Fyzikálny korešpondenčný seminár
25. ročník, 2009/2010
FKS, KTFDF FMFI UK, Mlynská dolina, 84248 Bratislava
e-mail: otazky@fks.sk web: http://fks.sk

Vzorové riešenia 3. kola zimnej časti 2009/2010

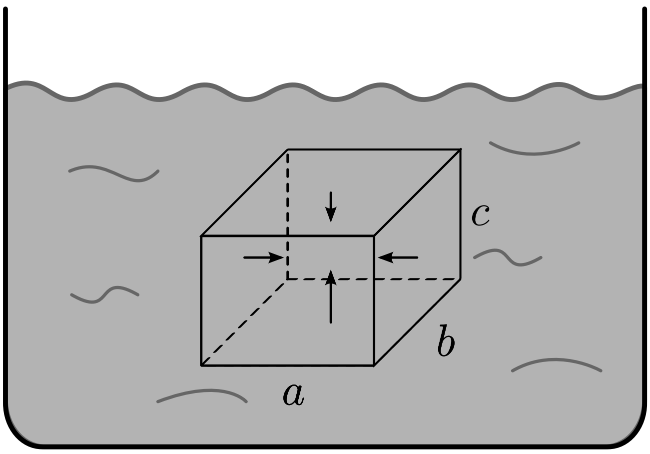
3.1 Klamú nás? (opravovala Tinka, vzorák Poli)

Keď je teleso ponorené do vody, pôsobí naň vztlaková sila – hovorí Archimedov zákon. Ak však vezmeme kelímok napr. od margarínu (alebo ešte lepšie nejakú prísavku) a pricapíme ho o dno hrnca (obr.) môže tam chvíľu ostať držať a to napriek tomu, že vztlaková sila naň pôsobiaca by mala byť oveľa väčšia ako tiaž kelímka. Prečo je to tak? A čo na to ujo Archimedes a jeho zákon?

Mnoho z nás sa na základnej škole naučilo múdry zákon od uja Archimeda:

$$F_{vz} = V\varrho g\,.$$

Prípadne slovne: „Vztlaková sila pôsobiaca na teleso sa rovná tiaži kvapaliny telesom vytlačenej.[1]“ Čo to má spoločné s našou situáciou, je na prvý pohľad jasné. Máme teleso? Máme. Máme kvapalinu, ktorú teleso vytlačilo? Máme. Má táto kvapalina nejakú tiaž? Má. Do kelu… Čo však nehovoria všade a každému, je to, odkiaľ sa záhadná sila, v tomto zákone popísaná, zobrala. Na teleso v kvapaline pôsobí tlaková sila hydrostatického tlaku. Práve rozdiel týchto síl pôsobiacich na jednotlivé steny telesa spôsobí, že výsledná sila od kvapaliny smeruje nahor. Zoberme si pre jednoduchosť teleso v tvare kvádra so stranami dlhými a, b, c, tak ako na obrázku.



Obr. 1: Sily pôsobiace na kváder

[1] vždy sa mi páčil ten inverzný slovosled :-)

Tlak v hĺbke h pod hladinou vieme vypočítať ako

$$p_h = h\varrho g\,.$$

Teda ak máme plochu, ktorá je celá v rovnakej hĺbke môžeme vypočítať silu

$$F_h = Sp_h = Sh\varrho g\,.$$

Vybavme najprv zvislé steny. Na tie pôsobí tlaková sila (na ľavú smerom doprava a na prvú smerom doľava). Na tieto steny pôsobí rovnako veľká tlaková sila s opačnou orientáciou. Dôvod je jednoduchý, ku každému kúsku pravej steny existuje kúsok ľavej steny v rovnakej hĺbke a naopak. Teda výsledná sila od zvislých stien je nulová. S vodorovnými stenami to nebude oveľa zložitejšie. Na hornú stenu pôsobí tlaková sila (smerom nadol):

$$F_{h1} = Sp_{h1} = abh_1\varrho g\,.$$

Na dolnú podobne (no smerom nahor):

$$F_{h2} = Sp_{h2} = abh_2\varrho g\,.$$

A teda vztlaková sila:

$$F_{vz} = F_{h2} - F_{h1} = ab\varrho g(h_2 - h_1) = abc\varrho g = V\varrho g\,.$$

Kde $c = h_2 - h_1$ je výška telesa ktoré sme ponárali a $V = abc$ je jeho objem. Dostali sme sa k podobnému výsledku ako ujo Archimedes. Heureeeeeka…

Stále to vyzerá na to, že kelímok na dne je chyba v matrixe… V našom prípade, ale predsa na kelímok pri dne nepôsobí žiadna voda, žiaden hydrostatiský tlak. Tým pádom nepôsobí ani žiadna tlaková sila na spodnú časť kelímka. Keď si uvedomíme tento fakt, je jasné, prečo Archimedov zákon vychádzajúci z iných predpokladov neplatí. Bola by namieste otázka: A prečo tam tá krabička nezostane navždy? Ak by sa pod ňu nikdy nedostala žiadna voda, tak by skutočne zostala. Nedokonalosť kelímka však spôsobí zlé veci, niekde sa trošku zdeformuje, prestane priliehať, kúsok vody sa naberie… no a keďže na Archimedovu vztlakovú silu stačí hociaký malý kúsok vody pod kelímkom, kelímok si za chvíľu veselo stúpa nahor.

3.2 Podivný Filipov zvyk (opravoval JAno, vzorák Filip)

Filip si každé ráno, každý večer a občas aj inokedy robieva kakao. Do pohára s objemom $0{,}3\,\mathrm{l}$ naleje mlieko a dá si tam tri lyžičky granka. Dlho dlho mieša. Potom sa napije, ale zo zvyku nechá desatinu kakaa nedopitú. Pohár opäť doplní a opäť pridá tri lyžičky granka. Keďže Filip má naozaj rád kakao, takýto postup zopakuje veľmi veľa krát.

a) Aká koncentrácia kakaa (lyžičiek na liter mlieka) bude v pohári po veľa pitiach?

b) (nebodové) Existuje rozumné vysvetlenie, prečo to robí? (áno, existuje :-))

Predpokladajte, že rozmiešaním kakaa v mlieku objem mlieka nenarastá.

Ahojte. Chutí vám Granko? A chutila aj úloha? Ak nie, tak si pochutnajte aspoň na vzoráku.

Ideálne je najprv vyskúšať úlohu v praxi. Vypijeme pohár, necháme čosi na dne a pridáme mlieko. Ihneď si všimneme, že výsledný nápoj je už trochu zagrankovaný. Keď teraz pridáme tri lyžičky Granka, tak nový nápoj bude silnejší ako ten pôvodný. Opäť časť vypijeme. Na dne nám ostane hustejší nápoj a teda aj po doliatí mliekom bude viac zagrankovaný. Koncentrácia sa pridaním troch lyžičiek ešte zvýši. Vidíme teda, že nápoj je čoraz hustejší. Koncentrácia stále rastie. Ale mohlo by nám byť zjavné aj to, že niekedy sa to musí zastaviť. Veď po doliatí mlieka nemôže byť nápoj tvorený len Grankom. Za takéto pozorovanie už mohli byť body. Otázkou je však stále to, kde sa to ustáli po veľa pitiach.

Môžeme sa hrať na matematikov a ísť počítať nejaké škaredé limity. Ale my sa budeme hrať na fyzikov. Pointa je v tom, že sa pýtame na stav po veeeeeeľa pitiach. A my sme si povedali, že sa to musí nejako ustáliť. To, aká (prechodná) koncentrácia bude po málo meraniach, nás trápiť nemusí.

V ustálenom stave musí zjavne platiť, že vypitím časti mlieka vypijeme spolu s ním aj tri lyžičky Granka. Keby sme ich totiž vypili menej, tak by sa po pridaní ďalších 3 lyžičiek koncentrácia ešte zvyšovala. Keby sme ich vypili viac, tak by sa znižovala. Tak či onak, nebol by to ustálený stav.

Čiže vieme, že vo vypitých 270 ml mlieka musia byť tri lyžičky. V 300 ml je ich teda tri celé a jedna tretina lyžičky.

A ďakujem za zaujímavé komenty v časti b). Okrem ocenenia blahodárneho vplyvu kakaa na zdravie a ducha sa mnohým zdá krásne, že je tento nápoj pri takejto príprave stále silnejší a sladší. A keď vás chytí náhly smäd, viete, že máte chutný nápoj vždy pripravený.

3.3 Zo života horolezcov (opravoval Kubo)

Via ferrata, alebo aj železná cesta, vyzerá ako hromozvod prichytený do steny pravidelnými upevneniami s rozostupmi H (obrázok). Aby horolezci evolučne nevyhynuli, na ferrate sa „istia". To sa robí nasledovne: Horolezec sedí v tzv. sedáku, z neho je krátkym lanom spojený s ferratou (hromozvodom), po ktorej sa lano môže voľne kĺzať, cez upevnenia ferraty do skaly však neprejde (obrázok). Pri páde horolezec padá po najbližšie upevnenie ferraty, kde sa lano prirodzene zastaví, horolezcom prudko mykne, no ďalej nepadá. Aby sa zabránilo veľmi prudkému myknutiu (znamenalo by okamžitú smrť), lano nie je s horolezcom spojené pevne, ale je upevnené v tzv. brzdnom mechanizme. Ten začne prešmykovat pri zaťažení silou $F_\mathrm{B} = 6\,\mathrm{kN}$ a pri prešmykovaní tiež kladie lanu odpor o sile F_B. Dĺžka lana, ktoré systémom môže prejsť je $L = 1\,\mathrm{m}$. (Potom sa to celé zasekne a nasleduje veľmi prudké myknutie a potenciálne smrť)

a) Aké preťaženie pôsobí na horolezca s hmotnosťou $80\,\mathrm{kg}$ pri páde?

b) Aké môžu byť max. rozostupy H upevnení lana do skaly, aby aj pád z najvyššieho miesta nad posledným istením bol bezpečný?

Zrejme každý má taký (nefalšovaný) pocit, že spadnúť zvyššia bude asi nepríjemnejšie ako spadnúť iba kúsok. Aký najvyšší pád existuje na via ferrata? Najnepriaznivejšie sa nehoda môže stať tesne pred tým, ako sa normočlovek „precvakne" nad ďalšie upevnenie fixného lana do skaly.[2] To ho čaká najprv voľný pád z výšky H. Následne mu vo voľnom páde začne brániť karabína, ktorá narazí do upevnenia fixného lana do skaly. Krátke lano medzi karabínou a

[2]Aby človek za žiadnych okolností nebol úplne neistený, tak sa používa systém s dvoma karabínami. Človek teda pri „precvakávaní" precvakne najprv jednu karabínu istený druhou a následne „precvakne" druhú istený prvou.

brzdiacim mechanizmom[3] sa skoro okamžite napne[4] na silu F_B. Dovtedy lano v preklzovom (= brzdiacom) systéme kvôli treniu stálo. Akonáhle však stúpne napätie v lane na F_B, tak lano začne preklzovať. Podľa zadania bude šmykové trenie medzi lanom a brzdným mechanizmom tiež F_B a teda upevnenie fixného lana bude cez karabínu a krátke lano pôsobiť na brzdný systém a cez neho na sedák a lezca v ňom silou F_B.

Riešenie časti a: Ujasnime si, čo je to preťaženie: Preťaženie hocijakého systému hovorí o tom, aké zrýchlenie/spomalenie daný systém *cíti*. Keď teda v prvej fáze padám voľným pádom vo vzduchoprázdne, tak môj organizmus žiadne zrýchlenie necíti – síce moje ťažisko ustavične zrýchľuje, avšak každé moje tkanivo padá rovnako, a vzájomne na seba nepôsobia – tomu hovoríme, že preťaženie je nulové. Teda, preťaženie budú spôsobovať iba sily, ktoré pôsobia na rôzne miesta systému rozlične – napríklad pôsobia cez povrch systému. Keď pokojne sedím na prednáške, tak pociťujem preťaženie $1g$, lebo takéto zrýchlenie mi udeľujú sily zvonka pôsobiace na môj zadok.[5] Preťaženie normolezca s hmotnosťou $m = 80\,\mathrm{kg}$ teda pri páde bude spôsobené silou prenášanou cez sedák a bude mať veľkosť $a = F_B/m \approx 7{,}5g$.[6]

Riešenie časti b: Keď náš chudáčisko padne zvysoka, tak sa mu však môže stať nepríjemnosť, že sa mu minie lano, ktoré môže vojsť do preklzovacieho mechanizmu. Ako bolo v zadaní naznačené, dôsledky môžu byť krajne nepriaznivé a teda za bezpečný môžeme považovať iba pád, ktorý sa zastaví, keď systémom prejde najviac dĺžka L lana. Celú situáciu si je pekné predstaviť z pohľadu karabíny: karabína padne na pevný bod a zastane (skoro okamžite). Potom sa lano z nej vychádzajúce napne a po ňom sa šúcha brzdný mechanizmus (a teda aj lezec). Pri šúchaní sa vykoná práca (a vznikne teplo) o veľkosti $W = F_\mathrm{B} l$, kde l je dĺžka lana, ktorá skutočne prešla brzdou. Táto práca je konaná na úkor kinetickej energie padajúceho lezca. Kinetickú energiu získal lezec na úkor straty svojej potenciálnej energie, ktorú si predtým pracne zadovážil.[7] Celková potenciálna energia, ktorá sa pri páde premenila na kinetickú je rovná $\Delta E_\mathrm{p} = mg(H + l)$. Z rovnosti $\Delta E_\mathrm{p} = W$ dostaneme

$$H = \frac{(F_\mathrm{B} - mg)}{mg}\, l \leq \frac{(F_\mathrm{B} - mg)}{mg}\, L \approx 6{,}5\,\mathrm{m}\,.$$[8]

Hodnotenie: Prvá časť bola hodnotená 4 bodmi, druhá 5 bodmi. Za zjednodušenie výsledku b) časti na $H \leq F_\mathrm{B} L/(mg)$ bez zdôvodnenia som ukladal penále -2b. Zamieňanie preťaženia so zrýchlením dostalo bonusové -2b. Drobné chybičky si vyslúžili ďalšie mínusbodíky.

[3] V reálnom prípade sa napnú 2 laná od 2 karabín, ktoré už spojené dovedna prechádzajú jediným brzdiacim mechanizmom.

[4] Zvyčajne býva skoro nepružné a teda neabsorbuje prakticky žiadnu energiu a ani nepredĺži výšku pádu.

[5] Sedieť na Jupiteri môže byť celkom fuška, zato padať na Jupiter je rovnaká pohodička ako padať na Zem. Len radšej nedopadnúť.

[6] Všimnite si, že spomalenie normolezca (v sústave spojenej so zemou) pri zachytení pádu brzdiacim mechanizmom je $a - g$ a je odlišné od hodnoty preťaženia, ktorú pociťuje!

[7] Otázka je, načo si ju zadovážil? Odpoveď je, že zväčša je hore dobrý výhľad!

[8] Môžeme si všimnúť, že ak by bolo F_B viac, tak by si lezec mohol dovoliť pád z väčšej výšky. Lenže väčšie F_B znamená väčšie preťaženie a najmä vnútorné orgány nemusia väčšie preťaženie dobre znášať!

3.4 Domov kukučky (opravovala Marika, vzorák Poli)

Kyvadlové hodiny merajú čas na princípe počítania kmitov kyvadla (primitívne hodiny ktoré obsahujú iba kyvadlo vidíš na obrázku). Ako veľmi sa hodiny budú oneskorovať, ak sme ich naložili na vozík a nechali ich viezť sa dole naklonenou rovinou ak

a) systém zrýchľuje bez trenia?

b) máme konštantný koeficient trenia od podložky f?

c) máme trenie úmerné druhej mocnine rýchlosti (napr. odpor vzduchu) a od pustenia vozíka uplynulo už veľmi veľa času (hodiny sú celé v bedni, takže svištiaci vzduch nenaráža priamo na kyvadlo)?

Predpokladajte, že hodinám nevadí, pokiaľ ich držíme šikmo a ukazujú vtedy správny čas. Vždy skúste tiež povedať, kde má kyvadlo rovnovážnu polohu (okolo ktorej kmitá).

Začneme so vzorcom pre periódu kmitov matematického kyvadla. Ak l je dĺžka špagátu a g gravitačné zrýchlenie, máme pre periódu kmitov takýto vzťah, zoznámte sa:

$$T = 2\pi\sqrt{l/g}\,. \tag{1}$$

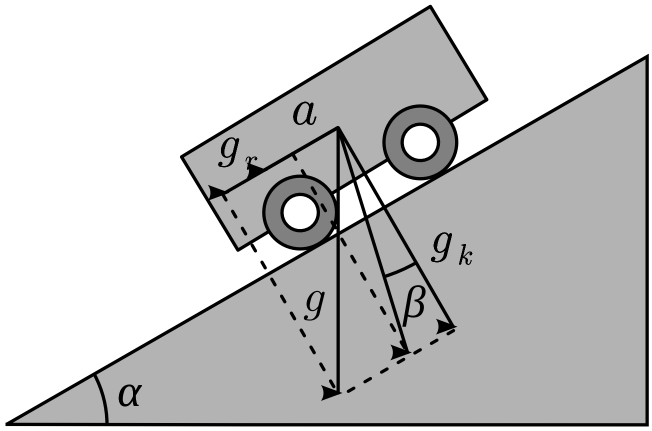
Tento vzťah má väčšiu silu ako by sa na prvý pohľad zdalo. Nikto nevraví, že za g musíte vždy dosadiť známu hodnotu pozemského g. Napríklad pre kyvadlo na Jupiteri by stačilo zobrať gravitačné zrýchlenie na Jupiteri g_J a dostali by sme tiež správny výsledok. Jediné, čo si musíme zapamätať je, že hodiny sú primitívny nástroj a nevedia, čo spôsobuje sily, ktoré ono cíti. Inými slovami, ak sa hodiny budú pohybovať (stále na Jupiteri) so zrýchlením a, hodiny vo svojej vzťažnej sústave budú cítiť okrem g_J aj zotrvačné zrýchlenie o veľkosti a v smere opačnom ako malo toto zrýchlenie. Zotrvačné zrýchlenie musíme s g_J zložiť (ale pozor, skladáme to ako vektory, teda žiadne jednoduché „plus" medzi veľkosti) a až tak dostaneme výsledné g'_J ktoré napcháme do brucha vzorcu (2).

Ilustrujme na príklade: Čo keď kyvadlo nechám padať voľným pádom (stále na Jupiteri)? Na kyvadlo pôsobí stále g_J v smere nadol, ktoré skutočne spôsobuje zrýchlenie g_J v smere nadol (čo by sa nestalo, keby hodiny boli položené na povrchu planéty). Zotrvačné zrýchlenie má teda veľkosť g_J v smere nahor. Preto ich zložením dostávame nulu a krásny stav beztiaže. Kto mi neverí nech vyskočí z okna (odporúčame z nie vyšieho ako prvého poschodia) a hneď pocíti stav beztiaže. Perióda kmitov kyvadla bude podľa vzorca nekonečná[9]. Naopak, ked vezmeme kyvadlo aj s vozíkom a necháme ho pohybovať sa rovnomerným priamočiarym pohybom, nemáme žiadne zotrvačné sily a teda ani žiadnu zmenu oproti situácii keď kyvadlo stojí. Len podotýkam že sme akurát vyriešili poslednú časť c). Skutočne, v tomto prípade sa vozík (po uplynutí dostatočne dlhého času) už pohybuje rovnomerne priamočiaro, perióda kmitov sa nemá dôvod líšiť od T a rovnovážna poloha od smeru „rovno nadol".

Podobným spôsobom vyriešime zvyšné dve podúlohy. Vždy pôjde o to isté: Zoberieme gravitačné zrýchlenie, pripočítame k nemu všetky zotrvačné zrýchlenia a dostaneme výsledné zrýchlenie, ktoré kyvadlo „cíti". Rovnovážna poloha bude samozrejme v smere výsledného zrýchlenia a periódu ľahko dostaneme zo vzorca 2. V časti a) nám teleso zrýchľuje presne tak ako diktuje zložka gravitačného zrýchlenia rovnobežná s podložkou (označme si jej veľkosť ako g_r). Táto spôsobuje zrýchlenie hodín g_r a v sústave spojenej s hodinami teda zotrvačné zrýchlenie

[9] menej učene: ani ho nehne

o veľkosti g_r avšak presne opačne orientované. Preto sa g_r, rovnako ako v prípade padajúcich hodín na Jupiteri „vybúši“ a nebude mať na kmitanie hodín žiadny vplyv (ani sme nemuseli presne poznať veľkosť g_r). Čo nám ostane z gravitačného zrýchlenia po zrušení zložky vodorovnej s podložkou? Samozrejme, zložka kolmá na podložku. Tá má veľkosť $g\cos(\alpha)$ a určuje periódu aj rovnovážnu polohu kmitov.



Obr. 2: Vozík na naklonenej rovine

Časť b) je to isté len v ružovom a s mierne škaredšou matematikou. Predpokladáme, že hodiny sa po rovine ozaj šúchajú a neostali stáť tam, kde sme ich položili. Najprv porátame zrýchlenie vozíka. Trecia sila má veľkosť $F_\mathrm{t} = Nf$, kde $N = F_g \cos\alpha$ je normálová zložka tiažovej sily a f je koeficient trenia zo zadania. Celková sila pôsobiaca na vozík v smere pohybu je:

$$F = mg\sin\alpha - F_\mathrm{t}$$

a zrýchlenie ktoré spôsobuje:

$$a = g(\sin\alpha - f\cos\alpha)\,.$$

V sústave hodín opäť vzniká adekvátne zotrvačné zrýchlenie, ktoré zase raz musíme zložiť s normálnym gravitačným zrýchlením. To spravíme najľahšie takto: Rozložíme gravitačné zrýchlenie na rovnobežnú a kolmú zložku (vzhľadom na naklonenú rovinu):

$$g_\mathrm{r} = g\sin\alpha\,, \qquad\qquad g_k = g\cos\alpha\,.$$

K zložke rovnobežnej s rovinou pripočítame efekt zotrvačného zrýchlenia:

$$g'_\mathrm{r} := g_\mathrm{r} - a = f\cos\alpha$$

a zase to zložíme dokopy:

$$g' = \sqrt{g'^2_\mathrm{r} + g^2_\mathrm{k}}$$

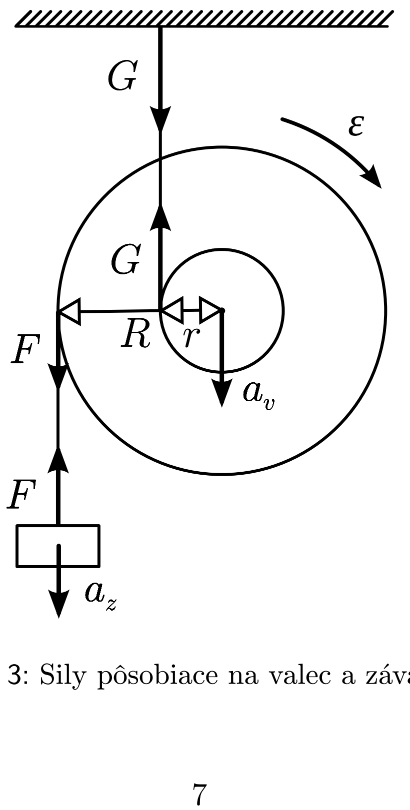
Smer rovnovážnej polohy je daný výslednicou g'_r a g_k. Pre uhol β nám teda triviálne platí $\tan\beta = g'_\mathrm{r}/g_\mathrm{k} = f$.

3.5 Úpadok (opravovala Katka, vzorák Tomáš)

S akým zrýchlením padá sústava na obrázku? Hmotnosť závažia je m, hmotnosť valca M, pričom moment zotrvačnosti valca je $1/2MR^2$. Polomer valca je R, vnútorné lano je namotané na menšom sústrednom valcovitom výčnelku s polomerom r, vonkajšie lano je namotané na valci samotnom a obidve laná sú dostatočne dlhé. Os valca je fixovaná tak, že môže len klesať, a otáčať sa okolo horizontálnej osi, nie však otáčať sa okolo vertikálnej osi. Celá sústava sa nachádza na zemi (teda v jej gravitačnom poli), odpor vzduchu zanedbaje.

Na základnej škole nás naučili riešiť sústavy rovníc. Okrem praktických zistení, ako napríklad že ani 3600 robotníkov nevykope jamu za jednu sekundu, by ste po absolvovaní základnej školy mali oplývať jednou životnou múdrosťou: Keď neviem aká je nejaká veličina veľká, môžem sa ešte vždy vyhovoriť na to, že má veľkosť x. Toto častokrát rieši problém priam až magicky. Ale veď, prejdime pomaly k príkladu: Aká je veľká sila pôsobiaca v lane ktoré spája závažie s valcom? Je to mg, $\frac{1}{2}mg$, $\left(m + \frac{1}{2}M\right)g$, či snáď 0? Ani jedno z uvedených? Áno, ani jedno z uvedených. Zástancovia teórie mg nech si prosím skúsia predstaviť teleso s hmotnosťou m padať voľným pádom a nech spytujú intuíciu do vienka im danú: naozaj treba teleso „nadľahčovať“ silou mg na to, aby padalo voľným pádom?

Správna odpoveď je, že sila v lane má veľkosť x. To nie je hanba, že neviete aká tá veľkosť je. Predbežné prieskumy na dostupnej štatistickej vzorke (spýtal som sa Marcelky a Tinky) ukazujú, že ani fyzikozdatní vedúci FKS sa za neznalosť tejto sily nehanbia. V tomto zmysle teda doriešime zvyšok úlohy: závažie padá so zrýchlením a_{z}, valec padá so zrýchlením a_{v}, pritom uhlovo rotuje s uhlovým zrýchlením ε a druhý zo špagátov je napínaný silou G. Aby sme sa rozumeli, tak urobíme dohodu, že kladné hodnoty zrýchlení interpretujeme tak, že telesá zrýchľujú nadol a kladné hodnoty ε tak, že valec sa roztáča v smere hodinových ručičiek. A aby nám to nekazilo morálku, tak silu v prvom špagáte prekrstíme na $F := x$. No a máme to.



Obr. 3: Sily pôsobiace na valec a závažie

Samozrejme, musia nám platiť akési zákony. Tak v prvom rade, niekoľko variácií na $F = ma$. Pre závažie:

$$ma_{\mathrm{z}} = mg - F\,.$$

Pre valec:

$$Ma_{\mathrm{v}} = Mg + F - G\,.$$

Ďalej, existuje rotačná obdoba $F = ma$ vo forme $P = \varepsilon I$ kde P je moment síl a I moment zotrvačnosti telesa. Zapíšeme toto vzhľadom na stred valca. Máme teda:

$$\varepsilon I = Gr - FR\,.$$

No a aby sme to zaklincovali úplne, tak tie rotačné a posuvné zrýchlenia musia spolu nejako súvisieť. Napríklad, nikto mi asi neuverí, že valec bude rotačne zrýchľovať a zároveň posuvne stáť, čo by znamenalo, že lano nebude dopnuté. Klasicky prevedieme uhlové zrýchlenie na obvodové:

$$\varepsilon r = a_{\mathrm{v}}$$

a keď si uvedomíme že vo vzťažnej sústave pohybujúcej sa spolu so stredom valca padá závažie so zrýchlením iba $a_{\mathrm{z}} - a_{\mathrm{v}}$ máme [10]:

$$\varepsilon R = -(a_{\mathrm{z}} - a_{\mathrm{v}})\,.$$

Hotovo. Všetko čo ostáva je doriešiť sústavu rovníc, a dostávame výsledkok v tvare:

$$a_{\mathrm{z}} = \frac{2g\big[Mr + m(r-R)\big](r-R)}{2m(r-R)^2 + M(2r^2 + R^2)}$$

$$a_{\mathrm{t}} = \frac{2gr\big[Mr + m(r-R)\big]}{2m(r-R)^2 + M(2r^2 + R^2)}\,.$$

Všimnime si, že pokiaľ $(M+m)r = mR$ vyjdú nám obe zrýchlenia nulové. Pokiaľ táto rovnosť splnená nebude, bude vždy jedno teleso upadať a druhé pôjde hore. V tomto je skrytá jedna hlboká múdrosť: na svete nikdy nie je taký úpadok ako sa to zdá starým rodičom. Rozdielnosť smerov pohybov telesa a závažia ste niektorí odhalili metódou pozriem – vidím, čo je fajn – tiež fajn je však vedieť, že pokiaľ túto úvahu nespravíme, smer pohybu prezradia znamienka. Etos vsio, hastala vista.

3.6 Pružina (opravoval Robo, vzorák Bzdušo)

Ak jeden koniec pružiny pripevníme o stenu a na druhý dáme závažie s hmotnosťou m, nameriame periódu kmitov sústavy T. Akú periódu nameriame, ak na jeden koniec pružiny dáme teleso s hmotnosťou m a na druhý koniec teleso s hmotnosťou $2m$? Gravitačné pôsobenie zeme a odpor vzduchu neuvažujte.

Táto úloha sa dala uchopiť viacerými spôsobmi. Ja ukážem, ako sa táto úloha dala vyriešiť len s minimálnymi znalosťami pomocou niekoľkých šikovných úvah. Odporúčam prečítať si vzorové riešenie bez ohľadu na to, či sa vám jej podarilo zhostiť (ne)úspešne. Pripútajte sa prosím! Predstavenie ľudského myslenie sa práve začína.

[10] Bacha na znamienka: kladné hodnoty ε znamenajú stúpanie závažia vzhľadom na valec

Aká je perióda T? Niekto vzťah pre periódu pružinového oscilátora pozná. Niekto iný si ho vie nájsť v tabuľkách. Kto nemá v pätách, má v hlave a vie si ho šikovne odvodiť *rozmerovou analýzou.*

Najprv však stručne o pružinách. Z hrátok so silomermi vieme, že sila potrebná na natiahnutie pružiny je priamo úmerná tomuto predĺženiu. Konštantu úmernosti si označme ako k.[11] Ak na pružinu zavesíme závažie m, predĺži sa o mg/k, aby súčet síl pôsobiacich na závažie bol nulový. Ak je teleso z tejto polohy vychýlené o nejaké x, bude naň v danom okamihu pôsobiť výsledná sila $F = -kx$ a teleso bude mať okamžité zrýchlenie

$$a = -\frac{k}{m}x\,.$$

Pri daných počiatočných podmienkach táto rovnica zrejme určuje celý následný pohyb závažia. Všimnime si, že ako parametre v nej vystupujú k a m *a už nič iné.* To znamená, že m a k musia jednoznačne určovať periódu pohybu!

Avšak pozor! Perióda sa počíta v sekundách. Preto správny vzťah pre periódu musí mať tvar

$$T = C \cdot m^{\alpha} \cdot k^{\beta}\,,$$

kde exponenty nad m a k musia byť také, aby jednotkou súčinu bola sekunda a kde C je bezrozmerná konštanta úmernosti. Ak sa nestaráme o čísla, ale len o jednotky, tak má platiť

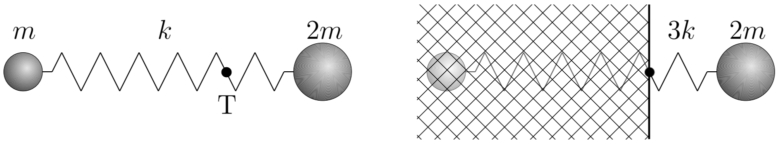
$$1\mathrm{s} = 1(\mathrm{kg})^{\alpha} \cdot (\mathrm{kg\,s^{-2}})^{\beta}\,.$$

Úloha má jediné riešenie $\alpha = \frac{1}{2}$ a $\beta = -\frac{1}{2}$, takže pre periódu *musí platiť*

$$T = C\sqrt{m/k}\,. \tag{2}$$

O čísle C nevieme povedať nič.[12]

Od periódy T k riešeniu Dynamika dvoch závaží spojených pružinov je komplikovanejšia. Šikovnou úvahou ju však dokážeme previesť na situáciu popísanú v predošlej časti. Najprv si premyslite, že ťažisko sústavy sa počas kmitania závaží nehýbe. Odporovalo by to zákonu zachovania hybnosti.[13] Toto ťažisko sa pre zadané hmotnosti závaží m a $2m$ nachádza v tretine dĺžky pružiny (ľavý obrázok).



Obr. 4: Ťažisko pružiny

[11]Na predĺženie o Δ teda treba pôsobiť silou $k\Delta$. Všimnite si, že čím je k väčšie, tým „tuhšia“ je pružina, pretože na jej natiahnutie potrebujeme väčšiu silu. Skúste si tiež overiť, že jednotkou k je $\mathrm{kg\,s^{-2}}$.

[12]V skutočnosti $C = 2\pi$, čo sa ale takto jednoducho odvodiť nedá. Ako sa však ukáže, riešenie úlohy na hodnote C nezávisí, čiže sa tým nemusíme trápiť.

[13]Ťažisko sa v skutočnosti môže pohybovať rovnomerným priamočiarym pohybom. V tom prípade stačí zmeniť vzťažnú sústavu a všetko je opäť ok.

No ejže ho ľaľa! Veď keď ťažisko stojí, môžem pružinu na danom mieste pevne zafixovať. Stáť bude aj naďalej. Perióda pohybu sa tým nezmení. Pevné fixovanie však znamená rozdeliť nekonečne ťažkou stenou pôvodnú situáciu na dve jednoduchšie – závažie na pružine, ktorá je uchytená k stene. Periódu kmitov takejto sústave sme už určili vzťahom (2). Stačí dosadiť za hmotnosť a…

Počkať! Aká je tuhosť tretiny pružiny? To nie je ťažká otázka. Pôvodnú pružinu si možno predstaviť ako tri takéto pružiny za sebou. Ak sila F natiahla celú pružinu o Δ, tretinu pružiny natiahla len o $\frac{1}{3}\Delta$. To znamená trikrát väčšiu tuhosť, teda $3k$.

Teraz nám už nič nebráni dosadiť do (2). Hľadaná perióda je

$$T_2 = C\sqrt{\tfrac{2}{3}m/k} = T\sqrt{\tfrac{2}{3}}\,.$$

Domáca úloha: Skúste si sami odvodiť všeobecnejší výsledok, že ak na konce pružín umiestnime závažia s hmotnosťami m_1 a m_2, perióda kmitov bude

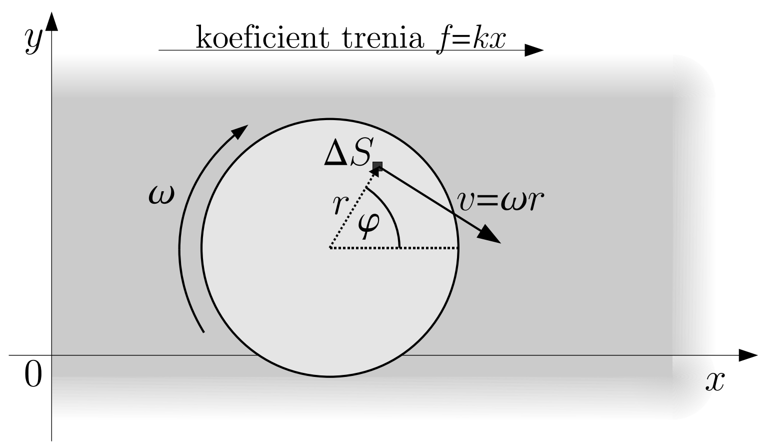
$$T^* = C\sqrt{\mu/k}\,, \qquad \text{kde} \quad \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

je takzvaná *redukovaná hmotnosť*. Do skakavenia, priatelia!

3.7 Pohár (opravoval Bzdušo)

Pohár položíme na zvláštnu podložku. Podložka je zvláštna tým, že čím ďalej, tým je drsnejšia – formálne, koeficient trenia medzi podložkou a pohárom v bode $[x, y]$ je rovný kx kde k je konštanta. Aká výsledná sila bude na pohár pôsobiť, keď ho na podložke roztočíme? Môžte predpokladať, že pohár má kruhovú podstavu, ktorou na podložku tlačí rovnomerne.

Hmlisto? To tak! Žiadne dadaistické úvahy o záporných x tu nemali miesto. Záporný koeficient trenia sa totiž určite nepáči nielen zákonu zachovania energie, ale ani zdravému rozumu. Stôl zrejme existuje len pre $x > 0$. Začal by som veľkým obrázkom, aby sme sa dohodli na všemožných smeroch a označeniach.



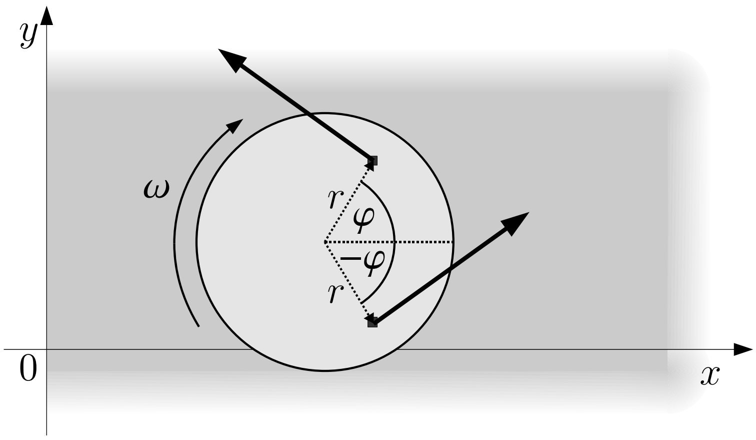
Obr. 5: Označenia veličín

Čo tam je a prečo to tam je? V obrázku som si zvolil smer uhlovej rýchlosti ω v smere hodinových ručičiek.[14] Ďalej, dno pohára som si rozsekal na spústu malých plôšok s obsahom ΔS, ktorých polohu opisujem polárnymi súradnicami (r, φ).

Prečo som ju rozsekal? Všimnime si, že rýchlosť $v = \omega r$ má v rôznych miestach rôzny smer. To ale znamená, že aj trecia sila bude pod každým miestom pôsobiť trochu iným smerom. Ak však uvažujeme veľmi malú plôšku ΔS, všetky *jej* body sa už pohybujú prakticky rovnako a aj trecie sily pod nimi sú prakticky rovnobežné, takže sa skladajú veľmi jednoducho – súčtom.

Napokon, hmotnosť pohára označme m, jeho polomer R a tiažové zrýchlenie klasicky g. Ako sa ukáže, na polohe pohára (x_0, y_0) hľadaná sila nezávisí. Držiac sa zadania budeme predpokladať, že tlak pohára na podložku je rozdelený rovnomerne[15], pre jeho hodnotu zjavne platí $p = mg/(\pi R^2)$.

Smer výslednej sily: Dno pohára sme rozsekali na malé kúsky. Na každý z nich pôsobí podložka nahor normálovou silou $\Delta F_N = p\Delta S$ a proti jeho pohybu trecou silou $\Delta F_T = (kx) \cdot p\Delta S$. Vezmime si symetrické, rovnako veľké kúsky so súradnicami (r, φ) a $(r, -\varphi)$. Keďže majú rovnaké hodnoty x a ΔS, na ne pôsobiace trecie sily sú rovnako veľké. A čo ich smer?



Obr. 6: Smery síl

Z obrázka vidno, že ich smery sa odchyľujú od osi y o uhol φ, resp. $-\varphi$. Ich súčet má teda smer osi y. To je pekné. Krásu tohoto zistenia však precítime až po pochopení, že *ku každej plôške existuje symetrická plôška, ktorých trecie sily sa v súčte zložia do y-ového smeru!* Keďže z takýchto dvojíc sa dá vyskladať celá plocha, aj výsledná sila má smer osi y.[16] Ľahko

[14] Zrkadlením celej situácie okolo osi x možno dostať situáciu pre otáčanie proti smeru hodinových ručičiek.

[15] Poznámka pre drsňákov: Striktne vzaté, na určenie výslednej sily by nám stačila omnoho slabšia podmienka, že tlak na podložku je ľubovoľnou funkciou $p(r, \varphi)$ párnou vo φ. Tá je z dôvodu nulovosti momentov síl okolo osí x a y principiálne uspokojivo splnená pre $k \ll 1/R$. Silnejšia podmienka navyše predpokladá pevný pohár na mäkšej podložke.

[16] Myšlienky v predošlých vetách sa dajú matematicky zhrnúť takto: Výslednú treciu silu možno zapísať ako súčet cez všetky plôšky ΔS ako $\boldsymbol{F}_\mathrm{T} = \sum_{\{\Delta S\}} \Delta \boldsymbol{F}_\mathrm{T}$. Zistili sme, že *vhodným usporiadaním* členov vnútri sumy dostaname vedľa seba dvojice, ktoré sa zakaždým sčítajú do osi y. Sčítaním cez všetky dvojice dostávame automaticky aj výslednú silu v smere osi y.

sa môžeme presvedčiť, že dokonca v *kladnom smere osi y*, pretože koeficient trenia pre pravú polovicu dna (kde sa sily vyscítajú v kladnom smere) je väčší než pre ľavú polovicu dna (kde sa sily vyscítajú v zápornom smere).

Veľkosť výslednej sily: Tu si už s peknými obrázkami nevystačíme. Veľkosť treba kruto spočítať. Ak využijeme fakt, že sily sa vyscítajú do smeru osi y, stačí pri hľadaní veľkosti sily zrátavať len y-ové zložky trecích síl. V duchu poznámky pod čiarou môžeme zapísať

$$\begin{aligned} F_\mathrm{T} &= \sum_{\{\Delta S\}} (kx)p\,\Delta S\cos\varphi \\ &= kp\sum_{\{\Delta S\}} (x_0\cos\varphi + r\cos^2\varphi)\Delta S\,, \end{aligned}$$

kde sme rozpísali $x = (x_0 + r\cos\varphi)$ a konštanty vybrali pred sumu. Všimnime si, že sumovanie cez prvý člen zodpovedá situácii, kedy by pod celým pohárom bolo rovnako veľké trenie. V tejto situácii by stred pohára zostal na mieste, takže sumovaním prvého člena určite dostaneme nulu.[17] Problém sa teda redukuje na

$$F_\mathrm{T} = kp\sum_{\{\Delta S\}} r\cos^2\varphi\Delta S\,.$$

Suma cez nekonečne malé kúsky je vlastne integrál. Stačí zameniť všetky Δ za formálne d, nájsť vzťah pre malú plôšku $\mathrm{d}S = r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi$ a zamyslieť sa nad medzami sčítavania (integrovania). Potom môžeme ten istý vzťah zapísať *úplne ekvivalentne* ako

$$\begin{aligned} F_\mathrm{T} &= kp\int_S r^2\cos^2\varphi\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi \\ &= kp\underbrace{\int_0^{2\pi}\cos^2\varphi\,\mathrm{d}\varphi}_{\pi}\;\underbrace{\int_0^R r^2\,\mathrm{d}r}_{\frac{1}{3}R^3} \\ &= \tfrac{1}{3}kp\,\pi R^3\,. \end{aligned}$$

Hodnota prvého integrálu sa dá nájsť nasledujúcou úvahou: Pri daných medziach $(0, 2\pi)$ zrejme $\int\sin^2 t\,\mathrm{d}t = \int\cos^2 t\,\mathrm{d}t = I$. Lenže ich súčet je integrálom jednotky cez celý interval, tj. $2I = 2\pi$. Druhý integrál sa, žiaľ, žiadnym trikom spočítať nedá a na jeho vypočítanie treba mať aspoň základné poznatky z integrálneho počtu.

Ak ešte dosadíme za tlak p, dostávame konečný výsledok

$$F_\mathrm{T} = \tfrac{1}{3}kmgR\,.$$

[17] Iný argument využíva párovanie kúskov symetrických podľa osi y.