Fyzikálny korešpondenčný seminár
26. ročník, 2010/2011
FKS, KTFDF FMFI UK, Mlynská dolina, 84248 Bratislava
e-mail: otazky@fks.sk web: http://fks.sk

Vzorové riešenia 3. kola letnej časti 2010/2011

3.1 xkcd.com/852 (opravoval Petrik)

V roku 2016 sa uskutočnia olympijské hry v Brazílskom Rio de Janeiro. Vypočítajte výšku, ktorú by mal skočiť skokan o tyči, aby objektívne prekonal súčasný svetový rekord. Pri výpočte uvážte vplyv rotácie Zeme na veľkosť tiažového zrýchlenia v rôznych častiach sveta.

Ako už zadanie naznačilo, pod slovom „objektívny" rozumieme započítanie vplyvu odstredivej sily (čo si riešiteľ mal domyslieť z výrazu „vplyv rotácie Zeme") na výskok. Ako si možno predstaviť taký výskok? Skokan má nejakú (objektívnu) „doprednú" rýchlosť na počiatku výskoku, ktorú po zapichnutí palice do zeme (pre zvedavcov, jej dĺžka je 5,3 metra) usmerní smerom nahor. Takže za objektívnu možno považovať výskokovú zložku rýchlosti v smere nahor. Dosiahnutá výška h závisí od zvislej rýchlosti v jednoducho podľa známeho vzťahu ako $\frac{1}{2}v^2/g$. V objektívnom prípade by rovnaká rýchlosť mala dať rovnakú výšku:

$$gh = \text{objektívna veličina}\,.$$

No a čo je vlastne to g? V tomto čísle je zahrnutá nielen štandardná hodnota gravitačného zrýchlenia, ale aj vplyv rotácie zeme. Zo školy vieme, že odstredivá sila sa počíta ako

$$F_\mathrm{o} = m\omega^2 R\cos\theta\,,$$

kde R je polomer Zeme (6 400 km) a θ zemepisná šírka. Teda odstredivé zrýchlenie bude jednoducho $a_\mathrm{o} = \omega^2 R\cos\theta$. Ale pozor! Odstredivá sila nemieri vždy kolmo od povrchu. Nás však zaujíma len tá jej zložka, ktorá túto vlastnosť má, čiže $a_0\cos\theta$ (nakreslite si to!). Takže naše tiažové zrýchlenie je vlastne gravitačné „odľahčené" o odstredivé,

$$g = g_0 - \omega^2 R\cos^2\theta\ .$$

Už pred viac ako pätnástimi rokmi skočil sovietsky-neskôr-ukrajinský frajer Serjôža Bubka do výšky $h_1 = 6{,}14$ metra.[1] Podarilo sa mu to v talianskom Sestriere, ktoré sa nachádza na zem. šírke $\theta_1 \approx 45\,°$. Ak má byť rekord prekonaný, pre novú výšku h_2 musí platiť

$$(g_0 - \omega^2 R\cos^2\theta_2)h_2 \geq (g_0 - \omega^2 R\cos^2\theta_1)h_1\,,$$

kde $\theta_2 \approx 23\,°$ je zem. šírka Ria de Janeiro. Za g_0 dosádzame notoricky známych $9,8\,\mathrm{m{,}s^{-2}}$, $\omega = \frac{2\pi}{T}$, kde $T \approx 86\,000\,\mathrm{s}$ je dĺžka hviezdneho dňa (doba otočenia o $360\,°$). Po napchaní všetkých údajov do rovnice vychádza

$$h_2 \geq 6,1475\,\mathrm{m}\ .$$

[1] Prvýkrát pokoril svetový rekord v máji 1984 výskokom 5,85 m v Bratislave.

Seminár podporujú:

Vidíme, že zobjektívnenie priťaží skokanom v Riu iba *o neceleho trištvrte centimetra*, čo je vzhľadom na to, že výška sa meria[2] po centimetroch, vcelku zanedbateľné. No a čo všetko sme pri našich výpočtoch nezobrali do úvahy? Napríklad závislosť gravitačnej zložky tiažového zrýchlenia od polohy na Zemi – tá je ovplyvnená samotnou nadmorskou výškou[3], ale napr. aj geologickým zložením pod povrchom. Na druhej strane, veľké nadmorské výšky v dôsledku riedkeho vzduchu zhoršujú dýchania, a takto tiež vplývajú na výkon športovca. Zahrnutie týchto aspektov do výpočtov sme však naozaj od nikoho (ani od nás) nevyžadovali.

3.2 O rúbaní dreva (vzorák Jakub)

Minulé leto som mal možnosť pozorovať skoro-profíka pri rúbaní dreva na táborák. Zaujala ma jeho základná technika pri rúbaní masívnych špalíkov: Najprv zaťal sekeru do špalíka tak, aby sa v ňom zasekla a držala spolu s ním. Potom špalík sekerou zdvihol, obrátil to celé hore nohami a trepol tupou stranou sekery (ostrá bola zaťatá do špalíka) do pňa, na ktorom rúbal. Kedy sa rúbajúcemu opláca táto metóda a kedy je výhodnejšie mať špalík dolu a sekeru hore?

Tak toto bola brnkačka. Skutočne, nie je v tom žiadna ozajstná ťažkosť, pokiaľ človek zvolí vhodný jednoduchý fyzikálny model popisujúci túto úlohu. Ten sa pritom ponúka sám. Nech má drevorubcova sekera hmotnosť m a rúbaný špalík dreva M. Ďalej nech tieto držia pokope až do dopadu na peň. Doterajšie predpoklady boli takpovediac „neškodné". Teraz však vytasíme, že náraz prvého predmetu na peň modelujeme dokonale nepružnou zrážkou tuhého telesa – to tak v skutočnosti síce nie je, ale je to rozumne blízko pravde.[4]

Pri možnosti *špalík hore a sekera dole* absorbuje kinetickú energiu sekery peň na rúbanie (t.j. vyjde navnivoč, pokiaľ len rozbíjanie pňa nepokladáme za užitočné) a kinetická energia špalíka sa absorbuje nárazom do už stojacej sekery – okrem iného pri deštrukčnej činnosti ostria. Túto absorbovanú energiu nazvem užitočnou prácou, aj keď je nejasné, koľko z nej ide naozaj na samotnú nepružnú deformáciu (zrejme ostrie lepšie a tenšia hlava sekery sekajú lepšie ako čosi tupé). Účinnosť pri tomto spôsobe je teda $M/(M+m)$. Pri druhej možnosti *špalík dole a sekera hore* to v našom jednoduchom modelíku vyjde $m/(M+m)$. Odtiaľ okamžite vidíme, že to, čo je ťažšie, treba dať ako príklep hore. V reáli to chce trochu cviku, lebo takéto usporiadanie je nestabilné voči preklopeniu. Avšak po zvládnutí tejto techniky sa rúbanie veľkých kusov dreva značne uľahčí. Malé špalíky zhruba do hmotnosti sekery odporúča FKS naďalej rúbať so sekerou hore. :-)

3.3 Partizán v dave (opravovala Tinka)

Katka dostala na narodeniny dvanásť odporov. Jedenásť z nich má odpor jeden ohm, dvanásty je však dvakrát odpornejší. Navrhnite spôsob, ktorým na čo najmenej zapojení určíte, o ktorý odpor sa jedná.

[2]Výška sa nemeria, lež vodorovná tyč sa nastaví na konkrétnu výšku a čaká sa, či ju skokan pri skoku zhodí alebo nie.

[3]Závislosť sa dá aproximovať vzťahom $1/r^2$, ktorý nezohľadňuje hmotu nad úrovňou morskej hladiny. Napríklad pre také Mexico City, ktoré hostilo Olympiádu v roku 1968 a ktoré sa nachádza vo výške tri a pol kilometra, by sme odhadli

$$h_2 \geq \frac{g_1}{g_2} h_1 = \frac{(R+H)^2}{R^2} h_1 = 6,1467\,\mathrm{m}\ ,$$

čo je porovnateľný rozdiel, ako pri uvažovaní odstredivej sily.

[4]Skúste si niekedy na chalupe, či pri táboráku, pustiť sekeru (a tiež špalík, samostatne) z výšky 0,5 m na peň a pozrite sa, koľko vyskočí po „odraze". Nebude to veru veľa.

K dispozícii máte len spomenutých dvanásť neznámych odporov, známy ideálny zdroj napätia, jeden ampérmeter a množstvo ideálnych vodičov.

Tento vzorák je veľmi dlhý. Nie je však nutné ho čítať celý – totiž, čo odstavec, to viac-menej samostatný myšlienkový celok ukazujúci rôzne dobré možnosti a aspekty riešenia.

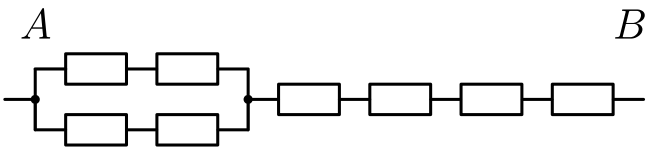
Ujasnime si najprv pre istotu, čo dokážeme povolenou aparatúrou vlastne zistiť. Keď máme zapojený obvod z rezistorov a potom ampérmeter, poznáme prúd pretekajúci obvodom a aj napätie v obvode – toto nám zabezpečuje to, že máme *známy ideálny* zdroj *napätia*. Vďaka Ohmovmu zákonu potom vieme spočítať aj celkový odpor zapojenia.[5] Pre účely tohoto vzoráku sa však obmedzme na otázku, odpor koľkých zapojení potrebujeme poznať, aby sme naisto vedeli, kde je partizán. Ako uvidíme, na zaručene správnu odpoveď to bude stačiť.

Tak sa poďme hrať. Skúšať to na viac ako dvanásť pokusov je zjavná hlúposť. To už rovno môžeme zmerať každý odpor samostatne. Komu by tu nenapadlo jednoduché zlepšenie, toho zbijem. O poslednom meranom rezistore predsa viem, aký musí mať odpor – buď som už partizána objavila predtým, alebo boli všetci čistí a teda toto je ten zradca. Takže jedenásť stačí.

Čo to dá, ak si povolíme zapájať naraz viacero rezistorov, ale iba sériovo? Informatickejšie ladeným jedincom by teraz mohlo napadnúť binárne vyhľadávanie. Zapojme si polovicu rezistorov. Ak výsledný odpor bude $7\,\Omega$, tak partizán je v tejto šestici, ak $6\,\Omega$, tak v tej druhej. Podobne preskúmame polovicu podozrivej šestice a tak ďalej. Tí, čo sa nad týmto vzorákom aspoň trocha zamýšľajú, si ľahko spočítajú, že v najhoršom prípade budeme potrebovať štyri zapojenia. Že to iba sériovými zapojeniami lepšie nepôjde je hádam celkom vidno.

Pritvrďme. Čo keď povolíme aj paralelné zapojenie[6]? Tu sa nám to podarí skresať na krásne dve zapojenia. Väčšina z vás bola s týmto výsledkom výsostne spokojná. Skúsim to ukázať s čo najmenej počtami, v hnusnosti schém ste sa vy priam pretekali.

Pozrime sa na schému:

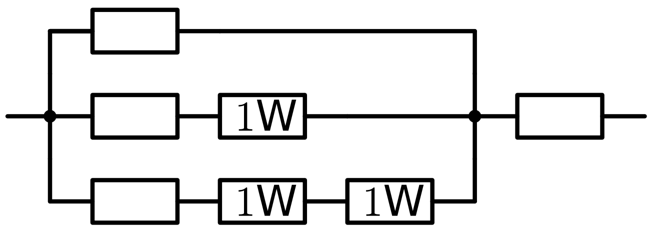


Obr. 1: Odporná húsenica

Čo na jej základe vieme zistiť? Ak sa partizán nachádza v časti A, tak výsledný odpor je $26/5\Omega$, ak v časti B, tak to bude 6Ω a ak je medzi nepoužitými rezistormi, tak 5Ω. Takto sme teda zistili, v ktorej štvorici je partizán. No to som si teda pomohla, začnú sa mi smiať ľudia, čo si túto úlohu najprv skúšali pre malé počty. Pre štyri to predsa nejde na jeden pokus. No, áno, nejde. Lenže my sme nezistili len to, kde cca. je partizán, ale o ôsmich rezistoroch vieme, že sú jednoohmové. To patrične využijeme. Napríklad takto:

[5] Toto nie je jediná možnosť, čo s tým robiť, ampérmeter sa dá umiestniť aj doprostred schémy!

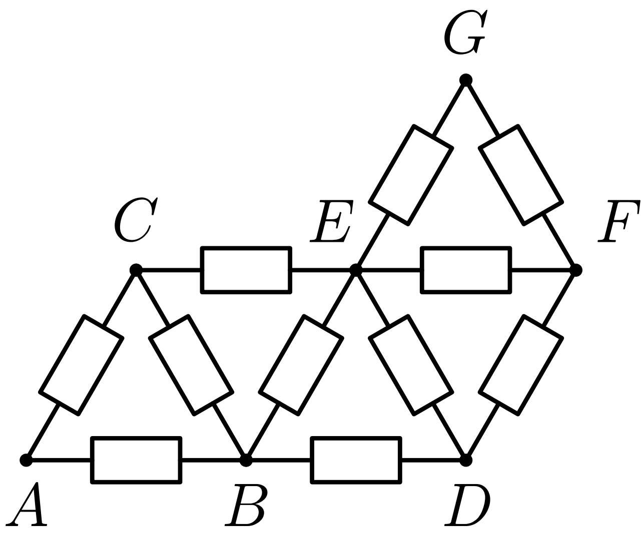
[6] Iba paralelné zapojenie nám nepomôže – je rovnako naprd ako čisté sériové.



Obr. 2: Ďalšia odpornosť

Na domácu úlohu si spočítajte, že naozaj to vždy vyjde inak. Výborne. A lepšie to týmito prostriedkami nepôjde? Po skúsenostiach s čisto sériovými zapojeniami vidíme, že potrebujeme použiť nejaké paralelné zapojenie. V ňom ale nesmú byť dva rezistory zapojené do série – boli by totiž navzájom nerozoznateľné. Lenže paralelné zapojenie jednoduchých rezistorov spôsobí, že vetvy môžeme vymeniť bez zmeny výsledku. Takže na jedno to nepôjde.

Ako ste si už mohli vyskúšať v predošlej sérií, existujú aj zapojenia, ktoré sú ešte iné[7]. Pomôžu nám? Poďme si kresliť. Majme bod A ktorý je napojený na jeden pól zdroja. Aby tam nejaký rezistor bol, tak ho zapojme medzi A a nový bod B. Čo teraz? Bod A musí byť spojený ešte s niečim. Potrebujeme totiž ďalšie rezistory a inak by sme zapojili za B rezistor a tie dva by boli v sérii, čo je zle. Tak to dokreslime, rezistor z A do C. Aby tieto neboli len tak paralelne, tak potrebujeme spojiť B a C. Aj z B aj z C potrebujeme ešte ďalšie spojenia, inak by rezistory AB a BC resp. AC a BC boli v sérii, a to nechceme. Takto nám vznikol taký trojuholník. Celkom sympaťák, taký minimalista a pritom bráni tým zlým veciam. Ak takto trojuholníkovo budeme pokračovať majúc na pamäti zhubnosť symetrie, tak dostaneme:

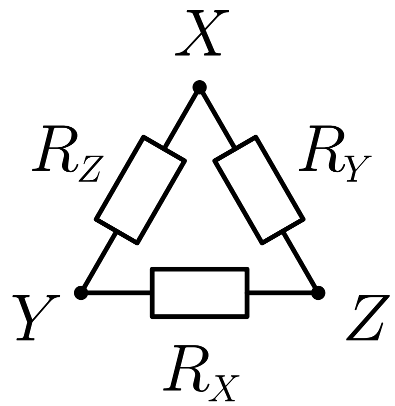


Obr. 3: Množstvo trojuholníčkov

Prezradím vám, že naozaj, nech je partizán kdekoľvek, tak výsledok je vždy iný.

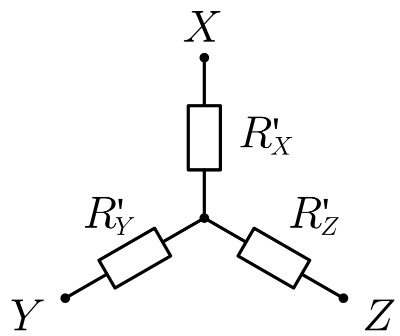
[7]Niektorí ste na toto medzičasom akoby zabudli. „Dokázali“ ste, pomocou úvahy kúsok vyššie, že to nijako nepôjde na jeden pokus ...

A ako to preboha počítať? Možnosť pre samovrahov je použiť Kirhoffove zákony, prípadne uzlové potenciály. Veľa šťastia, ak to budete počítať ručne, prezraďte mi potom, ako to tam vyzerá. Už vzorák z predchádzjúcej série spomínal transfiguráciu „hviezda-trojuholník“. Tak si povedzme, ako to chce fungovať. Majme tri body, napríklad X, Y, Z



Obr. 4: Trojuholníček

zapojené do trojuholníka. Zabaľme to teraz celé do čiernej skrinky z ktorej trčia len naše vývody. Jediné, čo vieme zvonku zistiť je, aké sú odpory medzi dvojicami vývodov, čo presne je dnu nás zaujímať nemusí. My by sme teraz chceli, aby to vnútri vyzeralo ako hviezda, ale pritom sa to správalo rovnako ako trojuholník.



Obr. 5: Hviezdička

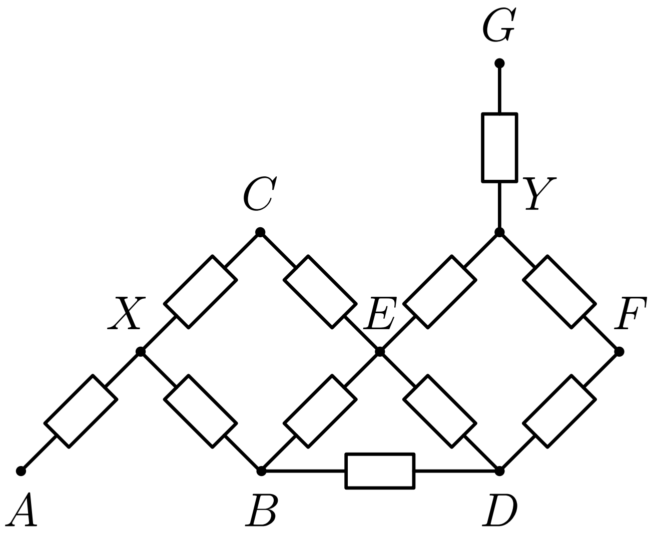
Napríklad odpor medzi X a Y v trojuholníku musí byť taký istý ako v hviezde, a teda

$$\left(\frac{1}{R_z}+\frac{1}{R_x+R_y}\right)^{-1}=R'_x+R'_y\ .$$

Takto dostaneme tri rovnice (pre každú dvojicu bodov jednu), z ktorých dostaneme, že napríklad

$$R'_x=\frac{R_yR_z}{R_x+R_y+R_z}\ .$$

Pomocou tejto transformácie prekreslíme našu schému na niečo jednoduchšie. Začnime napríklad trojuholníkom ABC a EFG. Ako to vyzerá (tvarovo) vidíme na obrázku:



Obr. 6: Trojuholníky a naoko štvoruholníky

Tam spravíme to isté s trojuholníkmi BEX a DEY, ktoré sú štvoruholníkami len naoko a dostaneme krásne sériovo-paralelné zapojenie. S trochou Excelu alebo niečoho podobného to ani veľmi nebolí. Numerické výsledky[8] zaokrúhlené na tri desatinné miesta rôznych polôh partizána si zvedavci kontrolujúci svoje doriešenie môžu pozrieť:

mimo	AB	AC	BC	BD	BE	CE	DE	DF	EF	EG	FG
1.451	1.658	1.608	1.455	1.505	1.520	1.560	1.453	1.488	1.473	1.704	1.573

Na menej ako jedno to už naozaj nemôže ísť. Ak nie sme inžinieri. Tí by si jednoducho pozreli prúžky na svojich súčiastkach. ;)

3.4 Bez trenia[9] (opravovali JanoHa a Sveťa, vzorák JanoHa)

Stojíte na rovnej dlážke vo vákuu s nulovým trením. Dokážete sa premiestniť o tri metre vľavo? Boli by ste sa schopní otočiť o stoosemdesiat stupňov okolo svojej osi?

Sme na rovnej a dokonale hladkej podlahe vo vákuu. Ako už komix naznačil, život v tejto ideálnej zjednodušenej fyzike nie je jednoduchý. Vákuum okrem nehostinnosti pre ľudské telo prináša do fyziky typické zanedbanie odporu prostredia – vzduchu. Hladká plocha dokonale naleštenej dlážky vylučuje trenie so zvyškom prostredia, konkrétne trecie sily rovnobežné s povrchom. Jediné, čo nám ostalo, je gravitácia a sila od podlahy, ktorá nám bráni cez ňu prepadnúť. V takejto situácií na človeka teda pôsobia jedine zvislé sily, ktoré sa pri státí navzájom kompenzujú.

Absencia horizontálnych síl sa prejaví cez *zákon zachovania hybnosti* v horizontálnom smere. Naša celková horizontálna hybnosť sa nemá ako zmeniť, zachováva sa nulová. Takže aj naše ťažisko nutne nemôže konať pohyb vo vodorovnom smere.[10] Pritom sa rôzne naše časti môžu

[8] Získané metódou uzlových potenciálov.
[9] `http://xkcd.com/669`
[10] Skákať dohora a drepovať môžeme do omdletia.

hýbať! Uvedieme dva príklady dovoleného vodorovného pohybu. Prvý je, že sa skúsime nakloniť dopredu. Skúsenosť s hladkým povrchom (napr. ľadom) nám intuitívne napovie, že padneme na hubu, ale zostaneme na mieste. Hlava sa nám síce pohla želaným smerom, avšak nohy cúvli opačným. Takto sa nikam nedostaneme. Iným príkladom je pokúsiť sa o „raketový pohon“, teda niečo zo seba (plyny, sliny, odev, ruku, ...) vyhodíme nejakým smerom. Zbytok dostane opačnú hybnosť (aby spoločné ťažisko ostalo stáť). V tomto prípade však nedorazíme o vytúžené tri metre takpovediac kompletní a už vôbec tam nebudeme schopní zastaviť (iba žeby sme mali šnúrku vhodnej dĺžky, ktorá by vrhnutú časť vo vhodnom momente zastavila).

Absencia horizontálnych síl však zabezpečí aj *zachovanie momentu hybnosti* v zvislom smere.[11] To sa dá voľne povedať tak, že voči šmykľavej dlážke sa neviem zaprieť a teda ani roztočiť. Ale viem (roz)točiť nejakú svoju časť voči zbytku. Keby som napr. mal nad hlavou koleso od bicykla uložené horizontálne, tak ho roztočím jedným smerom, ja sa nutne roztočím pri tomto úkone smerom opačným. Vo vhodnom okamihu, keď som požadovane otočený, koleso zastavím. Toto sa dá robiť svojím spôsobom aj len ľudským telom, napr. začnem s pripaženými rukami, tie vystriem do strán (upažím), otáčam ich doprava (pritom sa mi zvyšok tela otočí o čosi vľavo), potom opäť pripažím a otočím späť doľava – využívam pritom to, že vystreté ich otáčam po väčšom oblúku ako pripažené.[12] Skúste si to na dobre otáčateľnej kancelárskej stoličke! Podobný systém otáčania využíva napr. Hubblov vesmírny teleskop, ktorý sa natáča za hviezdami tak, že otáča akési disky.[13]

Poučenie: Ak neuvažujeme odrazy od stien, kúzelník v klobúku neschová hybnosť, lebo by to znamenalo hybnosť ťažiska klobúka (a to by sme si po čase všimli). Môže doň však schovať moment hybnosti tak, že sa v ňom budú dve veci točiť opačne. Pozor na kúzelníkov!

3.5 Kubova sprcha (opravoval Bzdušo)

Kubo má doma zásobník teplej vody o objeme V nastavený na teplotu T_3. Sprchuje sa vodou teploty T_2 (tú si dôkladne namixuje z červeného a modrého kohútika v sprche) pri konštantnom objemovom prietoku Q. Zásobník je vždy plný – akýkoľvek odber vody znamená okamžité dopustenie studenej vody teploty T_1, ktorá sa dokonale premiešava s vodou už prítomnou v zásobníku. Akonáhle teplota v zásobníku klesne pod T_3, zapne sa kotol, ktorý kúri efektívnym výkonom P. Ako najdlhšie sa dokáže Kubo sprchovať za uvedených podmienok? Uvažujte hustotu vody ρ a mernú tepelnú kapacitu c.

Pre prehľadnosť som situáciu zo zadania zobrazil v obrázku napravo. Všimnime si, že vedúci k nám boli natoľko zhovievaví, že $T_1 < T_2 < T_3$. Vo vzoráku ukážem dva spôsoby, ako sa dalo prísť k správnemu výsledku. Prvý z nich má jasnú pointu, ale vedie cez pomerne komplikované výpočty.[14] Druhý postup všetky škaredé rovnice obíde a celú úlohu vyrieši priam zázračne veľmi elegantným trikom.

[11] Vektor momentu zvislej sily je horizontálny, preto moment hybnosti v horizontálnom smere je dovolené meniť.

[12] Keby ruky mali rovnakú uhlovú rýchlosť pri otáčaní doprava i doľava, bude aj čas otáčania rovnaký, kvôli rozdielnemu ramenu otáčania však moment hybnosti rúk bude pri ceste späť menší a teda uhlová rýchlosť otáčania tela (majúca práve opačný moment hybnosti ako ruky) bude nutne menšia.

[13] Kmeň domorodcov Horehronského pralesa tento jav pomenoval: „Veci sa občas zvrtnú.“

[14] Špeciálne si vyžaduje úvahy o zmenách fyzikálnych veličín za nekonečne krátky časový interval Δt.

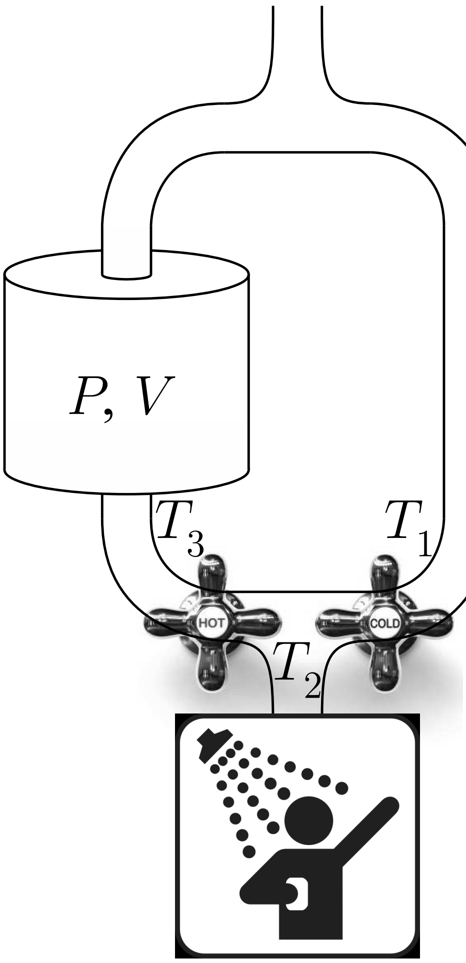
Prvý postup: Ako som varoval v úvodnom odstavci, tento postup je po matematickej stránke náročnejší. Začneme určením prietokov teplej a studenej vody potrebných na namiešanie vody s teplotou T_2. To je ľahká úloha o tepelných kapacitách. Treba splniť rovnice

$$Q = Q_1(t) + Q_3(t) \quad \text{a} \quad T_2 = \frac{Q_1(t)T_1 + Q_2(t)T_3(t)}{Q} \ ,$$

kde som za teplotu T_3 a za prietoky $Q_{1,3}$ vložil do zátvorky čas, aby som zdôraznil ich závislosť od času.[15] Riešenie tejto sústavy rovníc je

$$Q_1(t) = Q\frac{T_3(t) - T_2}{T_3(t) - T_1}, \qquad Q_3 = Q\frac{T_2 - T_1}{T_3(t) - T_1} \ .$$

Výsledok pre $Q_3(t)$ o chvíľu využijeme.



Obr. 7: Sprchovacie zariadenie (sprcha)

Teraz uvažujme veľmi malý časový interval Δt. Na jeho začiatku je teplota vody v zásobníku T_3 a Kubo vypúšťa vodu vyššie vypočítanými prietokmi $Q_{1,3}(t)$. Zaujíma nás teplota vody

[15] Označenie T_3 bez argumentu budem využívať na označenie pôvodnej teploty vody v zásobníku.

v zásobníku v čase $t + \Delta t$. Za tento čas zo zásobníka vytečie $Q_3(t) \cdot \Delta t$ vody s teplotou $T_3(t)$ a pritečie rovnako veľa vody s teplotou T_1. Tá sa dokonale premieša so zvyškom vody v zásobníku. Tejto zmesi navyše ohrievač dodá za čas Δt teplo $P \cdot \Delta t$. Ak uvážime premiešanie vody a ohrev, tak výsledná teplota vody v čase $t + \Delta t$ je daná rovnicou

$$V\rho c T_3(t + \Delta t) = [V - Q_3(t)\Delta t]\,\rho c T_3(t) + Q_3(t)\Delta t \rho c T_1 + P\Delta t\ .$$

Odtiaľto možno vyjadriť teplotu v čase $t + \Delta t$. Šikovnejšia ja však úprava do tvaru

$$\frac{\Delta T_3}{\Delta t} \equiv \frac{T_3(t + \Delta t) - T(3)}{\Delta t} = \frac{1}{V}\left[\frac{P}{\rho c} - (T_3(t) - T_1)Q_3(t)\right]\ .$$

Pokiaľ navyše využijeme rovnicu pre $Q_3(t)$ uvedenú vyššie, výsledok sa ešte zjednoduší na

$$\frac{\Delta T_3}{\Delta t} = \frac{1}{V}\left[\frac{P}{\rho c} - (T_2 - T_1)Q\right]\ .$$

Získaný výsledok je priam báječný. Všimnime si, že na pravej strane zostali iba samé od času nezávislé veličiny. To znamená, že *teplota vody v zásobníku bude v čase lineárne klesať.* Sprchovanie sa zrejme skončí v čase, keď teplota vody v zásobníku poklesne na T_2. Tento čas už z lineárneho poklesu ľahko určíme ako

$$t_{\text{sprchovania}} = \frac{V(T_3 - T_2)}{(T_2 - T_1)Q - P/(\rho c)}\ .$$

Všimnime si, že pre $P > (T_2 - T_1)Q\rho c$ vychádza tento čas záporný. Vtedy náš výsledok neplatí. To je najlepšie vidno z rovnice (), podľa ktorej pre takto naladené parametre teplota vody narastá s časom. To znamená, že ohrievač nemusí ísť na svoj plný výkon, aby stačil udržiavať vodu v zásobníku pri konštantnej teplote. Za týchto okolností sa zrejme Kubo môže sprchovať nekonečne dlho.

Druhý postup: Pre dostatočne veľký prietok Q míňa Kubo teplú vodu rýchlejšie, než ju ohrievač v zásobníku stíha ohrievať. Jeho sprchovanie sa zrejme skončí v čase, keď teplota vody v zásobná poklesne z pôvodnej teploty T_3 na teplotu sprchovania sa T_2.

Označme čas sprchovania sa ako $t_{\text{sprchovania}}$ a pozrime sa na teplá. Na začiatku má Kubo k dispozícii mrť studenej (a zdravej!) vody z vodovodu a objem V vody s teplotou T_3. Táto voda má narozdiel od studeného stavu vnútornú energiu vyššiu o $V\rho c(T_3 - T_1)$. Na konci sprchovania je vypustený objem $Qt_{\text{sprchovania}}$ vody s teplotou T_2 a ďalší objem V vody s touto teplotou sa nachádza v zásobníku. Ak ešte uvážime, že počas celého času $t_{\text{sprchovania}}$ bol zapatý ohrievač s výkonom P, tak zo zákona zachovania energie[16]

$$\begin{aligned} U_{\text{na začiatku}} + W_{\text{ohrievač}} &= U_{\text{na konci}} V\rho c(T_3 - T_1) + Pt_{\text{sprchovania}} \\ &= (Qt_{\text{sprchovania}})\rho c(T_2 - T_1) + V\rho c(T_2 - T_1)\,, \end{aligned}$$

[16]Celková vnútorná energia sa zväčší o teplo dodané ohrievačom, U v rovnici označuje energiu vody oproti referenčnej situácii pri teplote T_1.

odkiaľ rýchlo vyjadríme

$$t_{\text{sprchovania}} = \frac{V(T_3 - T_2)}{(T_2 - T_1)Q - P/(\rho c)} \ .$$

Napokon, čo je to ten „dostatočne veľký prietok“ z prvej vety tohto postupu? Všimnime si, že pre $P \to Q\rho c(T_2 - T_1)$ sa menovateľ blíži k nule a čas sprchovania narastá do nekonečna. *To nie je prekvapivé!* Výraz $Q\rho c(T_2 - T_1)$ je totiž vnútorná energia vody odpustenej sprchou za jednotku času, t.j. niečo s rozmerom výkonu. Ak je teplo vypúšťané rovnakým (alebo väčším) výkonom, ako dokáže dodať ohrievač, Kubo sa môže sprchovať až pokým mu pred dom neprídu protestovať enviromentálni aktivisti.

Napokon trochu dlhšia reakcia na vaše riešenia. Mnohé z nich sa mi veľmi páčili a využívali ešte iné postupy, ako som uviedol vo vzoráku. Žiaľ, častokrát som sa stretal s nasledujúcimi dvoma problémami:

(i) Niekoľko riešení predpokladalo, že voda vytekajúca zo zásobníka má po celý čas počiatočnú teplotu T_3. Tak ak sa raz voda v zásobníku dokonale premiešava so studenou vodou, je snáď jasné, že ide o veľmi kruté zanedbanie. Vami získaný výsledok sa od správneho síce líšil iba jediným dolným indexom, takže si možno poviete: „*Jedno písmeno hore dole, veď to mám skoro dobre. Prečo okolo toho robíš takú vedu?*“ Ale ono to ani zďaleka nie je „skoro dobre“. Skúste si do výsledku dosadiť rozumné číselné hodnoty a zistíte, že hodnota vášho výsledku sa od správneho líši *niekoľkonásobne*, nevraviac o logických sporoch, ku ktorým váš predpoklad vedie.

(ii) Druhý problém je menej fyzikálny. Často *veľmi nejasne formulujete svoje úvahy.* Ak píšete odstavec, v ktorom sa diskusujú tri rôzne kvapalné telesá a ich tri rôzne teploty, objemy a energie, tak treba vety písať naozaj uvážene. Ja neviem, aký „objem“ máte na mysli, ak v takomto kontexte napíšete, že odovzdal nejaké teplo druhému „objemu“. Obvykle si tieto veci viem domyslieť, avšak pri opravovaní tejto úlohy mi to často dalo poriadne zabrať. Čo s tým? Proti tomuto sa asi najúčinnejšie bojuje tým, že si svoje riešenie prečítate s niekoľkodňovým odstupom. Za ten čas aj vy zabudnete, čo sa vám pri písaní hmýrilo hlavou a mnohé nejasné formulácie vám sami udrú do očú.

Dúfam, že sa niekto dočítal až na koniec. Ten druhý point berte ako radu do života, nielen do FKS. :-)

3.6 Enviroproblém (opravoval Samo)

Lenka je veľká environmentalistka a snaží sa šetriť energiou, kde to je možné. Uvedomila si, že doteraz postupovala pri vetraní veľmi neekologicky. Otvorila okno, nechala vojsť dnu studený vzduch a odísť von teplý vzduch. Uvedomila si však, že by mohla množstvo tepla ušetriť, keby odchádzajúci teplý vzduch využila na ohriatie prichádzajúceho studeného. Navrhnite Lenke čo najefektívnejší vetrací systém a zistite jeho účinnosť.

Tento príklad nebol ťažký. Všetko, čo ste naň potrebovali, bol zdravý sedliacky rozum. Použime ho aj my a pozrime sa na riešenie.

Keby sme jednoducho naraz nechali ohriať sa prichádzajúci vzduch objemu celej miestnosti od odchádzajúceho vzduchu rovnakého objemu, účinnosť by bola 50 %. Nič moc, ale aspoň sa máme od čoho odpichnúť.

Po troche zamyslenia prichádzame s nápadom rozdeliť vzduch v miestnosti na veľa malých objemov, ktorými budeme postupne ohrievať celý privádzaný vzduch. Vďaka veľkému rozdielu hmotností sa nám prvými kúskami vzduchu podarí odovzdať takmer všetko nadbytočné teplo. Ako sa však veľký vzduch ohrieva, darí sa nám odovzdať čoraz menej tepla. Nič nám nebráni zostaviť si rovnicu a vyriešiť ju – označme $T(v)$ rozdiel teplôt medzi vzduchmi v závislosti od celkového objemu vzduchu zvnútra, ktorý už svoje teplo odovzdal. Malá čiastočka vzduchu objemu $\mathrm{d}v$ zmení tento rozdiel nasledovne:

$$\mathrm{d}T = -T(v)\frac{\mathrm{d}v}{V} \ ,$$

kde V je celkový objem vzduchu v miestnosti.[17] Rozdiel teplôt sa zmenšuje úmerne sebe samému.[18] Toto je vlastnosť, ktorú majú exponenciálne funkcie, preto ľahko uhádneme riešenie:

$$T(v) = T(0)\exp[-v/V] \ .$$

Po výmene celého vzduchu sa preto rozdiel teplôt zmenší na $T(V) = T(0)e^{-1}$ a účinnosť potom vychádza ako $1 - e^{-1} \approx 63\,\%$.

To sme tomu teda veľmi nepomohli, zlepšenie o 13 % je všetko, na čo sa zmôžeme? Snáď máme na viac! Využime tú istú fintu dvakrát – ohrievajme malými kúskami malé kúsky vzduchu. Rozdeľme si prichádzajúci vzduch na množstvo kúskov s objemami $\mathrm{d}V$ ktorých teplota lineárne rastie o $\mathrm{d}T$ s poradovým číslom kúsku tak, že posledný kúsok má teplotu o malé $2\mathrm{d}T$ menšiu, ako je v dome. To vieme dosiahnuť napríklad nejakým jednorázovým predhriatím prichádzajúceho vzduchu. Teraz vezmime jeden kúsok vzduchu z domu tiež objemu $\mathrm{d}V$ a nechajme ho vymeniť si teplo s najteplejším prichádzajúcim kúskom. Obom sa zmení teplota o $\mathrm{d}T$. Tento kúsok takto dosiahol teplotný rozdiel $2\mathrm{d}T$ s druhým prichádzajúcim kúskom a aj s ním vymení teplo, obom sa zmení teplota o $\mathrm{d}T$ a sága pokračuje. Až nakoniec kúsok opustí dom s teplotou o $\mathrm{d}T$ vyššou ako vonku a prichádzajúci kúsok vojde do domu s teplotou o $\mathrm{d}T$ nižšou ako je vnútri. A tento postup môžeme donekonečna opakovať! Možno preto zanedbať predhriatie na začiatku – robíme ho len raz na začiatku na malom množstve vzduchu a postup môžeme následne nekonečne veľakrát opakovať a vymeniť celý vzduch po troškách. Účinnosť procesu je teda daná pomerom $\mathrm{d}T$ a rozdielu teplôt (prichádzajúci vzduch treba ohrievať len o $\mathrm{d}T$), tento pomer však vieme urobiť ľubovoľne malý a teoreticky sme preto schopní mať takmer 100 % účinnosť!

Toľko teória, ako takéto zariadenie zostrojiť v praxi? Postačia dve rúrky ovinuté okolo seba. Jednou sa bude privádzať studený vzduch zvonka a druhou odvádzať teplý vzduch zvnútra (protismerné prúdenie). Ak si budú vzduchy v rúrkach dostatočne odovzdávať teplo, bude v príslušnom mieste oboch rúrok vždy takmer rovnaká teplota (až na $\mathrm{d}T$). Oba vzduchy sa postupne posúvajú a celý proces je rovnaký ako vyššie, len trochu spojitejší. S účinnosťou je to v praxi tiež veľmi dobré, ak si dáte do Googlu slovné spojenie „rekuperácia tepla“, dostanete množstvo linkov na spoločnosti ponúkajúce vetracie systémy až s 95 % účinnosťou.

[17] Systém pracuje pri konštantnom tlaku, preto je objem prirodzenou a zároveň rozumnou extenzívnou veličinou!

[18] Taký istý typ rovnice sa vyskytol v zimnej sérii v príklade 3.6 Roztop sa!, pričom sme tam stratili aj pár slov o riešení tejto rovnice.

Na záver otázka na zamyslenie – nech je vonku veľmi chladno. Chladný vonkajší vzduch najprv nechám prejsť trúbkou zakopanou v zemi, kde sa trochu ohreje. Potom použijem náš protismerný systém. Dosiahnem tak účinnosť nad 100 %?

3.7 Siločiara (opravovala Marika)

Vo vzdialenosti h od vodivej platne sa nachádza náboj. Všimnime si siločiary elektrického poľa, ktoré vychádzajú z náboja v smere rovnobežnom s platňou. Priesečníkom týchto siločiar a platne je kružnica. Určte jej polomer.

Čaute decká, napriek dobrému zvyku dať ako posledný príklad v roku nejakú tyč[19], tento príklad sa dal zrátať pomerne bezbolestne, bolo potrebné použiť *len zopár drsných trikov.* Všetky z nich sa v elektrostatike hodne využívajú, poďme sa teda na ne v skratke pozrieť.

Zrkadlenie: Ak máme nekonečnú vodivú rovinu[20] a pri nej bodový náboj, táto rovina sa správa ako zrkadlo – náboj q vo vzdialenosti a od zrkadla odzrkadlí na náboj $-q$ vo vzdialenosti a na opačnej strane zrkadla. Myšlienka zrkadlenia spočíva vo fakte, že oba prípady – s jedným nábojom a rovinou, resp. s nábojom a jeho zrkadlovým náprotivkom – dávajú pre potenciál v strede medzi nábojmi rovnakú hodnotu a z hlbších právd elektromagnetizmu vyplýva, že riešenie pre obe situácie musí byť rovnaké.[21]

Gaussov zákon: Citujúc všeobecne uznávaného fyzika Tomáša B.: „Gaussov zákon je úplne super!“.[22] V integrálnom tvare vyzerá takto: *Tok elektrickej intenzity $\vec{E}$ cez povrch ohraničeného objemu sa rovná veľkosti náboja v ňom uzavretého deleno permitivita.* Gauss je skutočne užitočná vecička, ak je na povrchu vybraného objemu všade rovnaká intenzita alebo ak vieme vymyslieť takú uzavretú plochu, že intenzita bude pretekať len cez jednu z jej častí a ostatné budú rovnobežné so siločiarami – pripomíname, že tok intenzity cez malú plôšku (kde je intenzita rovnaká) je súčin zložky intenzity kolmej na plôšku s veľkosťou plôšky.

Superpozícia: Zdanlivo jednoduchá vec, ktorou si mnohokrát vieme zjednodušiť život. Hovorí, že ak máme nejakú zložitú situáciu, môžeme si ju naskladať z jednoduchších prípadov a tie jednoducho sčítať. V našom prípade to znamená, že ak zrátame zvlášť pole[23] od jedného náboja a zvlášť pole od druhého náboja a sčítam ich, dostanem výsledné pole od dvojice nábojov.[24]

[19] Tyč = žrď, brvno, trám, kôl, prípadne asociáce spojené s nechutenstvom a nevoľnosťou ako aj iné.

[20] Tá, to vy bežne v škole nemáte?

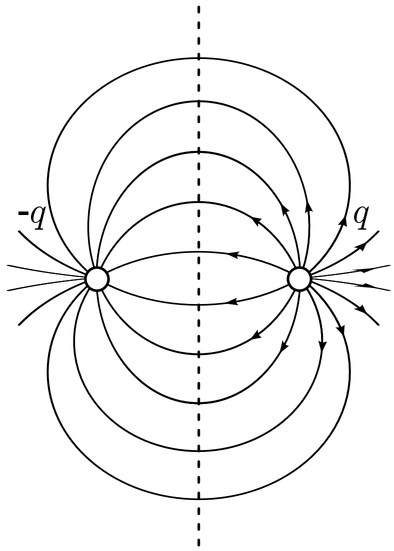
[21] Poriadne vysvetlenie zrkadlenia by si vyžadovalo viac času. Môžete si naň počkať v prednáške z Teórie elektomagnetického poľa, alebo dostatočne dlho otravovať vášho fyziku študujúceho obľúbeného vedúceho. Iné použitie zrkadlenia na sfére sa dá nájsť na *http://www.fks.sk/fx/fx3vzo1.pdf* v príklade FX2 Guľka, ktorý je v FX Zbierke uvedený ako FX C5 Škrupina.

[22] Ak ste sa dosiaľ s Gaussovým zákonom nestretli, tak odporúčam vzorák k príkladu FX15 Čiara na *http://www.fks.sk/fx/fx3vzo5.pdf*, prípadne v Zbierke FX pod označením FX C6 Čiara. Podobnosť s týmto príkladom nie je úplne náhodná. :-)

[23] Pod elektrickým poľom myslím v tomto prípade intenzitu v každom mieste, rovnako to funguje s potenciálom.

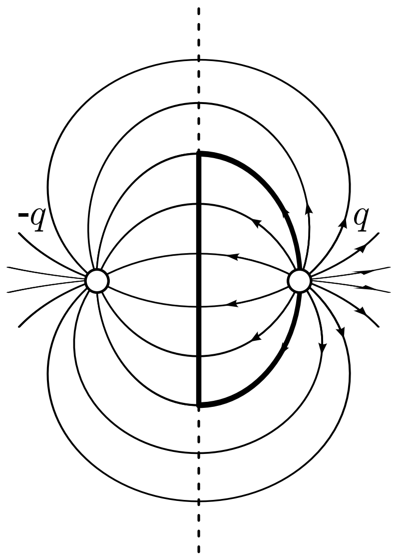
[24] Pre viac nábojov to funguje analogicky.

Vyzbrojení novými poznatkami prejdeme k riešeniu úlohy. Náboj najprv zozrkadlíme. S dvoma nábojmi sa nám bude rátať oveľa ľahšie ako s nábojom a rovinou. Naša situácia teda vyzerá takto:



Obr. 8: Zozrkadlenie náboja

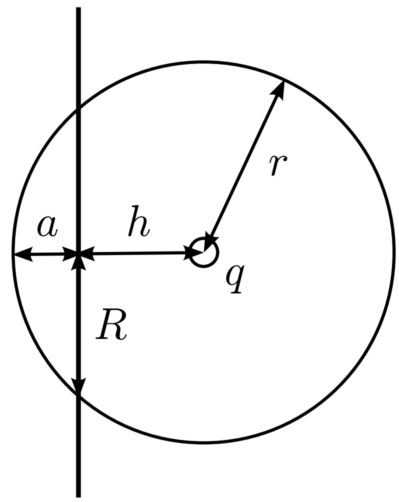
Poďme teraz použiť Gaussov zákon. Za našu plochu si vyberieme takýto kvetináč:



Obr. 9: Plocha ako kvetináč

Na dne bude sedieť náboj – ak si ho predstavíme ako malú guľôčku, tak presne polovica guľôčky bude vnútri kvetináča. Povrh kvetináča bude tvorený siločiarami – keďže všetko $\vec{E}$ bude tiecť po povrchu kvetináča, žiaden tok intenzity cez povrch kvetináča nebude a celý tok intenzity bude cez vrch, a ten bude $\Phi = \frac{1}{2}Q/\varepsilon$. Dvojka v menovateli vznikne z toho, že len polovica náboja prispieva do toku v kvetináči – zo symetrie vidieť, že polovica $\vec{E}$ vytečie smerom k rovine a polovica opačným smerom.

Tok intenzity vieme spočítať aj iným spôsobom. Teraz využijeme trik so superpozíciou. Vezmeme si najprv len jeden náboj a guľovú sféru okolo neho. Vodivá doska seká guľu tak, ako je nakreslené na obrázku:



Obr. 10: Guľová sféra okolo náboja

Zaujíma nás, aký bude tok cez kruh s polomerom R. To zrátame hneď, ako si uvedomíme že musí byť rovnaký ako tok cez „vrchlík“ – medzi doskou a vrchlíkom sa totiž nenachádzajú žiadne náboje, a teda podľa Gaussa všetko, čo vtečie, musí aj vytiecť. Stačí nám teda porátať tok Φ_1 cez vrchlík využijúc, že na sfére je všade rovnaká intenzita $E = Q/(4\pi\varepsilon r^2)$ smerujúca kolmo von. Tok Φ_1 bude teda jednoducho $\Phi_1 = ES$. Z geometrie platí:

$$r^2 = R^2 + h^2 \ , \qquad \text{a tiež} \qquad r = h + a\,.$$

Obsah vrchlíka sa počíta ako $S = 2\pi ar$ (pozri napr. MFChT). Ak a a r vyjadríme pomocou h, R a dosadíme do vzťahu pre tok, dostaneme

$$\Phi_1 = \frac{Q}{2\varepsilon}\left(1 - h/\sqrt{R^2 + h^2}\right) \ .$$

To je zatiaľ tok od jedného náboja. Rovnako by sme zrátali tok pre druhý náboj a čuduj sa svete, ten tok bude úplne rovnaký, čo do veľkosti i orientácie. Výsledný tok bude súčtom oboch tokov, teda $2\Phi_1$. To musí byť ale rovnaký výsledok, ako keď sme tok zrátali z Gaussovho zákona! Keď dáme tieto dva výsledky do rovnosti, $\Phi = 2\Phi_1$, po krátkych úpravách dostaneme

$$R = h\sqrt{3}\,.$$

Úplne bez integrovania. :-)

Ták, to by sme mali. A vedeli by ste teraz spočítať polomer pre siločiaru smerujúcu pod všeobecným uhlom?