) hovorí, že intenzity od oboch elementov budú rovnaké. OK, to je veľkosť. No intenzita je vektor. Nemôže sa stať, že by sa niektoré elementy vyrušili s inými? Z časti áno. Zo symetrie je zjavné, že výsledná intenzita má smerovať v smere uhlopriečky[9]. Elementy symetricky rozložené okolo nej si vyrušia navzájom zložky kolmé na uhlopriečku, no tie zložky intenzity v smere uhlopriečky sa sčítajú.

Zostáva tak jediná možnosť, že sme spravili chybu v sčítavaní.[10] Poďme teda sčitovať pekne pomaly. Vyberieme si ľubovolný element a predpokladajme, že na nás pôsobí intenzitou E. Potom existujepodobný element v polovičnej vzdialenosti ako na obrázku.



Obr. 2: Polohy elementov

Ten polovičný bude pôsobiť tiež E, atď. A je ich tam nekonečne veľa – veď vždy existuje nejaký o polku bližšie. Súčet konštantných intenzít rastie teda *neobmedzene*. To znamená, že ak je intenzita pôvodného nenulová [11], tak po sčítaní bude výsledná intenzita nekonečná. A to sme spočítali zatiaľ len niektoré elementy... No a ak predpokladáme, že je nulová – že konečný element na nás nepôsobí žiadnou intenzitou, tak musí byt bez náboja. Výsledok by bol teda nula.

Je to teda hlúpa situácia, buď máme nulu, alebo nekonečno. Nič medzi. Príroda sa s tým vysporiadala tak, že nič ako homogénne nabitá dvojrozmerná platná neexistuje. A kde som teda urobil chybu ja? Práve v tom, že výslednú intenzitu som si označil ako E a rátal s tým ako s konečným číslom. Keď sa od seba odčítajú dve nekonečná, tak to neznamená, že výsledok je nula. No v skutočnosti bude to L-ko pôsobiť zanedbateľnou silou voči zvyšku.

K riešeniam: často ste sa vyhovárali na delenie nulou v nulovej vzdialenosti. Toto však samo o sebe nie je dostatočný argument. Napríklad v prípade nabitej kocky by toto delenie nevadilo. Súvisí to s limitami intenzity pre vzdialenosť idúcu k nule – jednak v čitateli závisí veľkosť elementu (teda aj náboja) od r, no a v menovateli je štvorec vzdialenosti r. A v závislosti od toho, aké teleso

[9] tej správnej uhlopriečky, ale to všetci zvládate:)
[10] Keby toto videla moja učiteľka na ZŠ!!!
[11] Hocijako malá, nič nepomôže.

uvažujeme je táto limita nekonečná, konečná či nulová. Poriadne vysvetlenie je však na druhý vzorák.

A viete, prišlo mi trápne písať vzorák bez jediného vzorca, takže: $a^2 + b^2 = c^2$.